Федеральное агентство по образованию
Бийский педагогический государственный университет
им. В.М. Шукшина
Московский педагогический государственный университет
Томский государственный университет

А б е л е в ы   г р у п п ы

Материалы Всероссийского симпозиума
(Бийск, 19-25 августа 2006 г.)

Бийск
РИО БПГУ им. В.М. Шукшина
2006

ББК 22.14
А 14

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Бийского педагогического государственного университета
им. В.М. Шукшина*

А 14 Абелевы группы [Текст]: Материалы Всероссийского симпозиума (Бийск. 19-25 августа 2006 г.)/ Отв. ред. В.Х. Фарукшин. —/ Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2006. — 51 с.

Сборник содержит материалы участников Третьего Всероссийского симпозиума «Абелевы группы», состоявшегося в г. Бийске 19-25 августа 2006 г.

Адресован специалистам по теории абелевых групп, модулей, колец, алгебр и их приложений.

ISBN 5-85127-359-3

СОДЕРЖАНИЕ

Исаак Хаимович Беккер 5

Е.А. Благовещенская (С. Петербург) Связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов 9

И.В. Гердт (Томск) $\mathfrak{R}$-малые абелевы группы 10

О.В. Голованова, В.М. Левчук (Красноярск) Зависимость порядков конечной простой группы и пересечения централизатора с классом сопряженных элементов инволюции 12

Е.В. Грачев, А.М. Попова (Новосибирск) Группа единиц целочисленного группового кольца группы S_5 13

И.Э. Гриншпон (Томск) Голоморфно изоморфные векторные группы 14

С.Я. Гриншпон (Томск) Транзитивные абелевы группы без кручения 16

С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова (Томск) Гомоморфная устойчивость абелевых групп и вполне транзитивность 18

О.И. Давыдова (Москва) Факторно делимые группы ранга 1 ... 20

Е.Г. Зиновьев (Томск) Строение делимых и инъективных модулей над csp-кольцами 21

А.В. Карпенко (Томск) О редуцированной абелевой группе, имеющей регулярный центр кольца эндоморфизмов 23

О.М. Катеринчук (Томск) Характеризации больших абелевых групп без кручения для некоторых классов K 24

С.Ф. Кожухов, А.С. Тверетин (Сургут) Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с элементарным фактором 26

Е.М. Коленова (Н. Новгород) Об определяемости абелевых EndE^{+}-групп своими группами эндоморфизмов 28

А.Н. Корюкин, А.М. Себельдин, А.Л. Силла (Н. Новгород) Почти факториальные кольца 29

В.М. Мисяков (Томск) Об одной проблеме для группы $\mathrm{Hom}(-, C)$ 30

М.М. Савинкова (Томск) Функции большого размаха 31

Л.Н. Самсонова, В.Х. Фарукшин (Бийск) К теореме Бэра-Капланского для квадратичных абелевых групп без кручения . . . 33

А.М. Себельдин, Д.С. Чистяков (Н. Новгород) Абелевы группы, определяющиеся центром своего кольца эндоморфизмов . . 34

Г.С. Сулейманова (Красноярск) Абелевы нормальные подгруппы унипотентных подгрупп в группах Шевалле исключительных типов 36

Е.А. Тимошенко (Томск) Об одном соотношении дистрибутивности для Т-радикалов 38

В.Х. Фарукшин (Москва) Почти Sp-локальные группы без кручения 40

А.А. Фомин (Москва) Об одном способе задания пары взаимно двойственных групп 42

А.В. Царев (Рязань) Группы без кручения конечного ранга, факторно делимые группы и конечно порожденные R-модули 44

А.Р. Чехлов (Томск) Абелевы группы, подгруппы которых являются идеалами 47

Д.С. Чистяков (Н. Новгород) Эндоморфные абелевы группы без кручения ранга 3 49

Е.Ю. Ярдыков (Томск) Проективные модули над кольцом обобщенных треугольных матриц 50

ИСААК ХАИМОВИЧ БЕККЕР

Гриншпон С.Я., Крылов П.А.

И.Х. Беккер родился 9 июля 1928 года в небольшом городе Биржай в Литве. В 1947 году он поступил учиться на первый курс физико-математического факультета Вильнюсского госуниверситета. В 1949 году он перевелся на третий курс механико-математического факультета Томского госуниверситета. Окончив в 1952 году ММФ ТГУ, стал работать учителем математики средней школы №43 города Томска. В 1954–56 гг. И.Х. Беккер работает также по совместительству ассистентом кафедры математики Томского пединститута.

С 1 сентября 1956 года Исаак Хаимович полностью переходит на работу в Томский госуниверситет на кафедру алгебры и теории чисел.

Кафедра алгебры и теории чисел была основана в 1938 году в составе профессоров Ф.Э. Молина и Н.П. Романова. Ф.Э. Молин признан сейчас одним из классиков современной алгебры. Н.П. Романов был специалистом по теории чисел. В 1941–1953 гг. на кафедре работал профессор С.А. Чунихин — в будущем академик АН БССР, крупный специалист в теории конечных групп. В 1943–1961 гг. сотрудником кафедры был П.И. Трофимов — впоследствии профессор Пермского госуниверситета, занимавшийся теорией групп. Он предложил И.Х. Беккеру одну задачу о группах. Для некоммутативных групп она имела тривиальное решение, но представляла интерес для абелевых (т. е. коммутативных) групп. Так Исаак Хаимович заинтересовался абелевыми группами. В 1966 году он защитил кандидатскую диссертацию (научный руководитель П.И. Трофимов) под названием «Голоморфы абелевых групп». Голоморф абелевой группы представляет собой полупрямое расширение этой группы с помощью ее группы автоморфизмов. Поэтому исследование голоморфов синтетически соединяет в себе методы коммутативной и некоммутативной алгебры. До работ Исаака Хаимовича по теме диссертации были известны лишь отдельные результаты о голоморфах конечных и конечно порожденных групп. Ему удалось значительно продвинуться в изучении голоморфов бесконечных групп.

В 1968 году И.Х. Беккеру присвоено ученое звание доцента, а в 1993 году — ученое звание профессора. В 1968 году Исаак Хаимович избирается по конкурсу заведующим кафедрой алгебры и теории чисел (с 1974 г. — кафедра алгебры). Он заведовал кафедрой алгебры с небольшими перерывами до последнего дня своей жизни.

В течении ряда лет И.Х. Беккер руководил математическим кружком, лекторием учащихся старших классов школ г. Томска при ММФ ТГУ. Принимал участие в проведении городских, областных математических олимпиад школьников, являясь членом, председателем их оргкомитетов. В течении пяти лет он был куратором научного студенческого общества факультета, выступал с лекциями для учителей средних школ. Много лет И.Х. Беккер являлся членом методической комиссии факультета.

Исаак Хаимович с замечательным мастерством читал лекции по высшей алгебре, теории чисел, математической логике, вел ряд специальных курсов. Его лекции отличались доступностью и высоким научным уровнем изложения.

И.Х. Беккер провел большую работу по организации и развитию специализации по алгебре на ММФ ТГУ. Эта специализация фактически началась с работы кружка по теории групп в 1966 году, которым руководил Исаак Хаимович. Он разработал планы, программы спецкурсов этой специализации.

Им впервые на факультете были прочитаны спецкурсы: «Кольца и модули», «Абелевы группы», «Группы автоморфизмов алгебраических систем», «Гомологическая алгебра». В 1970 году состоялся первый выпуск студентов, специализировавшихся на кафедре алгебры. С тех пор кафедра алгебры выпустила значительное число студентов.Они стали высококвалифицированными специалистами, многие защитили диссертации.

До последнего дня своей жизни И.Х. Беккер вел интенсивную научную работу в области теории абелевых групп и модулей. Сферой его непосредственных интересов были голоморфы абелевых групп и группы когомологий малых размерностей. В последние годы жизни он начал развивать новое направление — теорию аффинных групп модулей и колец.

Методы исследования голоморфов абелевых групп, предложенные Исааком Хаимовичем, позволили ему получить значительное продвижение в решении ряда проблем теории голоморфов групп. Им полностью был решен вопрос о совершенности голоморфов абелевых групп с автоморфизмом 2, описаны автоморфизмы голоморфов различных межпрямых сумм, получены результаты о скрещенных гомоморфизмах групп автоморфизмов абелевых групп. В начале 70-х годов Исаак Хаимович ввел понятие относительного голоморфа и исследовал различные его свойства. Много его работ посвящено классической задаче об определяемости абелевой группы своим голоморфом. Он настойчиво находил различные классы абелевых групп, определяющихся своими голоморфами, существенно расширив известные классы, найденные американскими алгебраистами Миллером и Миллсом. Незадолго до кончины он решил в целом проблему определяемости абелевой группы своим голоморфом. Исааку Хаимовичу принадлежит ряд интересных результатов о группах когомологий малых размерностей. Группы когомологий заинтересовали его не только как содержательный алгебраический объект, а также в связи с их приложениями в топологии и теоретической физике.

Исаак Хаимович опубликовал более 60 научных работ, которые получили признание российских и зарубежных алгебраистов. Он написал 10 учебно-методических работ, среди них учебник и сборник задач по теории линейных операторов векторных пространств. В 1988 году была издана книга И.Х. Беккера (совместно с С.Ф. Кожуховым) «Автоморфизмы абелевых групп без кручения». В ней Исаак Хаимович систематизировал основные результаты о голоморфах абелевых групп и первых группах когомологий абелевых групп без кручения.

Интенсивную научную работу И.Х. Беккер сочетал с подготовкой специалистов высокой квалификации через аспирантуру при кафедре алгебры. Начиная с 1975 года, под руководством И.Х. Беккера защитили кандидатские диссертации в специализированных Советах Москвы, Кишинева, Новосибирска 14 человек. Пятеро его учеников стали докторами наук (П.А. Крылов (1991 г.), С.Ф. Кожухов (1994 г.), А.М. Себельдин (1998 г.), С.Я. Гриншпон (2000 г.) и А.Р. Чехлов (2003 г.)).

Исаак Хаимович руководил Томской алгебраической школой. Кафедра алгебры поддерживает тесные научные связи с алгебраистами МГУ, МПГУ, СПбГУ, Института математики СО РАН.

В 1976 году под редакцией И.Х. Беккера в Томске был издан межвузовский научный сборник «Группы и модули». В 1979 году вышел 2-ой выпуск сборника под названием «Абелевы группы и модули». С 1980 года по 1990 год ответственным редактором этого сборника был известный математик профессор МГУ Л.А. Скорняков, с 1991 года — профессор МГУ А.В. Михалев. С 1980 года И.Х. Беккер — заместитель ответственного редактора сборника «Абелевы группы и модули». В сборнике публиковались работы аспирантов, преподавателей и научных работников из разных городов, относящиеся к актуальным проблемам теории абелевых групп, колец и модулей. Сборник получил известность и признание в алгебраических кругах. Он сыграл большую роль в становлении Томской алгебраической школы.

Исаака Хаимовича отличали скромность, доброта, ответственность за порученное дело, высокая культура и образованность. Он был по-настоящему интеллигентным человеком, любил литературу, театр, музыку. Студенты, ученики и коллеги, все, кто когда-нибудь общался с Исааком Хаимовичем, высоко ценили и уважали его.

Скончался И.Х. Беккер 7 августа 1997 года.

Связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов

Благовещенская Е.А. (С. Петербург)

Почти вполне разложимые группы (*пвр группы*), составляют класс наиболее близкий к классу вполне разложимых групп, согласно их определению. При этом он достаточно полно отражает структурную сложность и свойства абелевых групп без кручения конечного ранга в целом. Пвр группа X содержит некоторую вполне разложимую группу A (прямую сумму групп ранга 1) в качестве вполне характеристической подгруппы конечного индекса [1]. Такая подгруппа $A = R(X)$ определяется однозначно и называется *регулятором* пвр группы X со *множеством критических типов* $T_{cr}(A) = T$, определяемым разложением $A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau$ на однородные компоненты. Традиционно пвр группы классифицируются с точностью до *почти изоморфизма* (обозн. $\cong_{nr}$), эквивалентности, которая слабее изоморфизма ($\cong$), но отражает групповую структуру более точно, чем квазиизоморфизм.

Теорема 1 [2]. *Кольца эндоморфизмов почти изоморфных пвр групп также почти изоморфны, рассматриваемые как аддитивные структуры.*

Для фиксированной вполне разложимой группы A определим $\mathcal{A}$ — класс пвр групп, имеющих регулятор A. Если $T_{cr}(A)$ состоит из попарно несравнимых типов, то группа $X \in \mathcal{A}$ называется *блочно-жесткой пвр группой*; если все $\tau \in T_{cr}(A)$ идемпотентны, то $X \in \mathcal{A}$ называется *пвр группой кольцевого типа.*

Будем считать, что $\mathcal{A}$ — класс блочно-жестких пвр групп кольцевого типа. Известно, что $\operatorname{End} X \subset \operatorname{End} A$, если $X \in \mathcal{A}$.

Теорема 2 [3]. *Пусть $X \in \mathcal{A}$. Тогда любой автоморфизм кольца* $\operatorname{End} X$ *однозначно продолжается до автоморфизма кольца* $\operatorname{End} A$.

Теорема 3 [4]. *Пусть X, $Y \in \mathcal{A}$ и X/A, Y/A — циклические группы. Тогда $X \cong_{nr} Y$, тогда и только тогда, когда* $\operatorname{End} X \cong \operatorname{End} Y$.

Нам понадобится обозначение K^+ для аддитивной группы кольца K.

Теорема 4. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, такое что $K^+ \in \mathcal{A}$ и K^+/A — циклическая группа. Тогда*

1. *A является подкольцом кольца K;*

2. *Если A разлагается в прямую сумму идеалов ранга 1, то это разложение единственно, $A = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A_i$, и $K \cong \mathrm{End}(K^+) \cap \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{End}(A_i{}^+)$.*

Литература

[1] *Mader A.* Almost Completely Decomposable Abelian Groups / A. Mader // Gordon and Breach (Algebra, Logic and Applications), Amsterdam. — 2000.

[2] *Благовещенская Е.А.* Двойственные связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов / Е.А. Благовещенская // Совр. матем. и ее приложения, Алгебра. — 2004. — Т.13.

[3] *Благовещенская Е.А.* Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жестких почти вполне разложимых групп / Е.А. Благовещенская // Фунд. и приклад. матем. — 2004. — Т.10, №2. — С. 23-50.

[4] *Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P.* The Baer-Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups / E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz // Contem. Math. — 2001. — V.273. — P. 85-93.

$\mathfrak{K}$-малые абелевы группы

Гердт И.В. (Томск)

В [1] было введено понятие K-малых абелевых групп. Пусть K — некоторый класс абелевых групп. Абелеву группу A назовем *K-малой*, если для любого семейства групп $\{B_i\}_{i\in I}$, где каждая группа B_i принадлежит K и любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$ существует конечное подмножество $J \subset I$ такое, что $\varphi A \subset \bigoplus\limits_{i\in J} B_i$.

Если класс K совпадает с классом всех абелевых групп, то K-малую группу A будем называть малой. В [1] получено полное описание малых и D-малых групп, где D — класс всех делимых абелевых групп.

Пусть $\mathfrak{R}$ — класс всех редуцированных абелевых групп.

Через G^1 будем обозначать *первую ульмовскую подгруппу группы* G ([2], с. 40), то есть $G^1 = \bigcap\limits_{n \in N} nG = \bigcap\limits_{p \in P} \bigcap\limits_{k \in N} p^k G$, где P — множество всех простых чисел.

Теорема 1. *Для группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *A — $\mathfrak{R}$-малая группа;*

2) *если M есть эпиморфный образ группы A и M — прямая сумма циклических групп конечного порядка, то M — ограниченная группа;*

3) *если M есть эпиморфный образ группы A и M — периодическая группа, то M — прямая сумма делимой и ограниченной групп;*

4) *для любых групп B_i $(i \in I)$ таких, что $B_i^1 = 0$, и любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus\limits_{i \in I} B_i$ существует конечное подмножество $J \subset I$ такое, что $\varphi(A) \subset \bigoplus\limits_{i \in J} B_i$.*

Теорема 2. *Пусть A — периодическая группа. Группа A является $\mathfrak{R}$-малой тогда и только тогда, когда A является прямой суммой делимой и ограниченной групп.*

Для описания $\mathfrak{R}$-малых групп без кручения нам понадобится следующее определение из [3].

Пусть A — группа без кручения. Группа A называется *факторно делимой*, если существует свободная подгруппа F группы A такая, что $A/F = C \oplus D$, где C — ограниченная группа, D — делимая периодическая группа.

Для $\mathfrak{R}$-малых групп без кручения получены следующие результаты.

Теорема 3. *Всякая $\mathfrak{R}$-малая группа без кручения является факторно делимой группой.*

Теорема 4. *Группа A без кручения конечного ранга является $\mathfrak{R}$-малой тогда и только тогда, когда A — факторно делимая группа.*

Литература

[1] *Гердт И.В.* Малые абелева группы / И.В. Герд // Вестник ТГУ. — 2006. — №290. — С. 14-17.

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М: Мир, 1974. — Т.1. — 336 с.

[3] *Beaumont R.A., Pierce R.S.* Torsion-free rings / R.A. Beaumont, R.S. Pierce // Illinois. J. Math. — 1961. — 5. — P. 61-98.

Зависимость порядков конечной простой группы и пересечения централизатора с классом сопряженных элементов инволюции

Голованова О.В.[1], **Левчук В.М.**[2] (Красноярск)

Как обычно, централизатор элемента τ в группе G обозначаем через $C_G(\tau)$, а класс сопряженных элементов с представителем τ – через τ^G.

Гипотеза. *Для любого натурального числа m существует только конечное число конечных простых неабелевых групп G, имеющих инволюцию τ с условием $|C_G(\tau) \cap \tau^G| \leq m$.*

Теорема. *Пусть N — натуральное число и $G = G(q)$ — группа лиева типа над полем четного порядка q. Если порядок $|G(q)|$ достаточно большой, то в G найдется инволюция τ такая, что выполняется неравенство $|C_G(\tau) \cap \tau^G| > N$.*

В работе [1] гипотеза подтверждена для всех инволюций знакопеременных групп A_n, групп лиева типа с одним классом сопряженных инволюций и для диагонализируемых инволюций групп $PSL_n(q)$.

Литература

[1] *Голованова О.В, Левчук В.М.* Зависимость порядков конечной простой группы и пересечения централизатора и класса сопряженных элементов инволюции / О.В. Голованова, В.М. Левчук // Известия гомельского университета. — 2006. — № 7.

[1] Автор поддержан РФФИ (грант № 05-01-00576-а) и грантом № 23-06-1/ФП.
[2] Автор поддержан РФФИ (грант № 06-01-00824).

Группа единиц целочисленного группового кольца группы S_5 [3]

Грачев Е.В., Попова А.М. (Новосибирск)

Мы продолжаем исследовать строение групп единиц целочисленных групповых колец конечных групп с помощью компьютерных вычислений. Рассматривается группа S_5. Применяется существенно модифицированный алгоритм по сравнению с [1]. Напомним два важных вопроса относительно групповых колец, сформулированных в [2]. Пусть G — конечная группа, $V(ZG)$ — нормированная мультипликативная группа целочисленного группового кольца ZG.

1. *Расщепляемо ли вложение* $G \longrightarrow V(ZG)$?

2. *Если расщепляемо, то существует ли в* $V(ZG)$ *нормальное дополнение к* G *без кручения?*

Теорема. *Вложение* $S_5 \longrightarrow V(ZS_5)$ *не расщепляемо.*

Заметим, что в ряду групп A_4, S_4, A_5, S_5 это первый отрицательный результат. Для групп A_4, S_4, ответы на оба вопроса оказались положительными, что доказывается в [3], а для A_5 — в [4].

Литература

[1] *Попова А.М., Журков С.В.* Группа единиц целочисленного группового кольца SL_2 (3) / А.М.Попова, С.В.Журков // Algebra and Model Theory 5. — Новосибирск. — 2005. — С. 170-181.

[2] *Cliff G.H., Sehgal S.K., Weiss A.R.* Units of integral group rings of metabelion groups / G.H. Cliff, S.K. Sehgal, A.R. Weiss // J. of Algebra. — 1981. — V.73. — P. 167-185.

[3] *Попова А.М., Журков С.В.* Структура мультипликативных групп целочисленных групповых колец // *В печати.*

[4] *Грачев Е.В., Попова А.М.* Единицы целочисленного группового кольца группы A_5 // *В печати.*

[3] Работа поддержана РФФИ, код проекта №06-01-00159-а.

Голоморфно изоморфные векторные группы

Гриншпон И.Э. (Томск)

Пусть G — абелева группа, $\Gamma(G)$ — ее голоморф, то есть полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Группу $\Gamma(G)$ можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар $(g,\,\varphi)$, где $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ с групповой операцией $(g,\,\varphi)+(h,\,\psi) = (g+\varphi h,\,\varphi\psi)$ для любых $(g,\,\varphi)$, $(h,\,\psi) \in \Gamma(G)$. Элементы вида $(g,\,\varepsilon)$ образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G, а элементы вида $(0,\,\varphi)$ — подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Aut}(G)$.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с определяемостью редуцированных векторных групп своим голоморфом.

Если G и H — изоморфные группы, то их голоморфы $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ также изоморфны. Однако из изоморфизма голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ не всегда следует изоморфизм групп G и H.

Говорят, что группа G определяется в классе $\mathfrak{R}$ своим голоморфом, если для любой группы H из этого класса из изоморфизма голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ следует изоморфизм групп G и H.

Пусть $\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$ и $\mu\colon \Gamma(G) \longrightarrow \Gamma(H)$ — изоморфное отображение группы $\Gamma(G)$ на группу $\Gamma(H)$. Тогда $\mu(G) = H' = H_1 \oplus \Psi_1$, $\mu^{-1}(H) = G' = G_1 \oplus \Phi_1$, где $G_1,\ H_1$, и $\Phi_1,\ \Psi_1$ — множества первых, вторых компонент групп G' и H'. Имеем $G = G_1 \oplus G_2,\ H = H_1 \oplus H_2$, где $G_1,\ H_1$ — характеристические подгруппы групп G и H соответственно, $G_1 \cong H_1$, $G_2 \cong \mathrm{Hom}(H_2,\,H_1)$ [1].

Разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, индуцированное гомоморфизмом голоморфов μ, назовем *μ-разложением* [2].

Теорема 1. *Векторная группа G, мощность которой не превосходит первого кардинала ненулевой меры, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда всякое ее μ-разложение $G = G_1 \oplus G_2$ обладает свойством $\mathrm{Hom}(G_2,\,G_1) \cong G_2$.*

Отметим, что достаточные условия теоремы справедливы для любых абелевых групп.

Пусть $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ — редуцированная векторная группа, $G = G_1 \oplus G_2$ — некоторое ее μ-разложение. Тогда G_1 и G_2 также векторные группы [3].

Имеем
$$G_1 = \prod_{\alpha \in I_1} G_\alpha, \quad G_2 = \prod_{\beta \in I_2} G_\beta.$$

Введем обозначения:
$$I_1' = \{\alpha \in I_1 \mid \mathrm{Hom}(G_2,\, G_\alpha) \neq 0\},$$
$$I(\alpha) = \{\beta \in I_2 \mid t(G_\beta) \leqslant t(G_\alpha)\}, \text{ где } \alpha \in I.$$

Некоторые важные свойства μ-разложений векторных групп дает следующая теорема.

Теорема 2. *Всякое μ-разложение $G = G_1 \oplus G_2$ редуцированной векторной группы обладает свойствами:*

a) $\mathrm{Hom}(G_1,\, G_2) = 0$*;*

b) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2,\, G_1),\, G_1) \cong G_2$*;*

c) Множество I_1' — конечно;

d) Если $r(G_2) < \aleph_0$ $(I_2 = \{\beta_1,\, \beta_1,\, \ldots,\, \beta_m\})$, то для любой группы G_{β_s} $(\beta_s \in I_2)$ существует единственная группа G_{α_k} $(\alpha_k \in I_1')$ такая, что $\mathrm{Hom}(G_{\beta_s},\, G_{\alpha_k}) \neq 0$ и для любого простого числа p группа G_{α_k} p-делима тогда и только тогда, когда группа $\prod\limits_{\beta \in I(\alpha_k)} G_\beta$ p-делима.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Векторная группа G определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из условий:*

1) *G имеет только тривиальные μ-разложения;*

2) *для любого нетривиального μ-разложения группы $G = G_1 \oplus G_2$ имеем $r(G_2) < \aleph_0$ и существует такая биекция η множества I_2 на себя, что $\mathrm{Hom}(G_\beta,\, G_\alpha) \cong G_{\eta(\beta)}$ для некоторого $\alpha \in I_1'$.*

Разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G называется *полухарактеристическим*, если подгруппа G_1 характеристична в G, а группа G_2 не является характеристической подгруппой группы G.

Следствие 4. *Векторная группа G определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп, если она удовлетворяет одному из условий:*

а) группа G не имеет полухарактеристических разложений;

б) *для любого полухарактеристического разложения $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, удовлетворяющего свойствам а) — d), имеет место условие* 2 *теоремы* 3.

Литература

[1] *Беккер И.Х.* О голоморфах нередуцированных абелевых групп. / И.Х. Беккер // Изв. Вузов. — 1968. — №8. — С. 3-8.

[2] *Беккер И.Х.* Абелевы голоморфные группы / И.Х. Беккер // Избранные доклады международной конф. Всесибирские чтения по матем. и мех., Томск. — 1997. — Т.1. — С. 43-47.

[3] *Balcerzyk S., Bialynicki–Birula A., Los J.* On direct decompositions of complete direct sum of group of rank 1 / S. Balcerzyk, A. Bialynicki-Birula, J. Los // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1961. — V.9, No.3. — C. 451-454.

Транзитивные абелевы группы без кручения

Гриншпон С.Я. (Томск)

Редуцированная абелева группа A называется *транзитивной* (*вполне транзитивной*), если для любых двух элементов a и b группы A таких, что $\mathbf{H}(a) = \mathbf{H}(b)$ ($\mathbf{H}(a) \leqslant \mathbf{H}(b)$), где $\mathbf{H}(a)$ и $\mathbf{H}(b)$ — высотные матрицы элементов a и b соответственно, существует автоморфизм (эндоморфизм) этой группы, переводящий a в b.

Исследованию транзитивных и вполне транзитивных абелевых групп, как групп «богатых» автоморфизмами и эндоморфизмами, посвящено большое количество работ (см., например, [1–8]).

В настоящей работе изучаются транзитивные группы без кручения. Заметим, что при исследовании таких групп в определении транзитивности (вполне транзитивности) высотные матрицы элементов можно заменить на характеристики элементов.

Пусть A — однородно разложимая группа, то есть $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где A_i — однородные группы. Если собрать вместе компоненты A_i одного и того же типа и взять их прямую сумму, то получим *каноническое* (наименьшее однородное) разложение $A = \bigoplus\limits_{t \in T} A_t$, где A_t — однородные группы различных типов t. Группы A_t назовем *однородными компонентами* группы A. Однородные компоненты однородно разложимой группы A определяются однозначно с точностью до изоморфизма.

Для абелевой группы G обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых чисел p, для которых $pG \neq G$. Будем говорить, что однородно разложимая группа $A = \bigoplus\limits_{t \in T} A_t$ *удовлетворяет условию контрастности для типов*, если для любых двух различных типов $t_1, t_2 \in T$ выполняется $\pi(A_{t_1}) \cap \pi(A_{t_2}) = \varnothing$.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Однородно разложимая группа A транзитивна тогда и только тогда, когда каждая ее однородная компонента транзитивна и A удовлетворяет условию контрастности для типов.*

Теорема 2. *Всякая однородно разложимая транзитивная группа является вполне транзитивной.*

Теорема 3. *Для любого бесконечного кардинального числа α существует однородно разложимая вполне транзитивная группа A, не являющаяся транзитивной такая, что одна из однородных компонент группы A имеет мощность α.*

Теорема 4. *Пусть A — прямая сумма однородных сепарабельных групп. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — транзитивная группа;*

2) *A — вполне транзитивная группа;*

3) *A — удовлетворяет условию контрастности для типов.*

Получены также критерии транзитивности произвольной сепарабельной группы, а также **K**-прямых сумм групп из различных классов (в частности, прямых произведений таких групп).

Литература

[1] *Hill P.* On transitive and fully transitive primary groups / P. Hill // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — V.22. — P. 414-418.

[2] *Hausen J.* E-transitive torsion-free abelian groups / J. Hausen // J. Algebra. — 1987. — No.1. — P. 17-27.

[3] *Dugas M., Shelah S.* E-transitive groups in L / M. Dugas, S. Shelah // Contemp. Math. — 1989. — V.87. — P. 191-199.

[4] *Henecce G., Strungmann L.* Transitivity and full transitivity for p-local modules / G. Henecce, L. Strungmann // Arch. Math. — 2000. — V.74. — P. 321-329.

[5] *Крылов П.А.* Сильно однородные абелевы группы без кручения / П.А. Крылов // Сиб. матем. журн. — 1983. — №2. — С. 77-84.

[6] *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность. / С.Я. Гриншпон // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т.8, Вып. 2. — С. 407-473.

[7] *Чехлов А.Р.* Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения / А.Р. Чехлов // Матем. заметки. — 1989. — Т.46, №3. — С. 93-99.

[8] *Мисяков В.М.* О вполне транзитивности редуцированных абелевых групп / В.М. Мисяков // Абел. группы и модули. — 1994. — Вып. 11-12. — С. 134-156.

Гомоморфная устойчивость абелевых групп и вполне транзитивность

Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А. (Томск)

Определение [1–2]. Группа A называется *гомоморфно устойчивой относительно группы* B, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, то есть если

$$\bigcup_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha \quad \text{— подгруппа группы } B.$$

В [1] и [2] полностью решен вопрос о гомоморфной устойчивости прямых сумм абелевых групп, вполне разложимых и жестких групп. Также исследована гомоморфная устойчивость произвольных абелевых групп относительно прямых произведений.

Рассмотрим однородные вполне транзитивные абелевы группы. Напомним соответствующие определения.

Абелева группа без кручения называется *однородной*, если все ее ненулевые элементы имеют один и тот же тип [3].

Редуцированная абелева группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов g_1, g_2 таких, что $\chi(g_1) \leqslant \chi(g_2)$, существует эндоморфизм η группы G, такой что $\eta g_1 = g_2$.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Любая однородная вполне транзитивная группа гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы.*

Следствие 1. *Прямая сумма однородных вполне транзитивных групп гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы.*

Пусть A и B — абелевы группы, причем B — группа без кручения. Обозначим через $\chi(A, B)$ множество характеристик всех ненулевых элементов вида ηa, где $\eta \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $a \in A$. Множество $\chi(A, B)$ является частично упорядоченным относительно естественного порядка на множестве характеристик.

Получены следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть B — однородная вполне транзитивная группа идемпотентного типа. Группа A является гомоморфно устойчивой относительно группы B тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если $\chi(A, B) \neq \varnothing$, то множество $\chi(A, B)$ содержит наименьшую в этом множестве характеристику.*

Следствие 2. *Всякая абелева группа гомоморфно устойчива относительно любой p-локальной вполне транзитивной группы (p – некоторое простое число).*

Литература

[1] *Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы / С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова // Вестник ТГУ. — 2003. — №280. — С. 31-33.

[2] *Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А.* Гомоморфные образы абелевых групп / С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова // Фундаментальная и прикладная математика (в печати).

[3] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2.

Факторно делимые группы ранга 1

Давыдова О.И. (Москва)

В работе [2] А.А. Фомин и У. Уиклесс определили смешанные факторно делимые группы конечного ранга без кручения и доказали, что категории смешанных факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга, с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов, двойственны. Целью данного исследования является описание факторно делимых смешанных групп ранга 1. Основным результатом является теорема 2.

Если M — подмножество группы A, то через $\langle M\rangle_*$ будем обозначать сервантную оболочку множества M в группе A, т. е. $a \in \langle M\rangle_*$ тогда и только тогда, когда найдется такое натуральное m, что $ma \in \langle M\rangle$. Остальные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [1].

Определение 1. Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число такое, что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A. Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Последовательность

$$(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots)$$

называется *кохарактеристикой* элемента a в группы A и обозначается $cochar(a)$. Тип, содержащий последовательность (m_p), называется *котипом* элемента a и обозначается $cotype(a)$.

Определение 2. Кохарактеристикой факторно делимой группы A ранга 1 будем называть кохарактеристику любого ее базисного элемента (т. е. такого элемента $x \in A$, что $A/\langle x\rangle$ — делимая периодическая группа) и обозначать $cochar(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисным элементом x, B — произвольная факторно делимая группа и $y \in B$. Если $cochar_A(x) \geqslant cochar_B(y)$, то существует единственный такой гомоморфизм $f\colon A \to B$, что $f(x) = y$.*

Следствие 1. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисом $\{x\}$. Для любого элемента $y \in A$ существует единственный эндоморфизм f_y такой, что $f(x) = y$.*

Следствие 2. *Факторно делимая группа A ранга 1 изоморфна своей группе эндоморфизмов.*

Для элементов y, z факторно делимой группы A ранга 1 определим произведение элементов y и z следующим образом $yz = f_y(z)$.

Теорема 2. *Две факторно делимые группы ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда их кохарактеристики равны.*

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Для каждого простого числа p построим кольцо K_p, где $K_p = Z/p^{m_p}Z$, если $0 \leqslant m_p < \infty$ и $K_p = \widehat{Z}_p$, если $m_p = \infty$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} K_p$, которое называется кольцом (целых) χ-адических чисел. Если $[\chi] \neq 0$, то определим кольцо $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subset \mathbb{Z}\chi$. Если $[\chi] = 0$, то определим кольцо $R^\chi = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}\chi$.

Теорема 3. *Если A — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики χ, то A изоморфна аддитивной группе кольца R^χ, а ее кольцо эндоморфизмов $E(A)$ изоморфно кольцу R^χ.*

Следствие 3. *Факторно делимая группа A ранга 1 является коммутативным кольцом с единицей, относительно введенной выше на ней операции умножения.*

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1. — 1977. — Т.2.

[2] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible abelian groups / A. A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — P. 45–52.

Строение делимых и инъективных модулей над csp-кольцами

Зиновьев Е.Г. (Томск)

В теории абелевых групп в связи с изучением одного важного класса смешанных групп, а именно sp-групп, возникло понятие sp-кольца. sp-группа (от слов «сумма» и «произведение») — это смешанная группа, лежащая между суммой и произведением своих p-компонент с некоторыми дополнительными свойствами. Всякая sp-группа является модулем над некоторым кольцом псевдорациональных чисел. Кольца псевдорациональных чисел ввели А.А. Фомин и П.А. Крылов [1–3]. Обобщениями колец псевдорациональных чисел являются *csp*-кольца.

Пусть P — некоторое бесконечное множество простых чисел. Для каждого $p \in P$ пусть $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, или $R_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ (здесь $\mathbb{Z}_{p^k}$ — кольцо вычетов по модулю p^k, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел). Положим $K = \prod\limits_{p \in P} R_p$, $T = \bigoplus\limits_{p \in P} R_p$. Подкольцо R кольца K назовем *csp-кольцом*, если $T \subset R$ и R/T — некоторое поле.

Отметим, что случай $R/T \cong \mathbb{Q}$ рассматривался в [1–5].

Определение. Пусть R — *csp*-кольцо. Модуль D_R называется *делимым*, если $rD = D$ для всех неделителей нуля $r \in R$.

Если R-модуль не содержит R/T-пространств, то такой модуль будем называть редуцированным.

Теорема 1. *Редуцированный R-модуль D делим тогда и только тогда, когда $\varepsilon_p D$ – делимый R_p-модуль для всех таких $p \in P$, что $R_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$.*

Следствие. *Пусть для всех $p \in P$ $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда каждый модуль над R делим.*

Дадим описание инъективных R-модулей. Для кольца псевдорациональных чисел теорема 2 доказана в [4].

Теорема 2. *Редуцированный R-модуль инъективен тогда и только тогда, когда он имеет вид $\prod\limits_{p \in P} C_p$, где C_p — инъективный модуль над $\mathbb{Z}_{p^k}$, если $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, либо $C_p = D_p \bigoplus A_p$, если $R_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где D_p — векторное пространство над полем p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Q}}_p$, A_p — делимый периодический $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модуль.*

Литература

[1] *Fomin A.A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers / A.A. Fomin // Trends in Math. — 1999. — P. 87-100.

[2] *Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп / П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова, Е.И. Подберезина // Вестник ТГУ, Томск. — 2000. — Т.269. — С. 29-34.

[3] *Крылов П.А.* Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп / П.А. Крылов // Сиб. матем. ж. — 2002. — Т.43, №1. — С. 108-119.

[4] *Чеглякова С.В.* Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел / С.В. Чеглякова // Фундаментальная и прикладная математика. — 2001. — Т.7, №2. — С. 627-629.

[5] *Царев А.В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел / А.В. Царев // Математические заметки (в печати).

[6] *Зиновьев Е.Г.* Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел / Е.Г. Зиновьев // Вестник ТГУ, Томск. — 2006. — Т.290. — С. 46-47.

О редуцированной абелевой группе, имеющей регулярный центр кольца эндоморфизмов

Карпенко А.В. (Томск)

Данное исследование продолжает изучать проблему 16 [1], связанную с описанием абелевых групп, имеющих регулярный центр кольца эндоморфизмов.

Пусть далее G — абелева группа, $E(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G, $C(E(G))$ — центр кольца $E(G)$, $T(G)$ — периодическая часть группы G, G_p — p-компонента $T(G)$. Напомним, что кольцо F называется регулярным, если для каждого $x \in F$ существует $y \in F$, такое что $xyx = x$.

Мы рассматриваем случай смешанной редуцированной группы G, такой что размерность Q-векторного пространства $G/T(G)$ имеет конечный ранг.

Определение. Пусть ранг группы без кручения G равен n. Подмножество $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq G$, такое что $\{x_1 + T(G), \ldots, x_n + T(G)\}$ — это Q-базис для $G/T(G)$, будет называться *максимальным независимым множеством* в G.

Если $R = C(E(G))$, тогда R_p, p-компонента R, может быть естественно определена на $E(G_p)$. Поскольку ограничение отображения λ на $T(G)$ — мономорфизм из R в $E(T(G))$, то $R \subseteq \prod R_p$.

Поскольку каждое $\lambda \in R$ индуцирует Q-линейное преобразование $\overline{\lambda}$ на $\overline{G}$, то определим кольцевой антигомоморфизм $\mu = \mu_X \colon R \to M_n(Q)$ по правилу $\mu(\lambda) = [mat(\overline{\lambda})_X]^t$, где $[mat(\overline{\lambda})_X]^t$ — транспонированная матрица индуцированная отображением $\overline{\lambda}$ относительно базиса X.

Для максимального независимого множества $X \subseteq G$ пусть X_p — это Z/pZ-подпространство G_p, порождённое $\{x_{1p}, \ldots, x_{np}\}$.

Множество X называется строго порождённым [2], если $X_p = G_p$ для почти всех простых p. Множество X называется строго независимым [2], если $\{x_{1p}, \ldots, x_{np}\}$ — это независимое подмножество Z/pZ-векторного пространства G_p для почти всех простых p.

Теорема 1. *Пусть G — редуцированная смешанная группа, такая что $G/T(G)$ — делимая группа без кручения конечного ранга, причем $\bigoplus G_p \subseteq G \subseteq \prod G_p$ и допустим, что X — строго порождённое множество для некоторого максимального множества $X \subseteq G$. Тогда R регулярно тогда и только тогда, когда $A = im(\mu)$ регулярно.*

Следствие 2. *Пусть G — редуцированная смешанная группа, такая что $G/T(G)$ — делимая группа без кручения конечного ранга, причем $\bigoplus G_p \subseteq G \subseteq \prod G_p$. Если X — строго порождённое и строго независимое, тогда $R = C(E(G))$ — регулярно.*

Литература

[1] *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А.Туганбаев — Томск: Томский государственный университет. — 2002. — 464 с.

[2] *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups / S.Glaz, W.Wickless // Communications in Algebra. — 1994. — N.22(4). — P. 1161-1176.

Характеризации больших абелевых групп без кручения для некоторых классов K

Катеринчук О.М. (Томск)

Пусть K — некоторый класс абелевых групп. Группу A назовем большой относительно K или K-большой, если для любых групп $B_i \in K$

($i \in I$, I — некоторое индексное множество) выполняется равенство

$$\mathrm{Hom}\big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\big) = \mathrm{Hom}\big(A, \prod_{i\in I} B_i\big). \tag{1}$$

Равенство (1) равносильно тому, что для всякого гомоморфизма $\omega\colon A \to \prod\limits_{i\in I} B_i$ выполняется включение $\omega A \subseteq \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, т. е. $\omega\colon A \to \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$.

Пусть T — произвольное бесконечное множество простых чисел. Введем следующие классы групп без кручения: $K = \{Z(p) \mid p \in T\}$, $K_1 = \{B_p \mid B_p$ — некоторая редуцированная p-группа, $p \in T\}$. Для группы X положим $\pi(X) = \{p \mid p$ — простое число и $pX \neq X\}$.

Лемма. *Пусть существует гомоморфизм $\varphi\colon A \to \prod\limits_{p\in T} Z(p^{m_p})$ такой, что $\varphi A \not\subset \bigoplus\limits_{p\in T} Z(p^{m_p})$, где m_p — некоторое натуральное число для каждого $p \in T$. Тогда существует гомоморфизм $\psi\colon A \to \prod\limits_{p\in T} Z(p)$ такой, что $\psi A \not\subset \bigoplus\limits_{p\in T} Z(p)$ (то есть A не K-большая группа).*

Теорема 1. *Группа A без кручения является K_1-большой тогда и только тогда, когда она K-большая.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A — K_1-большая. Нужно доказать, что группа A — K-большая, $K = \{Z(p) \mid p \in T\}$. Допустим, что существует гомоморфизм $\varphi\colon A \to \prod\limits_{p\in T} Z(p)$ такой, что $\varphi A \not\subset \bigoplus\limits_{p\in T} Z(p)$. Вложение $Z(p) \to B_p$ всегда существует, поэтому существует гомоморфизм $\varphi\colon A \to \prod\limits_{p\in T} B_p$ такой, что $\varphi A \not\subset \bigoplus\limits_{p\in T} B_p$, что противоречит условию, значит группа A — K-большая.

Достаточность. Предположим, что A — K-большая группа. Допустим, что существует гомоморфизм $\varphi\colon A \to \prod\limits_{p\in T} B_p$ такой, что $\varphi A \not\subset \bigoplus\limits_{p\in T} B_p$. Следовательно, существует элемент $a \in A$ такой, что $\varphi(a) \notin \bigoplus\limits_{p\in T} B_p$. Можно записать $\varphi(a) = (x_p)_{p\in T}$, где $x_p \in B_p$ для каждого $p \in T$. Обозначим через τ проекцию $\prod\limits_{p\in T} B_p \to B_p$, $p \in T$.

Далее, пусть X — сервантная подгруппа в A, порожденная элементом a, $X = \langle a \rangle_*$. Возьмем еще ограничение φ' гомоморфизма φ на X.

Если для какого-то $p \in T$ $x_p \neq 0$, то гомоморфизм $\tau\varphi' \colon X \to B_p$ отличен от нуля $((\tau\varphi')(a) = x_p)$. Имеем, X — группа без кручения ранга 1, B_p — редуцированная p-группа и существует ненулевой гомоморфизм $\alpha \colon X \to B_p$. Откуда $X/\operatorname{Ker}\alpha$ есть ненулевая редуцированная p-группа. Учитывая строение факторгруппы $X/\operatorname{Ker}\alpha$ [1], получаем $pX \neq X$. Нашли, что $\pi(X) \cap T$ — бесконечное множество. Ввиду критерия из [2] группа A не является K-большой, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Введем еще один класс M групп без кручения,

$$M = \{J_p \mid J_p \text{ — группа целых } p\text{-адических чисел, } p \in T\}.$$

Теорема 2. *Для группы A без кручения следующие утверждения эквивалентны:*

1) *A — K-большая;*

2) *A — M-большая;*

3) *$\pi(X) \cap T$ — конечное множество для любой сервантной подгруппы X ранга 1 группы A.*

Литература

[1] *Arnold D.M.* Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings / D.M. Arnold — Springer-Verlag. — Berlin–Heidelberg–New York, 1987.

[2] *Катеринчук О.М.* Некоторые свойства K-больших абелевых групп / О.М. Катеринчук // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума (Бийск, 22-25 августа 2005 г.) — Бийск: РИО БГПУ им. В.М.Шукшина, 2005. — С. 22.

Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с элементарным фактором

Кожухов С.Ф., Тверетин А.С. (Сургут)

Абелева группа без кручения конечного ранга называется *квазиразложимой*, если она содержит разложимую в прямую сумму подгруппу такую, что фактор-группа по ней конечна. В противном случае группа называется сильно неразложимой. Любая квазиразложимая группа G конечного ранга обладает такими подгруппами $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, что каждая подгруппа A_i сильно неразложима и сервантна в G, а фактор-группа $G/A = T$ — конечная группа. Всякая такая подгруппа A называется *полным квазиразложением* группы G. Известно [1], что если группы A_i, $i = 1, \ldots, n$, образуют жёсткую систему (в том смысле, что $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$), то группа A будет единственным полным квазиразложением группы G. Следовательно, фактор-группа также определяется однозначно.

Естественно поставить вопрос о количестве различных групп G с фиксированным полным квазиразложением A и фиксированной группой T. В [1] определено количество выше указанных групп G в случае, когда группа A является вполне разложимой (такая группа G называется почти вполне разложимой), а группа T — циклическая группа порядка p^m. В данной работе изучается вопрос о количестве групп G в случае, когда A по-прежнему вполне разложима, а T — элементарная p-группа ранга k, т. е. $T \cong \bigoplus_{k} Z(p)$.

Пусть

$$\tau(p, n, k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p^{n-j} - 1}{p^{k-j} - 1}.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема. *Общее количество с точностью до равенства почти вполне разложимых групп ранга n, для которых фактор-группа G/A (A — квазиразложение G) изоморфна элементарной p-группе ранга k, равно*

$$S_{pnk} = \tau(p, n, k) - n\tau(p, n-1, k-1) -$$
$$- \sum_{i=2}^{k} (C_n^i - C_n^{i-1})\tau(p, n-i, k-i) + C_n^{k+1}.$$

Литература

[1] *Кожухов С.Ф.* Конечные группы автоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга / С.Ф. Кожухов // Известия АН СССР, серия математическая. — 1988. — Т.52, №3. — С. 501-521.

[2] *Кожухов С.Ф., Тверетин А.С.* Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с циклическим фактором / С.Ф. Кожухов, А.С. Тверетин // Абелевы группы: Труды всероссийского симпозиума (Бийск, 2005 г.) — Бийск: РИО БПГУ им. В.М.Шукшина. — 2005. — С. 24-25.

Об определяемости абелевых $EndE^{+}$-групп своими группами эндоморфизмов

Коленова Е.М. (Н. Новгород)

В данной работе решена задача определяемости абелевой группы своей группой эндоморфизмов для делимой $EndE^{+}$-группы в классах периодических групп, делимых групп, классе всех абелевых групп; и для нередуцированной $EndE^{+}$-группы — в классе нередуцированных групп, в классе всех абелевых групп.

Пусть $D(A)$ — делимая часть группы A, тогда $A = D(A) \bigoplus R(A)$; назовем дополнительное прямое слагаемое $R(A)$, определенное с точностью до изоморфизма, *редуцированной частью* группы A. *Нередуцированной группой* будем называть группу $A = D(A) \bigoplus R(A)$, где делимая $D(A)$ и редуцированная $R(A)$ части ненулевые.

Определение. Будем говорить, что абелева группа A *определяется своей группой эндоморфизмов* в некотором классе абелевых групп Ω, если для всякой группы B из Ω, такой, что $End(B) \cong End(A)$, имеет место изоморфизм $B \cong A$.

Определение. Группу A будем называть *$EndE^{+}$-группой*, если ее группа эндоморфизмов удовлетворяет условию:

$$End(A) \cong End(End(A)).$$

Остальные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [1].

Теорема 1. *Делимая $EndE^{+}$-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе периодических групп.*

Теорема 2. *Делимая $EndE^{+}$-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе делимых групп.*

Теорема 3. *Делимая $EndE^+$-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она непериодическая.*

Следствие. *Если делимая $EndE^+$-группа A непериодическая, то существует нередуцированная группа B, такая, что группы $End(A)$ и $End(B)$ изоморфны, а сами группы A и B не изоморфны.*

Теорема 4. *Нередуцированная $EndE^+$-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она непериодическая.*

Теорема 5. *Нередуцированная $EndE^+$-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе нередуцированных групп.*

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974, 1977. — Т.1,2. — 336 с., 416 с.

Почти факториальные кольца

Корюкин А.Н., Себельдин А.М., Силла А.Л. (Н. Новгород)

В [1] вводится понятие сильно целостного кольца "fortement intègre" и показано, что любое факториальное кольцо сильно целостное. Оказывается, что обратное неверно.

Определение. Коммутативное кольцо с единицей, отличной от нуля называется *сильно целостным* или *почти факториальным*, если оно без делителей нуля и любые его два элемента имеют наибольший общий делитель.

Предложение 1 [1]. *Элемент почти факториального кольца прост тогда и только тогда, когда он неприводим.*

Предложение 2 [1]. *Существуют коммутативные целостные кольца не являющиеся сильно целостными.*

Предложение 3 [1]. *Факториальные кольца (ненулевые необратимые элементы однозначно разлагаются в произведение неприводимых элементов) сильно целостные.*

Предложение 4 [1]. *Почти факториальное нетеровое кольцо факториально.*

Предложение 5. *Существуют почти факториальные кольца не являющиеся факториальными.*

Литература

[1] *Fofana S.L., Sebeldine A.M., Sylla A.L.* Algèbre, Introduction à la Théorie des An-neaux / S.L.Fofana, A.M.Sebeldine, A.L.Sylla — Conakry, Editions Universitaires. — 2004.

Об одной проблеме для группы Hom(–, C)

Мисяков В.М. (Томск)

В [1] профессором С.Я. Гриншпоном сформулирована проблема 2: «Выяснить для каких групп A группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A,\ C)$ равна нулю, где C — вполне разложимая группа без кручения». В настоящих тезисах дается ответ на поставленную задачу для произвольной группы без кручения C.

Все понятия и обозначения стандартны и соответствуют [2].

Теорема. *Пусть C — произвольная ненулевая группа без кручения. Группа* $\mathrm{Hom}(A,\ C) = 0$ *тогда и только тогда, когда группа A удовлетворяет одному из следующих условий:*

I) *A — периодическая группа;*

II) *A — непериодическая группа, C — редуцированная группа, причем справедливо одно из условий:*

   1) *A — делимая группа;*

   2) *для редуцированной части $A' \neq 0$ группы A выполняется:*

      a) если $T(A') = 0$, то справедливо одно из условий:

i) i_1) для любого $f \in \mathrm{Hom}(A',\ C)$ существует $0 \neq c \in C$, $\mathrm{im}(f) \subseteq < c >$;

i_2) A' не содержит прямого слагаемого изоморфного Z;

j) для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A',\ C)$ следует:

j_1) существует сервантная подгруппа C' ранга 1 типа $t(C')$ в группе C, содержащая $\mathrm{im}(\varphi)$;

j_2) для любого элемента $a \in A'$, $t(a) < t(C')$ следует, что $a \in \ker(\varphi)$;

j_3) группа A' не содержит прямого слагаемого ранга 1 изоморфного C';

b) если $T(A') \neq 0$, то факторгруппа $A'/T(A')$ удовлетворяет условию 1) или 2)a).

Литература

[1] Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума (Бийск, 22–25 августа 2005 г.). — Бийск: РИО БПГУ им. В.М.Шукшина, 2005. — 62 с.

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974, 1977. — Т.1,2. — 336 с., 416 с.

Функции большого размаха

Савинкова М.М. (Томск)

Определение 1 [1]. Функция $P\colon N \longrightarrow N$ называется *функцией большого размаха*, если всякое число фигурирует в качестве ее значения бесконечное множество раз, т. е. если

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x)(x > y \ \&\ P(x) = z). \tag{1}$$

Согласно [1] функция $P\colon N^n \longrightarrow N$ называется *универсальной* для n аргументов, если она примитивно рекурсивна и всякая общерекурсивная функция n аргументов представляется в виде

$$P(\mu_y(Q(x_1,\ \dots x_n,\ y) = 0)), \tag{2}$$

где Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргумента, удовлетворяющая условию

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists y)(Q(x_1, \dots x_n, y) = 0),$$

а μ_y – операция минимизации.

А.А.Марковым доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 [1]. *Для того, чтобы примитивно рекурсивная функция одного аргумента была универсальной для n аргументов, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией большого размаха.*

Теорема 2 [1]. *Если P — примитивно рекурсивная функция большого размаха, то какова бы ни была частично рекурсивная функция R от n аргументов, существует примитивно рекурсивная функция Q от $n+1$ аргумента такая, что*

$$R(x) = P(\mu_y(Q(x, y) = 0)).$$

Те общерекурсивные функции, которые не примитивно рекурсивны, будем называть *сложно рекурсивными.*

Исследуя функции большого размаха, А.А.Марков поставил вопрос, который А.В. Кузнецов сформулировал в [2] следующим образом: существуют ли такие монотонно возрастающие сложно рекурсивные функции $\varphi(x)$, для которых множества значений примитивно рекурсивны?

Теорема 3 [2]. *Функция $\varphi(x) = 2_x^x$, определенная равенствами*

$$2_0^x = 2x, \quad 2_{y'}^0 = 1, \quad 2_{y'}^{x'} = 2_y^{2_{y'}^x}.$$

сложно рекурсивна.

Автором настоящих тезисов доказаны следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть функция f отображает N на N^n и π_i $(i = \overline{1, n})$ — проекция декартова произведения N^n на его i-тую компоненту. Тогда $\pi_i f$ — функция большого размаха.*

Теорема 5. *Пусть f_1 — произвольная примитивно рекурсивная функция большого размаха. Существует примитивно рекурсивная функция*

f_2 такая, что функция $\varphi\colon N \longrightarrow N^2$, где $\pi_1\varphi = f_1$, $\pi_2\varphi = f_2$, является биективным отображением N на N^2.

Составлена также программа для вычисления значений функции, предложенной А.В. Кузнецовым.

Литература

[1] *Марков А.А.* О представлении рекурсивных функций / А.А. Марков // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1949. — Т.13, №5. — С. 417-424.

[2] *Кузнецов А.В.* О примитивно рекурсивных функциях большого размаха / А.В. Кузнецов // ДАН СССР. — 1950. — Т.71, №2. — С. 233-236.

К теореме Бэра-Капланского для квадратичных абелевых групп без кручения

Самсонова Л.Н., Фарукшин В.Х. (Бийск)

Неразложимая p-локальная абелева группа без кручения ранга 2 называется квадратичной [1], если целое p-адическое число, определяющее данную группу, является квадратичной иррациональностью.

Класс конечных прямых сумм квадратичных групп обозначим через Σ_2, $T(A)$ — множество типов [1] прямых слагаемых p-ранга 1 группы A из Σ_2; $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A; для $t \in T(A)$ обозначим $A(t) = \bigoplus\limits_{s \geqslant t} A_s$, $A^*(t) = \bigoplus\limits_{s > t} A_s$, где A_s — однородная компонента типа s в прямом разложении группы A;

$$E'(A) = \{\varphi \in E(A);\ A(t)\varphi \subset A^*(t),\ t \in T(A)\}.$$

Теорема 1. *Если A и B — группы из Σ_2, кольца эндоморфизмов $E(A)$ и $E(B)$ которых изоморфны, то всякий изоморфизм $\beta : E(A) \to E(B)$ индуцируется некоторым групповым изоморфизмом $\alpha : A \to B$, т. е. $\beta : \varphi \to \alpha\varphi\alpha^{-1},\ \varphi \in E(A)$.*

Следствие 1. *Всякий автоморфизм группы из Σ_2 является внутренним.*

Теорема 2. *Центр кольца эндоморфизмов группы из Σ_2 является прямым произведением плотных подколец квадратичных полей.*

Следствие 2. *Центр кольца квазиэндоморфизмов группы из* Σ_2 *является прямым произведением квадратичных полей.*

Следствие 3. *Кольцо эндоморфизмов группы из* Σ_2 *является коммутативным тогда и только тогда, когда каждая однородная компонента группы неразложима.*

Теорема 3. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{t \in T} A_t$ *— разложение в прямую сумму однородных компонент группы* A *из* Σ_2. *Тогда*

1) *аддитивная группа* $E(A)^+$ *принадлежит классу* Σ_2*;*

2) *ниль-радикал* $N(E(A)) = E'(A)$*;*

3) *радикал Джекобсона* $J(E(A)) = E'(A) \oplus \prod\limits_{t \in T} pE(A_t)$.

Литература

[1] *Самсонова Л.Н., Фарукшин В.Х.* Квадратичные локальные абелевы группы без кручения / Л.Н. Самсонова, В.Х. Фарукшин // Абелевы группы: Труды всероссийского симпозиума (Бийск, 2005 г.) — Бийск: РИО БПГУ им. В.М.Шукшина. — 2005. — С. 21-22.

Абелевы группы, определяющиеся центром своего кольца эндоморфизмов

Себельдин А.М., Чистяков Д.С. (Н. Новгород)

Будем говорить, что абелева группа A определяется центром $CenE(A)$ своего кольца эндоморфизмов $E(A)$ в классе абелевых групп $\mathbf{X}$, если всякий раз из изоморфизма $CenE(A) \cong CenE(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, следует изоморфизм $A \cong B$. Подкласс класса $\mathbf{X}$ групп, определяющихся центром своего кольца эндоморфизмов в классе абелевых групп $\mathbf{X}$ будем обозначать через $\mathbf{X}(\mathbf{cent})$. Если $\mathbf{X}(\mathbf{cent}) = \varnothing$, то класс $\mathbf{X}$ будем называть NC-классом. Класс $\mathbf{X}$ назовем A-классом, если с каждой группой $A \in \mathbf{X}$, он содержит и прямую сумму ее копий $A_\alpha = \bigoplus_\alpha A_\alpha$ для любого кардинала α. Класс $\mathbf{X}$ назовем AB-классом, если он не является A-классом, но замкнут относительно конечных прямых сумм, то есть $A, B \in \mathbf{X}$, влечет $A \bigoplus B \in \mathbf{X}$. Положим $P(A) = \{p \in \mathbf{P} \mid pA = A\}$, где $\mathbf{P}$ — множество всех простых чисел.

Через $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{F_{cd}}$, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_n}$, $\mathbf{F_{fr}}$, $\mathbf{S}$ обозначим соответственно классы всех абелевых групп, абелевых групп без кручения, периодических абелевых групп, вполне разложимых абелевых групп без кручения, абелевых групп без кручения ранга 1, вполне разложимых абелевых групп без кручения фиксированного конечного ранга n, вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга, сепарабельных абелевых групп без кручения. Все остальные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [1], [2].

Предложение 1. *Любой A-класс является NC-классом.*

Следствие 1. *Классы $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{F_{cd}}$, $\mathbf{S}$ являются NC-классами.*

Теорема 1. *Любой AB-подкласс $\mathbf{L}(\mathbf{AB})$ класса $\mathbf{L}$ является NC-классом.*

Лемма 1. *Пусть G и H — абелевы группы без кручения ранга 1 и $\tau(G) \leq \tau(H)$. Тогда $CenE(G \bigoplus H) \cong E(G)$.*

Лемма 2. *Пусть G, H — сепарабельные абелевы группы без кручения, $r(H) = 1$ и тип группы H больше типа любого прямого слагаемого ранга 1 группы G. Тогда центр кольца $E(G \bigoplus H)$ изоморфен подкольцу E кольца $E(H)$. Причем $P(E, +) = P(G)$.*

Следствие 2. *Если G сепарабельная абелева группа без кручения, типы прямых слагаемых ранга один которой образуют связанное множество почти делимых типов, то $CenE(G) \cong R$, где R — такое рациональное кольцо, что $P(R, +) = P(G)$.*

Теорема 2. *Любые AB-подклассы $\mathbf{F_{cd}}(\mathbf{AB})$ класса $\mathbf{F_{cd}}$ и $\mathbf{S}(\mathbf{AB})$ класса $\mathbf{S}$ являются NC-классами.*

Следствие 3. *Класс $\mathbf{F_{fr}}$ является NC-классом.*

Предложение 2. *Группа A принадлежит классу $\mathbf{F_n}(\mathbf{cent})$ если она почти делима и все типы прямых слагаемых ранга 1 фиксированного разложения попарно несравнимы, либо она делимая группа.*

Следствие 4. *Класс $\mathbf{F_1}(\mathbf{cent})$ состоит в точности из почти делимых групп ранга 1.*

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М: Мир, 1974. — Т.1. — 336 с.

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М: Мир, 1977. — Т.2. — 416 с.

Абелевы нормальные подгруппы унипотентных подгрупп в группах Шевалле исключительных типов[4]

Сулейманова Г.С. (Красноярск)

В группе Шевалле $G(K)$ нормального или скрученного типа G над полем K стандартно выделяется максимальная унипотентная подгруппа $UG(K)$, [7].

В работе получено описание максимальных абелевых нормальных подгрупп группы $UG(K)$ для типов E_l $(l = 6, 7, 8)$.

Отметим, что когда K — конечное поле, среди максимальных абелевых нормальных подгрупп, как правило, имеются и абелевы подгруппы группы $UG(K)$ наивысшего возможного порядка. См. также [5] и [2, § 1 и проблема (1.6)]. Максимальные абелевы нормальные подгруппы были найдены ранее для унитреугольной группы и, тем самым, для группы $UG(K)$ типа $G = A_n$, [3]; для других типов они выявлялись при специальных ограничениях, [5], [8].

Ниже в таблице приведен список максимальных абелевых нормальных подгрупп группы $UG(K)$ для типа E_6.

[4]Работа поддержана РФФИ, код проекта 06-01-000824а.

Подгруппа	Примечания
$T(10[00]00)$, $T(00[00]01)$	
$K((01[21]21)+c(11[11]00))+T(11[10]10)$ $K((12[21]10)+c(00[11]11))+T(01[10]11)$	
$K((01[21]11)+c(11[11]00)+d(11[11]10))+$ $+K((01[21]21)+c(11[11]10))+T(11[10]11)+T(11[21]10)$ $K((11[21]10)+c(00[11]11)+d(01[11]11))+$ $+K((12[21]10)+c(01[11]11))+T(11[10]11)+T(01[21]11)$,	$c=0$ при $2K=K$ $c=0$ при $2K=K$
$K(c(11[10]10)+d(01[10]11))+K(c(11[11]10)+d(01[11]11))+$ $+K(c(11[21]10)+d(01[21]11))+$ $T(11[10]11))+T(12[21]10)+T(01[21]21)$,	$(c,d)\neq(0,0)$, а при $2K=K$ $cd=0$
$K(c_1(11[11]10)+c_2(01[11]11)+d(11[21]10))+$ $+K(c_1(11[21]10)+c_2(01[21]11))+$ $+T(11[10]11)+T(12[21]10)+T(01[21]21)$	$c_1c_2\neq 0$, $2K=0$
$K((01[21]10)+c_1(11[11]10)+c_2(01[11]11)+d(11[21]10))+$ $+K((01[21]11)+c_1(11[11]11))+K((11[21]10)+$ $+c_2(11[11]11))+K(c_1(11[21]10)+c_2(01[21]11))+$ $+T(11[21]11)+T(12[21]10)+T(01[21]21)$	$(c_1,c_2)\neq(0,0)$, $2K=0$
$K((01[21]10)+c(11[11]11))+T(11[21]10)+T(01[21]11)$	

Примечания.

1. В таблице используется специальное представление групп $UG(K)$ [4] и обозначения из [1,таблицы V-VII], в частности, α_1, $\alpha_2, \ldots$ — простые корни, причем для компактности вместо записи $e_{\begin{smallmatrix} a\,c\,d\,e\,f \\ b \end{smallmatrix}}$ используется запись $ac[db]ef$. Все коэффициенты — произвольные элементы поля K.

2. Через $T(r)$ здесь обозначается подгруппа, порожденная корневыми подмножествами, соответствующими всевозможным $s \in \{r\}^+$, где $\{r\}^+$ — совокупность $s \in G^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s-r$ через базу $\Pi(G)$.

Литература

[1] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли (главы IV–VI) / Н. Бурбаки – М.: Мир. — 1982.

[2] *Кондратьев А.С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи математических наук. — 1986. — Т.41, №1. — С. 57-96.

[3] *Левчук В.М.* Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Матем. заметки. — 1987. — Т.42, №5. — С. 631-641.

[4] *Левчук В.М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле / В.М. Левчук // Алгебра и логика. — 1990. Т.29, №2. — С. 141-161 (Ч.I); №3. — С. 315-338 (Ч.II).

[5] *Левчук В.М.* Обобщенные унипотентные подгруппы классических групп / В.М. Левчук // Фунд. и прикл. математика — 1996. — Т.2, №2. — С. 625-627.

[6] *Мальцев А.И.* Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли / А.И. Мальцев // Известия АН СССР, сер. матем. — 1945. — Т.9, №4. — С. 291-300.

[7] *Carter R.* Simple groups of Lie type / R. Carter — New York: Wiley and Sons. — 1972.

[8] *Parker C., Rowley P.* Extremal subgroups in Chevalley groups / C. Parker, P. Rowley // London Math. Soc. — 1997. — V.55, No.2. — P. 387-399.

Об одном соотношении дистрибутивности для T-радикалов

Тимошенко Е.А. (Томск)

In this work we prove that one of the distributivity laws holds for the class of idempotent radicals defined by means of a tensor product.

Говорят [1], что в категории абелевых групп задан *идемпотентный радикал* ρ, если каждой группе A сопоставлена её подгруппа $\rho(A)$ так, что для произвольного гомоморфизма групп $\varphi\colon A \to B$ справедливо включение $\varphi(\rho(A)) \subseteq \rho(B)$, причём выполнены свойства:

P1. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любой группы A.

P1*. $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любой группы A.

Для идемпотентных радикалов естественным образом вводится частичный порядок: $\rho \leq \rho'$ тогда и только тогда, когда $\rho(A) \subseteq \rho'(A)$ для любой группы A. Согласованные с этим частичным порядком пересечение и объединение произвольного семейства идемпотентных радикалов

$\{\rho_i\}_{i\in I}$ определяются так [1]:

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{i\in I}\rho_i)(A) &= \sum\big\{B\subseteq A \mid \rho_i(B)=B \text{ для любого } i\in I\big\};\\ (\bigvee_{i\in I}\rho_i)(A) &= \bigcap\big\{B\subseteq A \mid \rho_i(A/B)=0 \text{ для любого } i\in I\big\}.\end{aligned}$$

Относительно данных операций совокупность всех идемпотентных радикалов категории абелевых групп составляет полную большую решётку с нулём и единицей (эта решётка отличается от обычной тем, что рассматриваемая совокупность не образует множество).

В статье [2] для всякой группы F рассматривался $\mathrm{T}(F)$-*радикал* W_F, определяемый следующим образом: $\mathrm{W}_F(A)$ есть сумма всех подгрупп B группы A таких, что $B\otimes F=0$. Тогда W_F является идемпотентным радикалом. В той же статье было доказано (теорема 3.11), что радикальный класс идемпотентного радикала ρ (т. е. класс всех групп A, для которых $\rho(A)=A$) замкнут относительно сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда для некоторой группы F радикал ρ совпадает с $\mathrm{T}(F)$-радикалом.

По теореме 2.10 из [2] все $\mathrm{T}(F)$-радикалы категории абелевых групп образуют множество $\mathcal{L}$, являющееся дистрибутивной решёткой относительно указанного выше порядка (исходя из описания решётки $\mathcal{L}$, несложно показать, что в ней верны и бесконечные дистрибутивные законы). При этом $\mathcal{L}$ не является подрешёткой большой решётки всех идемпотентных радикалов, поскольку в $\mathcal{L}$ иначе действует операция объединения ([2], пример 2.8).

Оказывается, если рассмотреть действие операций $\wedge$ и $\vee$, описанных выше, на $\mathrm{T}(F)$-радикалы, то и в этом случае справедлив один из законов дистрибутивности. В следующей теореме символы $\wedge$ и $\vee$ обозначают операции, заданные на всей совокупности идемпотентных радикалов.

Теорема. *Для любых* $\rho_i,\sigma\in\mathcal{L}$ $(i\in I)$ *справедливо равенство*

$$(\bigvee_{i\in I}\rho_i)\wedge\sigma = \bigvee_{i\in I}(\rho_i\wedge\sigma).$$

Однако, как показывает следующий пример, обобщить это свойство не удаётся.

Пример. Пусть p, q, r — различные простые числа. Подгруппы B, C и D группы $\mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ зададим так:

$$\begin{aligned} B &= \big\{(x,0) \bigm| x \in \mathbf{Q}^{(p)}\big\}, \\ C &= \big\{(0,x) \bigm| x \in \mathbf{Q}^{(q)}\big\}, \\ D &= \big\{(x,x) \bigm| x \in \mathbf{Q}^{(r)}\big\}; \end{aligned}$$

положим $A = B + C + D$. Далее, пусть $\rho_1 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(p)}$, $\rho_2 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(q)\oplus\mathbf{Z}(r)}$ и $\sigma_1 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(q)}$, $\sigma_2 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(p)\oplus\mathbf{Z}(r)}$. Ясно, что $\rho_1(B) = B$ и $\rho_2(A/B) = A/B$, так что $(\rho_1 \vee \rho_2)(A) = A$. Аналогично получаем $(\sigma_1 \vee \sigma_2)(A) = A$ и, далее, $[(\rho_1 \vee \rho_2) \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_2)](A) = A$. С другой стороны, $(\rho_i \wedge \sigma_j)(A) = 0$ для любых i и j, поэтому $[(\rho_1 \wedge \sigma_1) \vee (\rho_1 \wedge \sigma_2) \vee (\rho_2 \wedge \sigma_1) \vee (\rho_2 \wedge \sigma_2)](A) = 0$. Итак, $(\rho_1 \vee \rho_2) \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_2) \neq (\rho_1 \wedge \sigma_1) \vee (\rho_1 \wedge \sigma_2) \vee (\rho_2 \wedge \sigma_1) \vee (\rho_2 \wedge \sigma_2)$.

Литература

[1] *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях / А.И. Кашу — Кишинёв: Штиинца. — 1983.

[2] *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы в категории абелевых групп / Е.А. Тимошенко // Фунд. и прикл. математика (в печати).

Почти Sp-локальные группы без кручения

Фарукшин В.Х. (Москва)

Обозначим через Π — множество всех простых чисел, через Z_S — локализацию кольца целых чисел Z относительно $S \subset \Pi$.

Назовем абелеву группу G без кручения *Sp-локальной группой*, если

1) $pG = G \Leftrightarrow p \in S \subset \Pi$;

2) в G найдется плотная свободная Z_S-подгруппа F такая, что G/F — делимая p-примарная группа.

Sp-локальная группа является естественным Z_S-модулем; класс Sp-локальных групп замкнут относительно сервантных подгрупп, прямых сумм, прямых слагаемых и гомоморфных образов без кручения. Если $S = \varnothing$, то класс Sp-локальных групп совпадает с классом p-примитивных групп (А.Г. Курош [1]); если $S = \Pi\backslash\{p\}$, то класс Sp-локальных групп совпадает с классом обобщенных p-примарных групп без кручения (Л.Я. Куликов [2]), в настоящей терминологии это класс p-локальных групп без кручения.

Предложение 1. *Любая Sp-локальная группа без кручения G может быть представлена в виде $G = Z_S \otimes A$, где A — p-примитивная группа без кручения, Z_S — локализация кольца Z относительно S.*

Предложение 2. *Любая Sp-локальная группа без кручения G вложима в p-адическое пополнение $\widehat{G}$ в качестве плотной в p-адической топологии p-сервантной Z_S-подгруппы.*

Если X — p-базис Sp-локальной группы без кручения G конечного ранга $m+n$, p-ранга n и Y — дополнение X до м. л. н. с. элементов, то $[Y] = A \cdot [X]$ в группе $\widehat{G}$. Матрица A с p-адическими элементами называется p-адической матрицей группы G. Определим отношение $\sim$ на множестве p-адических $m \times n$-матриц: $A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow \exists T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ — обратимая рациональная $(m+n) \times (m+n)$-матрица такая, что

$$A_2(T_1 + T_2 A_1) = T_3 + T_4 A_1.$$

Заметим, что $T_1 + T_2 A_1$ будет также обратимой матрицей.

Предложение 3. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Класс эквивалентности назовем *типом* p-адической матрицы A или *p-типом* Sp-локальной группы G с p-адической матрицей A.

Абелеву группу без кручения назовем *почти Sp-локальной группой*, если она квазиизоморфна Sp-локальной группе.

Теорема 4. *Две почти Sp-локальные группы без кручения конечного ранга квазиизоморфны в том и только в том случае, если p-адические матрицы квазиизоморфных им Sp-локальных групп определяют один тип.*

Следствие 5. *Пусть $A = [a_i]$ и $B = [b_i]$ — p-адические матрицы Sp-локальных групп G_1 и G_2 p-ранга 1, ранга $m+1$. Тогда G_1 квазиизоморфна G_2 в том и только в том случае, если найдется обратимая рациональная матрица $T = (t_{ij})$ такая, что для любого индекса*

$i = 1, \ldots, m$

$$b_i = \frac{t_{i1} + \sum_{j=1}^{m} a_j\, t_{i,j+1}}{t_{11} + \sum_{j=1}^{m} a_j\, t_{1,j+1}}.$$

Следствие 6. *Если a и b — p-адические числа, определяющие Sp-локальные группы G_1 и G_2 p-ранга 1, ранга 2, то G_1 квазиизоморфна G_2 в том и только в том случае, если найдутся рациональные числа α, β, γ, δ такие, что*

$$b = \frac{\alpha + \beta a}{\gamma + \delta a}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Литература

[1] *Kurosch A.* Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range / A. Kurosch // Ann. Math. — 1937. — Vol.38, No.1. — Z. 175-203.

[2] *Куликов Л.Я.* Обобщенные примарные группы / Л.Я. Куликов // Труды Моск. матем. об-ва. — 1952. — Т.1. — С. 247-326; 1953. — Т.2. — С. 85-167.

Об одном способе задания пары взаимно двойственных групп

Фомин А.А. (Москва)

Для характеристики $\chi = (m_p)$ определим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $m_p < \infty$ и $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, если $m_p = \infty$.

$\mathbb{Z}_\chi$ является циклическим конечно представимым модулем над кольцом $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$ для каждой характеристики χ.

Теорема 1 [1]. *Всякий конечно представимый $\widehat{\mathbb{Z}}$-модуль N однозначно представляется в виде $N \cong \mathbb{Z}_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{\chi_k}$, где $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_k$. Для всякого конечно порожденного подмодуля M модуля N оба модуля M и N/M являются конечно представимыми.*

Рассмотрим свободную и делимую абелевы группы с общим базисом:

$$F = \mathbb{Z}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}x_n \subset V = \mathbb{Q}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}x_n.$$

Пусть $\alpha_1 = \frac{a_1}{m} + \mathbb{Z}, \ldots, \alpha_n = \frac{a_n}{m} + \mathbb{Z}$ — элементы группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Положим $y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \frac{1}{m}(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) \in V$. Целые числа $a_1, \ldots, a_n$ определены с точностью до слагаемых кратных m, элемент y определен с точностью до слагаемого из группы F, группа $\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle \subset V$ определена однозначно набором $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Любой набор элементов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ любого конечно представимого модуля N над кольцом $\widehat{\mathbb{Z}}$ однозначно задает две взаимно двойственные группы в смысле двойственности [2]. Вначале мы рассматриваем подмодуль $M = \langle x_1^0, \ldots, x_n^0\rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ модуля N, порожденный этими элементами. По теореме 1 модуль M также является конечно представимым. Затем применяем следующую теорему.

Теорема 2. *Любой конечный набор (возможно с повторениями) элементов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ любого конечно представимого $\widehat{\mathbb{Z}}$-модуля M, порождающий этот модуль над кольцом $\widehat{\mathbb{Z}}$, $M = \langle x_1^0, \ldots, x_n^0\rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}}$, определяет две абелевы группы A и A^* со множеством элементов $x_1, \ldots, x_n \in A$ и $x_1^*, \ldots, x_n^* \in A^*$ следующим образом.*

Группа без кручения A расположена между свободной и делимой группами

$$\mathbb{Z}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}x_n \subset A \subset \mathbb{Q}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}x_n$$

и порождена всеми элементами вида $f(x_1^0)x_1 + \ldots + f(x_n^0)x_n$, где f пробегает все $\widehat{\mathbb{Z}}$-модульные гомоморфизмы $f\colon M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, т. е.

$$A = \langle f(x_1^0)x_1 + \ldots + f(x_n^0)x_n \mid f \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\rangle.$$

Произвольные элементы $d_1, \ldots, d_n$ выбираются в некоторой делимой группе без кручения D так, чтобы множество элементов

$$x_1^* = x_1^0 + d_1, \ldots, x_n^* = x_n^0 + d_n$$

группы $M \oplus D$ было бы линейно независимым над $\mathbb{Z}$. Тогда факторно делимая группа A^*, определяется как сервантная оболочка этих элементов в группе $M \oplus D$, т. е. $A^* = \langle x_1^*, \ldots, x_n^*\rangle_* \subset M \oplus D$.

Для любой группы без кручения конечного ранга A с максимальной линейно независимой системой элементов $x_1, \ldots, x_n$ (факторно делимой группы A^* с базисом $x_1^*, \ldots, x_n^*$) существует конечно представимый $\widehat{\mathbb{Z}}$-модуль M с системой образующих $x_1^0, \ldots, x_n^0$ так, что группа A (группа A^*) определяется указанным выше способом.

Соответствие $A^* = d'(A)$ и $A = d(A^*)$ являются функторами, определяющими двойственность между категориями $\mathcal{QD}$ и $\mathcal{QTF}$, введенную в [2].

Под сервантной оболочкой элементов $x_1^*, \ldots, x_n^*$ понимается подгруппа, состоящая их всех элементов y таких, что $my = m_1x_1^* + \ldots + m_nx_n^*$ для некоторых целых чисел $m, m_1, \ldots, m_n$ и $m \neq 0$.

Литература

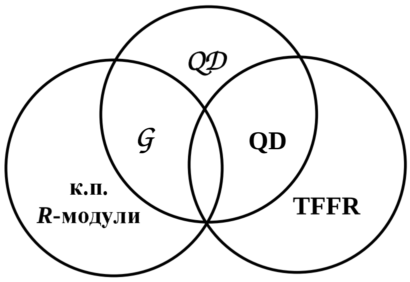
[1] *Fomin A.A.* Finitely presented modules over the ring of universal numbers / A.A. Fomin // Comtemp. Math. — 1995. — V.171. — P. 109-120.

[2] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible abelian groups / A.A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — 45-52.

Группы без кручения конечного ранга, факторно делимые группы и конечно порожденные R-модули

Царев А.В. (Рязань)

В работа рассматриваются три тесно связанные между собой класса:



TFFR — класс групп без кручения конечного ранга,

$\mathcal{QD}$ — класс факторно делимым смешанных групп и

класс конечно порожденных модулей над кольцом псевдорациональных чисел.

Группы без кручения конечного ранга пристально изучаются с 30-х годов прошлого века. Им посвящено огромное количество работ, некоторые из которых освещены в известной монографии Л. Фукса [1]. Факторно делимые смешанные группы впервые были рассмотрены А.А. Фоминым и У. Уиклессом в 1998 году [2]. Они доказали, что категория, объектами которой являются факторно делимые смешанные группы, а морфизмами — квазигомоморфизмы, двойственна категории групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. Факторно делимые группы изучались и ранее, так, например, пересечение классов

TFFR и $\mathcal{QD}$ это в точности класс факторно делимых групп без кручения конечного ранга (QD), впервые рассмотренный Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в 1961 году [3]. Последнее время в работах ведущих специалистов по теории абелевых групп часто встречается класс $\mathcal{G}$, введенный С. Глаз и У. Уиклессом в 1994 году [4]. Группы из этого класса являются примерами смешанных факторно делимых групп. В работах [5–7] А.А. Фомин и П.А. Крылов показали, что к данным классам групп очень «близок» класс конечно порожденных модулей над кольцом псевдорациональных чисел (в частности, все группы из класса $\mathcal{G}$ являются E-модулями над этим кольцом).

Определение 1. Группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу конечного ранга F, что G/F — периодическая делимая группа.

Класс $\mathcal{G}$ состоит из всех факторно делимых групп, p-адическое пополнение которых конечно для любого простого p. Существуют и другие эквивалентные определения класса $\mathcal{G}$ (например, с помощью свойства *самомалости*).

Пусть $\widehat{Z}_p$ — это кольцо целых p-адических чисел. Рассмотрим кольцо $\widehat{Z} = \prod\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$, где P — множество всех простых чисел, которое часто называют кольцом *универсальных чисел.* В этом кольце построим подкольцо, сервантно порожденное единицей кольца и идеалом $T = \bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$.

Определение 2. Кольцо $R = \langle\, 1,\, T\,\rangle_* \subset \widehat{Z}$ называется кольцом *псевдорациональных чисел.*

Пусть ε_p — единица кольца $\widehat{Z}_p$. Через ε будем обозначать всевозможные конечные суммы вида $\varepsilon_{p_1} + \ldots + \varepsilon_{p_n}$.

Будем говорить, что конечно порожденный R-модуль M раскладывается в *псевдопрямую сумму* своих подмодулей M_1 и M_2 (и писать $M = M_1 \widetilde{\oplus} M_2$), если $(1-\varepsilon)M = (1-\varepsilon)M_1 \oplus (1-\varepsilon)M_2$ для некоторого $\varepsilon \in R$. Модуль, имеющий только тривиальные псевдопрямые разложения, будем называть *почти неразложимым.* Если $(1-\varepsilon)M \cong (1-\varepsilon)L$ при некотором $\varepsilon \in R$, то M и L будем называть *псевдоизоморфными.*

Теорема 1. *Два конечно порожденных R-модуля квазиизоморфны* *тогда и только тогда, когда они отличаются (с точностью до изоморфизма) конечными прямыми слагаемыми.*

Следствие 1. *Если конечно порожденный R-модуль раскладывается в прямую сумму циклических модулей, то квазиизоморфный ему модуль тоже раскладывается в прямую сумму циклических модулей.*

Следствие 2. *Любая почти вполне разложимая группа из класса $\mathcal{G}$ является вполне разложимой.*

Теорема 2. *Пусть для конечно порожденного R-модуля*

$$M = M_1 \mathbin{\widetilde{\oplus}} \ldots \mathbin{\widetilde{\oplus}} M_n = L_1 \mathbin{\widetilde{\oplus}} \ldots \mathbin{\widetilde{\oplus}} L_m,$$

где все R-модули M_j и L_i почти неразложимы. Тогда $m = n$ и при подходящей перенумерации M_j псевдоизоморфен L_j для всех j.

Хорошо известно, что в группах без кручения конечного ранга существуют «аномальные» прямые разложения, т. е. для прямых разложений не выполняется теорема Крулля-Ремака-Шмидта. Однако, если в качестве морфизмов здесь рассматривать квазигомоморфизмы, то для квазипрямых разложений теорема КРШ будет верна [8]. Точно такая же ситуация наблюдается и в классе факторно делимых смешанных групп. Не трудно убедится, что в классе конечно порожденных R-модулей теорема КРШ не выполняется ни для прямых, ни для квазипрямых разложений. Но по теореме 2 она выполняется для псевдопрямых разложений.

Некоторые другие результаты о разложении в прямую сумму для конечно порожденных R-модулей и факторно делимых смешанных групп приводятся в [9].

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1; 1977. — Т.2.

[2] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible abelian groups / A.A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — P. 45-52.

[3] *Beaumont R., Pierce R.* Torsion-free rings / R. Beaumont, R. Pierce // Ill. J. Math. — 1961. — V.5. — P. 61-98.

[4] *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups / S. Glaz, W. Wickless // Comm. in Alg. — 1994. — V.22. — P. 1161-1176.

[5] *Fomin A.A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers / A.A. Fomin // Abelian Groups and Modules, Trends in Mathematics (Birkhaeuser Verlag Basel/Switzerland) — 1999. — P. 87-100.

[6] *Fomin A.A.* Quotient divisible mixed groups / A.A. Fomin // Contemp. Math. — 2001. — V.273. — P. 117-128.

[7] *Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп / П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова, Е.И. Подберезина // Вестник ТГУ, Томск. — 2000. — Т.269. — С. 29-34.

[8] *Jonsson B.* On direct decompositions of torsion-free abelian groups / B. Jonsson // Math. Scand. — 1957. — V.7. — P. 230-235.

[9] *Царев А.В.* Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторноделимые группы / А.В. Царев // Алгебра и анализ — 2006. — Т.18, №4. — С. 198-214.

Абелевы группы, подгруппы которых являются идеалами

Чехлов А.Р. (Томск)

Описанию подгрупп абелевой группы A, являющихся идеалами в каждом кольце (не обязательно ассоциативном и с единицей), заданном на A, посвящена статья [1].

Обозначим через $I(A)$ — идеал кольца эндоморфизмов $E(A)$, группы A, порожденный (как подгруппа) всеми гомоморфными образами группы A в аддитивную группу $E(A)^+$ кольца $E(A)$, т. е.

$$I(A) = \langle\, \varphi A \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(A, E(A)^+)\,\rangle.$$

Теорема 1 [1]. *Подгруппа C группы A служит идеалом в каждом кольце на группе A тогда и только тогда, когда C является $I(A)$-допустимой, т. е. $I(A)C \subseteq C$.*

Результаты [1] отражены в 17 главе книги [2].

Пусть M — класс всех абелевых групп A, каждая подгруппа которых является идеалом в любом кольце, заданном на A. Непосредственно из теоремы 1 следует, что группа $A \in M$ тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа $I(A)$-допустима. Поэтому если все подгруппы группы A вполне характеристичны, то $A \in M$. Ясно, что нильгруппы лежат в классе M. Следовательно, каждая группа без кручения ранга 1 неидемпотентного типа принадлежит классу M; делимая группа содержится в классе M тогда и только тогда, когда она является периодической. Прямые слагаемые группы $A \in M$ также принадлежат классу M.

Теорема 2. 1) *Нередуцированная p-группа, с ненулевой редуцированной частью, не принадлежит классу M.*

2) *Если группа A имеет прямое слагаемое, изоморфное аддитивной группе целых чисел Z, то $A \cong \mathrm{Z}$.*

3) *Если $A = D \oplus B$, где D — делимая периодическая группа, а B не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, то $A \in M$ тогда и только тогда, когда $B \in M$ и является вполне характеристической подгруппой в A.*

4) *Если A — редуцированная смешанная группа из M, то любая ее p-компонента A_p — циклическая группа, причем при $A_p \neq 0$ фактор-группа A/A_p является p-делимой.*

Теорема 3. 1) *Редуцированная периодическая группа принадлежит классу M тогда и только тогда, когда все ее p-компоненты являются циклическими группами.*

2) *Пусть A — редуцированная расщепляющаяся смешанная группа, $A = T \oplus R$, где T — периодическая часть группы A; $A \in M$ тогда и только тогда, когда $T, R \in M$, причем $pR = R$, если $T_p \neq 0$.*

3) *Редуцированная вполне разложимая (сепарабельная) группа без кручения $A \in M$ тогда и только тогда, когда $A \cong \mathrm{Z}$, либо каждое ее прямое слагаемое ранга 1 имеет неидемпотентный тип.*

Литература

[1] *Fried E.* On the subgroups of the abelian group that are ideals in every ring / E. Fried // Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest. — 1964. — P. 51-55.

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2 — 416 с.

Эндоморфные абелевы группы без кручения ранга 3

Чистяков Д.С. (Н. Новгород)

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и N — левый R-модуль. Множество

$$M_R(N) = \{\, f\colon N \to N \mid f(rx) = rf(x),\ r \in R,\ x \in N \,\}$$

является почтикольцом относительно операций сложения и композиции отображений и содержит кольцо $E_R(N)$ всех эндоморфизмов R-модуля N.

R-модуль N *эндоморфен*, если $M_R(N) = E_R(N)$ [1].

Будем называть абелеву группу *эндоморфной*, если она является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов.

Непустое подмножество A в группе G называется *сильно $E(G)$-сервантным*, если $0 \neq \varphi(g) \in A$ влечет $g \in A$ для всех $\varphi \in E(G)$, $g \in G$.

Кроме того, A является *сильно $E(G)$-замкнутым*, если для любых $\varphi \in E(G)$, $a \in A$ следует, что $\varphi(a) \in A$ [1].

Теорема 1. *Пусть G — сильно неразложимая группа без кручения ранга 3, такая что $G \neq Soc\, G$. Группа G не является эндоморфной тогда и только тогда, когда $dim\, \mathcal{E}(G) = 2$.*

Подгруппа A группы G называется *сервантным подмодулем* в G, если всякое уравнение вида $\varphi x = a$, где $\varphi \in E(G)$, $a \in A$, имеющее решение $x = g$ в G, имеет решение и в A.

Следствие 1. *Сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3, не совпадающая со своим псевдоцоколем, эндоморфна тогда и только тогда, когда она не содержит сервантных подмодулей.*

Литература

[1] *Hausen J., Johnson J.A.* Centralizer near-rings that are rings / J.Hausen, J.A. Johnson // J. Austr. Math. Soc. — 1995. — V.59. — P. 173-183.

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974, 1977. — Т.1,2.

[3] *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев — Томск: Томский государственный университет. — 2002.

[4] *Турманов М.А.* О чистоте в абелевых группах / М.А. Турманов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2004. — Т.10, №2. — С. 225-238.

[5] *Maxson C.J., van der Walt A.P.J.* Centralizer near-rings over free ring modules / C.J. Maxson, A.P.J. van der Walt // J. Austr. Math. Soc. (Series A) — 1991. — V.50. — P. 279-296.

Проективные модули над кольцами обобщенных треугольных матриц

Ярдыков Е.Ю. (Томск)

В работе Мюллера [1] получено описание инъективных модулей над кольцами обобщенных матриц. Представляет интерес строение проективных модулей над такими кольцами.

Здесь получено строение проективных модулей над кольцами обобщенных треугольных матриц.

Пусть R, S — кольца, ${}_RM_S$, ${}_SN_R$ — бимодули. Допустим, существуют бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M\bigotimes_S N\to R$ и $\psi\colon N\bigotimes_R M\to S$, удовлетворяющие условиям ассоциативности:

$$(mn)\,m' = m\,(nm') \text{ и } (nm)\,n' = n\,(mn')$$

для всех m, m' из M и n, n' из N. Здесь мы полагаем $mn=\varphi(m\otimes n)$ и $nm=\psi(n\otimes m)$. *Кольцом обобщенных матриц* называют множество матриц вида

$$K=\begin{pmatrix} R & M\\ N & S\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}\mid r\in R, s\in S, m\in M, n\in N\right\}$$

с операциями, заданными как в обычном кольце матриц (см. $[1-3]$).

Пусть существуют левые R-модуль X, S-модуль Y и гомоморфизмы R-модулей $f\colon {}_R(M\bigotimes_S Y)\to_R X$ и S-модулей $g\colon {}_S(N\bigotimes_R X)\to_S Y$ такие, что выполнены равенства ассоциативности: $m(nx)=(mn)x$, $n(my)=(nm)y$ для всех $m\in M, n\in N, x\in X, y\in Y$, где $nx=g(n\otimes x)$, $my=f(m\otimes y)$. Известно, что тогда группа столбцов $\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}$ образует левый K-модуль относительно естественного умножения матриц на столбцы.

Верно и обратное. Именно, если A — левый K-модуль, то A изоморфен некоторому модулю столбцов.

Пусть дан модуль $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ над кольцом K. Тогда подмножество A' является подмодулем модуля A тогда и только тогда, когда существуют подмодуль X' R-модуля X, подмодуль Y' S-модуля Y такие, что $A' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$, причем $MY' \subseteq X'$ и $NX' \subseteq Y'$, где MY' — образ композиции отображений $M \bigotimes Y' \longrightarrow M \bigotimes Y \longrightarrow X$, а NX' — образ композиции $N \bigotimes X' \longrightarrow N \bigotimes X \longrightarrow Y$.

Теорема *Пусть K — кольцо обобщенных матриц. Левые R-модуль X и S-модуль Y проективны тогда и только тогда, когда проективен левый K-модуль* $\begin{pmatrix} X \bigoplus (M \bigotimes_S Y) \\ (N \bigotimes_R X) \bigoplus Y \end{pmatrix}$.

Пусть теперь $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$. Кольцо такого вида называют *кольцом обобщенных треугольных матриц.*

Теорема *Пусть K — кольцо обобщенных треугольных матриц. Левый K-модуль $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ проективен тогда и только тогда, когда Y — проективный S-модуль и существует проективный левый R-модуль P такой, что $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} P \bigoplus MY \\ Y \end{pmatrix}$, причем MY изоморфен некоторому прямому слагаемому R-модуля $M \bigotimes_S Y$.*

Литература

[1] *Müller M.* Rings of quotient of generalized matrix rings / M. Müller // Comm. Algebra. — 1987. — V.15. — P. 1991-2015.

[2] *Nicholson W.K., Watters J.F.* Classess of simple modules and triangular rings / W.K. Nicholson, J.F. Watters //Comm. Algebra. — 1992. — V.20. — P. 141-153.

[3] *Rowen L.* Ring Theory / L. Rowen — New York: Academic Press. — V.1. — 1988.

[4] *Ламбек И.* Кольца и модули / И. Ламбек — М: Мир. — 1971.

Абелевы группы

Материалы Всероссийского симпозиума
(Бийск, 19-25 августа 2006 г.)

ISBN 5-85127-359-3

Ответственный редактор В.Х. Фарукшин

Сдано в набор 01.08.2006. Подписано к печати 14.08.2006. Формат $60\times90/16$.
Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. $3,25$. Тираж 100 экз.
Заказ 1808, с. (сп.) 1129

Редакционно-издательский отдел Бийского педагогического государственного университета им. В.М. Шукшина — 659333, г. Бийск, ул. Короленко, 53.

Типография Бийского педагогического государственного университета им. В.М. Шукшина — 659333, г. Бийск, ул. Короленко, 55/1.