Федеральное агентство по образованию
Алтайская государственная академия образования
им. В.М. Шукшина
Московский педагогический государственный университет
Томский государственный университет

Абелевы группы

*Материалы Всероссийского симпозиума,
посвященного 95-летию Л.Я. Куликова
(Бийск, 19–25 августа 2010 г.)*

Бийск
РИО АГАО им. В.М. Шукшина
2010

ББК 22.14
А 14

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Алтайской государственной академии образования
им. В.М. Шукшина

А 14 Абелевы группы [Текст]: Материалы Всероссийского симпозиума, посвященного 95-летию Л.Я. Куликова (Бийск. 19–25 августа 2010 г.)/ Отв. ред. В.Х. Фарукшин. —/ Бийск: РИО АГАО им. В.М. Шукшина, 2010. — 74 с.

Сборник содержит материалы участников Четвертого Всероссийского симпозиума «Абелевы группы», состоявшегося в г. Бийске 19–25 августа 2010 г.

Адресован специалистам по теории абелевых групп, модулей, колец, алгебр и их приложений.

ISBN 5-85127-359-3

СОДЕРЖАНИЕ

Леонид Яковлевич Куликов 5

Агафонов А.А., Себельдин А.М. (Н. Новгород) Определяемость абелевых групп группой умножений 13

Благовещенская Е.А. (С.-Петербург) Почти строго разложимые абелевы группы 16

Буданов А.В. (Томск) Квазинеобратимые эндоморфизмы абелевых групп 19

Вершина С.В., Фарукшин В.Х. (Бийск, Москва) Категория локальных cl-групп 22

Вильданов В.К., Себельдин А.М. (Н. Новгород) Определяемость абелевых групп своими группами автоморфизмов 23

Голованова О.В. (Красноярск) О применении кристаллографических групп в дизайне 24

Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э. (Томск) Определяемость однородных вполне транзитивных групп своими голоморфами 26

Гриншпон С.Я., Ельцова Т. А. (Томск) Гомоморфная устойчивость и группы, полные в своей p-адической топологии 28

Гриншпон С.Я., Никольская М.М. (Томск) Собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные группе 29

Елисова А.П. (Красноярск) Нетривиальные локальные автоморфизмы кольца нильтреугольных матриц над ассоциативно коммутативными кольцами 31

Ельцов А.А., Ельцова Т.А. (Томск) Теория групп в техническом ВУЗе 33

Зиновьев Е.Г. (Томск) Проективные модули над кольцами псевдоалгебраических чисел 35

Зиновьев Е.Г., Ярдыков Е.Ю. (Томск) Относительная инъективность для абелевых групп 37

Костромина Ю.В. (Москва) Матрицы Мальцева группы, двойственной группе без кручения конечного ранга 39

Красногорский Б.А., Фарукшин В.Х. (Москва) О прямых разложениях p-локальных групп 41

Крючков Н.И. (Рязань) Свойства инъективности и проективности $\mathcal{L}$-копериодических локально компактных абелевых групп 42

Нужин Я.Н. (Красноярск) О ковровых подгруппах групп Шевалле 43

Омельчук Т.А., Тимофеенко А.В. (Красноярск) Составленные из тетраэдра и квадратной пирамиды выпуклые m-правильногранники 46

Сафронов Л.В., Фарукшин В.Х. (Бийск, Москва) Квадратичные p-локальные группы без кручения конечного ранга 48

Сорокин К.С. (Томск) Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов 49

Тимошенко Е.А. (Томск) Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел 52

Тверетин А.С. (Сургут) О количестве почти вполне разложимых групп 55

Фарукшин В.Х. (Москва) Расщепление p-локальных групп без кручения 57

Царев А.В. (Москва) О группах, изоморфных своим группам эндоморфизмов 58

Чередникова А.В. (Кострома) О кольцах квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 59

Чехлов А.Р. (Томск) E-центр и E-коммутант абелевых групп 62

Чехлов А.Р. (Томск) E-разрешимые абелевы группы 67

Zyubin S. (Томск) Generalized congruence subgroups of the Chevalley groups 73

ЛЕОНИД ЯКОВЛЕВИЧ КУЛИКОВ

Тимофеева И.Л., Фомин А.А.

Леонид Яковлевич Куликов родился 2 ноября 1914 г. в семье железнодорожника в г. Никитовка Донецкой области. Окончив школу, он поступил в химический техникум. В возрасте 14 лет Л. Куликов в результате несчастного случая лишился ноги и всю дальнейшую жизнь был вынужден пользоваться протезом. Это не сломило воли подростка, нашедшего в себе силы мужественно пережить несчастье и продолжить учебу. По окончании техникума он некоторое время работал библиотекарем в г. Славянске.

В 1934 г. Л.Я. Куликов поступил на физико-математический факультет Московского государственного педагогического института (ныне МПГУ — Московский педагогический государственный университет). Яркий математический талант студента Куликова был по достоинству оценен многими крупными учеными. После окончания института в 1938 г. он поступил в аспирантуру на кафедре алгебры. Его научным руководителем был Г.М. Шапиро. Аспирант Куликов принимал активное участие в работе алгебраического семинара под руководством О.Ю. Шмидта, которого считал своим учителем. С монографией О.Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» (1916 г.) Л.Я. Куликов познакомился в юности, еще до поступления в институт. Именно тогда и возник у него интерес к алгебре.

В мае 1941 г. Леонид Яковлевич блестяще защитил кандидатскую диссертацию на тему «К теории абелевых групп произвольной мощности». Эта работа сразу же получила самую высокую оценку математической общественности и принесла ее автору широкую международную известность. Окончив аспирантуру, Леонид Яковлевич в 1941 г. приступил к работе преподавателем кафедры алгебры МГПИ им. В.И. Ленина.

Во время бомбежек Москвы 1941 г. до эвакуации института Леонид Яковлевич вместе со своими коллегами часто дежурил на крыше главного корпуса МГПИ, спасая его от зажигательных бомб. В период с 1942 по 1946 гг. преподавал в должности доцента кафедры высшей математики Ивановского текстильного института.

С 1946 по 1949 гг. Леонид Яковлевич работал в должности доцента кафедры алгебры ЛГПИ им. А.И. Герцена и одновременно проходил докторантуру при Ленинградском отделении Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Его научным консультантом был выдающийся советский математик А.А. Марков.

В 1951 г. Л.Я. Куликов защитил докторскую диссертацию на тему «Обобщенные примарные группы» на математико-механического факультете ЛГУ им. А.А. Жданова. Крупнейшие алгебраисты А.Г. Курош и А.И. Мальцев были его официальными оппонентами.

С 1950 по 1955 гг. Леонид Яковлевич работал в должности заведующего кафедрой высшей математики Ленинградского института авиационного приборостроения, а с 1955 г. был переведен в Москву на должность старшего научного сотрудника математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

В МГПИ им. В.И. Ленина Л.Я. Куликов начал работать с 1962 г. в должности профессора кафедры алгебры, а с 1963 по 1989 гг. заведовал этой кафедрой. Он создал сплоченный коллектив преданных работе преподавателей. В течение многих лет Л.Я. Куликов являлся председателем Совета по присуждению ученых степеней математического факультета МГПИ им. В.И. Ленина.

Леонид Яковлевич продолжал работать на своей кафедре алгебры в должности профессора до 1996 г., когда был вынужден оставить работу по состоянию здоровья. После тяжелой продолжительной болезни Л.Я.Куликов ушел из жизни 11 февраля 2001 г.

Л.Я. Куликов более 50 лет вел активную научную работу. Регулярно получая новые научные результаты, он не стремился к большому числу публикаций, часто лишь излагал их на научных семинарах, всесоюзных и международных конференциях. Математические работы Леонида Яковлевича отличаются исключительной глубиной, все они в настоящее время являются классическими и входят в золотой фонд алгебраической науки. Идеи и методы, разработанные в них, лежат в основе современной теории абелевых групп. Фактически именно благодаря работам Л.Я. Куликова теория абелевых групп выделилась в отдельную ветвь современной алгебры. Известный венгерский математик Т. Селе (Tiboi Szele) в 1954 г. писал: «Сегодня уже всякому очевидно, что самый ценный вклад в теорию бесконечных абелевых групп внесен именно Леонидом Яковлевичем Куликовом и что Леонид Яковлевич Куликов также и в мировом масштабе является самым крупным ученым в этой области».

Характеризуя научную деятельность Леонида Яковлевича, крупнейший советский алгебраист академик А.И. Мальцев писал в 1964 г.: «Л.Я. Куликов — один из выдающихся современных алгебраистов, один из главных создателей современной теории коммутативных групп. Заслуги его в этой области нельзя переоценить. Чтобы убедиться в этом, достаточно перелистать главы по теории коммутативных групп в монографии А.Г. Куроша «Теория групп» или «Абелевы группы» Л. Фукса ("Abelian Groups" L. Fuchs). Почти в каждом параграфе мы находим имя Л.Я. Куликова. Большинство фундаментальных теорем или принадлежат Л.Я. Куликову, или же Л.Я. Куликову принадлежит их современная формулировка». Позже в 1971 г., в своей статье «К истории алгебры в СССР за первые 25 лет», опубликованной в журнале «Алгебра и логика» Сибирского отделения АН СССР (т. 10, №1), А.И. Мальцев еще раз подчеркнул, что «особенно значительный вклад в теорию коммутативных групп внес Л.Я. Куликов, работы которого во многом определяют ее сегодняшнее лицо».

Следует отметить, что абелевы группы изучались в рамках общей теории групп немецкими математиками Прюфером (H. Prufer), Ульмом (H. Ulm), Бэром (R. Baer), Леви (F.W. Levi), а также отечественными математиками Л.С. Понтрягиным, А.Г. Курошем, А.И. Мальцевым, Л.А. Калужниным, Е.С. Ляпиным, С.В. Фоминым. Первые работы по абелевым группам относятся к 1917–1925 гг. и принадлежат Леви и Прюферу.

Приведенные высказывания Т. Селе и А.И. Мальцева отражают тот факт, что к середине 50-х годов XX века Л.Я. Куликов — самый авторитетный специалист в области абелевых групп. Именно благодаря его работам стало ясно, что условие коммутативности для групп является настолько сильным, что исследования по теории абелевых групп не умещаются в рамках общей теории групп, так как решение ее задач требует особых методов исследования. В 1958 г. вышла монография Л. Фукса «Абелевы группы», этот момент можно считать окончательным оформлением теории абелевых групп как самостоятельного направления современной алгебры.

Основные научные результаты Л.Я. Куликова достойно отражены в книгах Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы» и А.Г. Куроша «Теория групп». Всякий, кто начинает изучать теорию абелевых групп по этим книгам, на первых же страницах встречается с именем Куликова и в дальнейшем знакомится с его основными научными результатами. Леонид Яковлевич вполне заслужено предстает в этих книгах основателем теории абелевых групп. Теоремы Прюфера, который получил свои результаты за 20 лет до начала исследований Л.Я. Куликова, являются простыми следствиями известного критерия Куликова. Научное имя Л.Я. Куликова по значимости примыкает к именам предыдущего поколения математиков, основателей современной алгебры, таких как Э. Артин, Э. Нетер, О.Ю. Шмидт и Б.Л. Ван дер Варден. Во всяком случае, нет сомнений, что Л.Я. Куликов является одним из самых известных в мире отечественных алгебраистов.

В Советском Союзе в 1960–70 гг. сложились четыре школы по теории абелевых групп: в Томске под руководством И.Х. Беккера, в Ленинграде под руководством А.В. Яковлева, в МГУ под руководством А.П. Мишиной и в МГПИ им. В.И. Ленина под руководством Л.Я. Куликова. Школа Л.Я. Куликова занимала в этом ряду центральное место. Леонид Яковлевич руководил научно-исследовательским семинаром по теории абелевых групп в МГПИ с 1963 по 1994 гг. Этот семинар имел общесоюзное значение и сыграл огромную роль в развитии теории абелевых групп в СССР и России. Практически все отечественные специалисты (их около ста) и ряд зарубежных приняли участие в работе этого семинара.

Леонид Яковлевич очень ответственно относился к своей педагогической деятельности. Он чрезвычайно серьезно подходил к чтению лекций. При подготовке к ним каждый раз искал более краткие и оригинальные доказательства теорем курса, менял структуру изложения материала. В его лекциях было тщательно продумано каждое слово.

Л.Я. Куликов вел активную общественно-педагогическую работу. В 70-е годы, в связи с переходом средней школы на новые учебные планы и учебные программы, он особенно много внимания уделял вопросам совершенствования подготовки учителей математики. Являясь председателем Научно-методического совета по математике ГУВУЗа Министерства просвещения СССР, Леонид Яковлевич возглавлял работу по созданию новых учебных планов и новых программ для математических и физико-математических факультетов педагогических институтов СССР.

Под его руководством и при его непосредственном участии была создана программа по алгебре и теории чисел, в соответствии с которой Леонид Яковлевич написал прекрасный учебник, до сих пор являющийся основным учебным пособием по алгебре и теории чисел для студентов пединститутов.

Роль ученого в науке оценивается не только значимостью его научных работ, но и учениками, продолжившими его дело. У Леонида Яковлевича было очень много учеников. Даже те, у кого была возможность только краткого общения с ним, с благодарностью вспоминают о нем, говорят, что это общение значительно повлияло на их научную судьбу.

Леонид Яковлевич проводил большую работу по подготовке научно-педагогических кадров — много работал с аспирантами, щедро делился с ними своими многочисленными научными идеями. Под его руководством защищено много диссертаций, не только по теории абелевых групп, но и по другим разделам алгебры, а также по методике преподавания математики. Из прямых учеников Л.Я. Куликова защитили кандидатские диссертации, а позже стали докторами физико-математических наук А.А. Гварамия, А.А. Фомин и А.В. Гришин. А.Г. Солонина стала доктором педагогических наук. По алгебре защитили кандидатские диссертации Р. Кельберер, Я.Я. Ведель, А.Ю. Сойфер, А.И. Москаленко, А.М. Иванов, А.Н. Ераскина, Н.А. Сердюкова (Рятова), Н.И. Крючков, С.В. Рычков, В.Х. Фарукшин, В.Б. Трухманов, С.И. Комаров, Н. Кван, Н.Ю. Антонова, Ю.М. Фирсов, В.А. Дегтяренко.

Э.П. Береснева, В.В. Крючкова, Л.Х. Цибикова стали кандидатами педагогических наук.

Леонида Яковлевича уважали коллеги, аспиранты, студенты. Он отличался принципиальностью и бескомпромиссностью, был доверчив и прост в общении, бескорыстно предан математике и преподавательской работе.

В жизни Леонида Яковлевича большую роль играла семья. Со студенческих лет и до конца своих дней он прошел по жизни рука об руку вместе с Людмилой Александровной — любимой и преданной женой, другом и помощником. Они вырастили троих детей. В семье царил дух любви к математике и преданности преподавательскому делу, поэтому неудивительно, что дети продолжили дело отца - все трое посвятили себя преподаванию математики. Старшая дочь всю жизнь работает учителем математики в школе, сын и младшая дочь, защитили диссертации и преподают математику в высшей школе.

Леонид Яковлевич Куликов оставил после себя выдающиеся научные результаты, подготовил много учеников (ученых), создал научную школу и оставил о себе добрую память в сердцах своих учеников и коллег.

Список научных и методических публикаций Л.Я. Куликова

[1] К теории абелевых групп произвольной мощности, Математический сборник, 9 (51), 1941, 165–182.

[2] К теории абелевых групп произвольной мощности, Математический сборник, 16 (58), 1945, 129–162.

[3] Обобщенные примарные группы, I, Труды Московского математического общества, 1, 1952, 247–326.

[4] О прямых разложениях групп, Украинский математический журнал, 4, 1952, 230–275, 347–372.

[5] Обобщенные примарные группы, II, Труды Московского математического общества, 2, 1953, 85–167.

[6] О прямых разложениях одной смешанной абелевой группы, Publicationes mathematicae, Debrecen (Hungaria), 1956, 512–516.

[7] Условия расщепляемости смешанной абелевой группы, Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре, Успехи математических наук, т. XIII, вып. 3 (81), 1958, 247.

[8] Группы расширений абелевых групп, Труды IV Всесоюзного математического съезда, т. 2, Ленинград, 1964, 9–11.

[9] Строение группы абелевых расширений произвольной абелевой группы с помощью периодической, Коллоквиум по абелевым группа, Успехи математических наук, т. XIX, вып. 2 (116), 1964 (совместно с А.П. Мишиной и Л.А. Скорняковым), 228.

[10] Универсально полные абелевы группы, Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 1, Москва, 1965, 26–28.

[11] Расширения и группы расширений групп без кручения первого ранга, Математический конгресс, секция № 2, 1966.

[12] Пример неизоморфных групп типа 2 с изоморфными ульмовскими факторами, В книге А.Г. Куроша "Теория групп", М.: Наука, 1967, 169–171.

[13] Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой, VIII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре, Рига, 1967.

[14] Расширения алгебраически компактных групп, Симпозиум по теории групп, Батуми, 1967.

[15] Подпрямые разложения счетных абелевых групп без кручения, X Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Новосибирск, 1969, 18–19.

[16] Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой, Ученые записки МГПИ им. В.И. Ленина, т. 375, 1971, 41–55.

[17] Базисные подмодули модулей над локальными кольцами главных идеалов, XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Кишинев, 1971.

[18] О подпрямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга, XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Свердловск, 1973, 30.

[19] Программа государственного экзамена по математике для специальности 2104, М.: Просвещение, 1973 (в соавторстве с В.Т. Базылевым и П.П. Коровкиным).

[20] Элементы теории множеств и логики, Всесоюзный семинар преподавателей алгебры и теории чисел, тезисы докладов, Ульяновск, 1973.

[21] Группа расширений абелевой группы без кручения при помощи периодической группы, Труды Всесоюзного симпозиума по теории групп, Краснодар, 1976.

[22] Группа абелевых расширений группы первого ранга при помощи счетной группы, III Всесоюзный симпозиум по кольцам и модулям, Тарту, 1976.

[23] Группа абелевых расширений сервантной подгруппы аддитивной группы целых p-адических чисел с помощью счетной абелевой группы, XIV Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Новосибирск, 1977.

[24] Программа по алгебре и теории чисел для специальности 2104, М.: Просвещение, 1977, (в соавторстве с В.Г. Лемлейном).

[25] Программа по алгебре и теории чисел для специальности 2105, М.: Просвещение, 1977, (в соавторстве с В.Г. Лемлейном).

[26] О группах расширений абелевых групп, VI Всесоюзный симпозиум по теории групп, Черкассы, 1978.

[27] Группа расширений абелевой группы с помощью группы без кручения первого ранга, Научно-исследовательский семинар по общей алгебре,

Вестник Московского университета, сер. математика, механика, 5, 1978.

[28] Алгебра и теория чисел, М.: Высшая школа, 1979.

[29] О p-длине группы сервантных расширений абелевых групп, XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция, Кишинев, 1985, 299.

[30] Сборник задач по алгебре и теории чисел, М.: Просвещение, 1993 (в соавторстве с А.И. Москаленко и А.А. Фоминым).

[31] Об универсальном пополнении абелевой группы, Симпозиум «Абелевы группы», посвященный 80-летию Л.Я. Куликова, сборник тезисов, Бийск, 1994, 5.

Определяемость абелевых групп группой умножений

Агафонов А.А., Себельдин А.М. (Н.Новгород)

В данной работе рассматривается вопрос об определяемости абелевых групп группой умножений. Обозначения и определения из [1] считаем стандартными. Все группы, рассматриваемые в работе абелевы.

Определение 1. Будем говорить, что группа A из некоторого класса абелевых групп $\mathbf{X}$ определяется группой своих умножений $MultA$ в этом классе, если в нем не существует группы B такой что $MultA \cong Mult\mathrm{B}$ и A не изоморфна B. Класс всех таких групп будем обозначать через $\mathbf{X}(Mult)$. Если $\mathbf{X}(Mult) = \mathbf{X}$, то класс $\mathbf{X}$ будем называть $Mult$-классом.

Через $D(A)$ и $R(A)$ будем обозначать соответственно делимую и редуцированную части группы $A = R(A) \oplus D(A)$, где $R(A)$ определяется с точностью до изоморфизма.

Учитывая известный изоморфизм $MultA \cong Hom(A, Hom(A, A))$, нетрудно получить следующие результаты:

Теорема 1. *Если A — группа без кручения ранга $r(A)$, то $D(MultA) \cong \bigoplus\limits_{\alpha} \mathbb{Q}$, где $\alpha = r(A)^2 r(D(A))$, если ранг $r(A)$ конечен и $\alpha = 2^{r(A)}$, если бесконечен.*

Теорема 2. *Если A — группа без кручения, то $R(MultA) \cong MultR(A)$.*

Теорема 3. *Если A — абелева группа разложимая в конечную прямую сумму своих вполне характеристических подгрупп*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k,$$

то

$$MultA \cong MultA_1 \oplus \ldots \oplus MultA_k.$$

Теорема 4. *Если абелева группа A разложима в прямую сумму $A = \mathbb{Z} \oplus A'$, то она выделяется прямым слагаемым в группе умножений: $MultA \cong A \oplus A''$.*

Теорема 5. *Делимая абелева группа без кручения определяется своей группой умножений в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она конечного ранга свободного от квадратов чисел больших единицы.*

Доказательство. Необходимость. Если A — делимая абелева группа без кручения бесконечного ранга $r(A)$, то группу B строим следующим образом:

$$B = A \oplus A_1,$$

где A_1 — абелева группа без кручения ранга 1 типа содержащего характеристику состоящую только из единиц. Очевидно, что группы A, B неизоморфны, а их группы умножений изоморфны. Пусть теперь ранг $r(A)$ конечен и $r(A) = mn^2$, где $m, n \in \mathbb{N}, n > 1$. Поскольку у нас группа $MultA$ — делимая без кручения ранга $r(MultA) = r(A)^3$, то $r(MultA) = m^3n^6$. Строим группу B следующим образом:

$$B = \bigoplus_{k} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{s} A_1,$$

где $k = m, s = m(n^3 - 1)$. Обратно, пусть $A = \bigoplus\limits_{n} \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ и B — такая абелева группа, что

$$MultB \cong MultA \cong \bigoplus_{n^3} \mathbb{Q},$$

тогда группа B — без кручения. Поэтому, если n свободно от квадратов чисел больших единицы, то оно равно произведения различных простых чисел $n = p_1 \ldots p_k$ и $r(MultA) = p_1^3 \ldots p_s^3$. Пусть $r(B) = m, r(D(B)) = k$, тогда имеем $n^3 = m^2k$. Поскольку p_i делят k и k не превосходит m, то $k = n$ и, следовательно, $A = D(A) \cong D(B)$. Учитывая конечность ранга, получаем $A \cong B$.

Как следствие получаем следующий результат:

Теорема 6. *В классе вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга* $\mathbf{F_{cdf}}$ *подкласс* $\mathbf{F_{cdf}}(Mult)$ *не пуст.*

Доказательство. Согласно теореме 1 делимая абелева группа без кручения конечного ранга свободного от квадратов чисел больших единицы определяется своей группой умножений в классе всех абелевых групп, а значит и в $\mathbf{F_{cdf}}$.

Теорема 7. *Класс* $\mathbf{F_{cdfi}}$ *всех вполне разложимых абелевых групп конечного ранга у которых каждое прямое слагаемое ранга* 1 *идемпотентного типа является* $Mult$*-классом.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbf{F_{cdfin}}$ и $MultA \cong MultB$. Заметим, что
$$\Omega(A) = \Omega(MultA) = \Omega(MultB) = \Omega(B),$$
где $\Omega(A)$ — множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 группы A. Рассмотрим минимальный тип $\tau \in \Omega(A)$. Обозначим число слагаемых ранга 1 типа τ фиксированного разложения группы A через $n_A(\tau)$. Тогда $n_{MultA}(\tau) = [n_A(\tau)]^3$ и, следовательно, $n_A(\tau) = n_B(\tau)$. Рассмотрим теперь минимальный тип $\tau' \in \Omega(A) \setminus \{\tau\}$. Возможны два варианта а) Типы τ' и τ несравнимы, б) $\tau' < \tau$. В случае а) повторяя рассуждения проведенные выше, получаем $n_A(\tau') = n_B(\tau')$. В случае б) имеем
$$n_{MultA}(\tau') = [n_A(\tau') + n_A(\tau)]^2 n_A(\tau') =$$
$$n_{MultB}(\tau') = [n_B(\tau') + n_B(\tau)]^2 n_B(\tau').$$
Ясно, при $n_A(\tau') > n_B(\tau')$ получаем $n_{MultA}(\tau') > n_{MultB}(\tau')$. Противоречие. Таким образом, снова имеем равенство $n_A(\tau') = n_B(\tau')$. Аналогичным образом получаем $n_A(\tau'') = n_B(\tau'')$, где τ'' — некоторый минимальный тип из $\tau' \in \Omega(A) \setminus \{\tau\, \tau'\}$. Учитывая конечность ранга, имеем $A \cong B$.

Теорема 8. $\mathbf{F_{cdf}} \setminus \mathbf{F_{cdf}} \neq \varnothing$.

Доказательство. Строим группу $A \in \mathbf{F_{cdf}} \setminus \mathbf{F_{cdf}}$ следующим образом:
$$A = \mathbb{Q} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4,$$
где τ_k содержит характеристику $(k, k, k, \ldots)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Получаем
$$MultA \cong \bigoplus_{25} \mathbb{Q} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \bigoplus_{6} \mathbb{Z}.$$
Поэтому, если $MultA \cong MultB$, то $r(B) = 5$. Следовательно, $B = \mathbb{Q} \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4$, где B_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — редуцированные группы ранга 1. Применяя теоремы 2, 4 получаем, что группа B не содержит свободных прямых слагаемых. С другой стороны, группа $MultB$ содержит

такое прямое слагаемое ранга 6. Следовательно, все группы B_k неделимы ни на какие простые числа и их типы не идемпотентны и содержат характеристики состоящие из одинаковых положительных чисел. Наконец, чтобы получить слагаемое $A_1 \oplus A_1 \oplus A_2$ в группе $MultB$, группы B_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ должны быть изоморфны A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$. Итак, $A \cong B$.

Полезно привести следующие примеры неизоморфных групп с изоморфными группами умножений:

Пример 1. $A = \bigoplus\limits_{4} \mathbb{Q}$, $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_7 \oplus \mathbb{Q}$, где $(7070...) \in \tau(B_1)$, $(6161...) \in \tau(B_2)$, $(5252...) \in \tau(B_3)$, $(4343...) \in \tau(B_4)$, $(3434...) \in \tau(B_5)$, $(2525...) \in \tau(B_6)$, $(1616...) \in \tau(B_7)$.

Пример 2. $A = \bigoplus\limits_{8} \mathbb{Q}$, $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_{16} \oplus \mathbb{Q}$, где тип $\tau(B_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, 16)$ содержит характеристику, содержащую единицы на местах сравнимых с k по модулю 16 и нули на остальных местах.

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1. — 1977. — Т.2.

Почти строго разложимые абелевы группы

Благовещенская Е.А. (С.-Петербург)

Почти вполне разложимая абелева группа без кручения характеризуется наличием вполне характеристической подгруппы конечного индекса (называемой регулятором), которая является вполне разложимой группой конечного ранга. По аналогии с этим, вводится новый класс Батлеровских групп, называемых *почти строго разложимыми группами*, см. [1]. Они содержат подгруппу конечного индекса, которая является прямой суммой строго неразложимых групп, описываемых следующим определением, см. [4, §92], [3, 3.3].

Определение 1. Пусть $A = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(A)} \tau a_\tau$ является жесткой вполне разложимой группой конечного ранга, определяемой с помощью групп τ ранга 1, имеющих идемпотентные типы и содержащих $\mathbb{Z}$. Пусть $\{\alpha_\tau : \tau \in T_{cr}(A)\}$ — конечное множество целых чисел, и выполнены условия:

1. $\operatorname{rk} A = |T_{cr}(A)| \geqslant 3$,

2. для каждого $\tau \in T_{cr}(A)$ существует простое число p со свойством $\tau(p) = \infty$ и $\sigma(p) \neq \infty$ для всех $\sigma \neq \tau$, $\sigma \in T_{cr}(A)$,

3. $\bigcap_{\tau \neq \sigma} \tau = \mathbb{Z}$ для любого $\sigma \in T_{cr}(A)$,

4. $\gcd(\{\alpha_\tau | \, \tau \neq \sigma, \tau \in T_{cr}(A)\}) = 1$ для любого $\sigma \in T_{cr}(A)$,

5. числа α_τ не делятся на p, если $\sigma(p) = \infty$ для некоторого $\sigma \in T_{cr}(A)$.

Пусть $K(A) \cong \mathbb{Z}$ — группа, порожденная элементом $\sum_{\tau \in T_{cr}(A)} \alpha_\tau a_\tau$. Тогда $B(A) = A/K(A)$ называется *правильной* $\mathfrak{B}^{(1)}$-группой.

Пусть теперь $\{A_1, \ldots, A_t\}$, $t \geqslant 2$, — конечное множество вполне разложимых жестких групп, имеющих конечный ранги $k_1, \ldots, k_t$ соответственно. Пусть $T = T_{cr}(\bigoplus_{i=1}^t A_i)$, $T_i = T_{cr}(A_i)$, и T состоит из попарно несравнимых типов, причем $T_i \cap T_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Рассмотрим правильные $\mathfrak{B}^{(1)}$-группы $B(A_i)$ (если $\operatorname{rk} A_i = 1$, положим $B(A_i) = A_i$).

Введем в рассмотрение группу

$$A_0 = \bigoplus_{i=1}^{t} B(A_i). \tag{1}$$

Естественно называть A_0 *строго разложимой* жесткой группой, так как она представляет собой прямую сумму строго неразложимых групп $B(A_i)$, и множество $T = T_{cr}(A_0)$ состоит из попарно несравнимых типов.

Определение 2. Если группа B содержит строго разложимую группу в качестве подгруппы конечного индекса, будем называть B *почти строго разложимой группой.*

Мы рассмотрим почти строго разложимые группы специального вида, которые являются эпиморфными образами жестких групп с циклическим регуляторным фактором (так называемых crq-групп), см. [5].

Определение 3. Пусть X — жесткая группа с циклическим регуляторным фактором и α_τ, $\tau \in T$ — такие целые числа, что выполняются следующие условия:

1. $V = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$ — регулятор X, где $A_i = \bigoplus_{\tau \in T_i} \tau a_\tau$, $T = T_{cr}(X)$ состоит из идемпотентных типов, $T_i = T_{cr}(A_i)$ и $\operatorname{rk} A_i = |T_i| \neq 2$ для всех $i = 1, \ldots, t$;

2. для любого $\tau \in T$ существует простое число p, такое что $\tau(p) = \infty$ и $\sigma(p) \neq \infty$ для всех $\sigma \neq \tau$;

3. $T_i \cap T_j = \varnothing$, если $i \neq j$;

4. $\bigcap_{\tau \neq \sigma, \tau \in T_i} \tau = \operatorname{tp} \mathbb{Z}$ для любого $\sigma \in T_i$, $i = 1, \ldots, t$, если $|T_i| \neq 1$;

5. числа α_τ, $\tau \in T_i$, не делятся на p, если $\sigma(p) = \infty$ для некоторого $\sigma \in T_i$ при условии $|T_i| \neq 1$; $\alpha_\tau = 0$, если $\tau \in T_i$ при условии $|T_i| = 1$;

6. $\gcd(\{\alpha_\tau | \, \tau \neq \sigma, \tau \in T_i\}) = 1$ для любого $\sigma \in T_i$, $i = 1, \ldots, t$, если $|T_i| \neq 1$;

7. $\gcd(m_\tau(X), m_\sigma(X)) = 1$, если $\tau \neq \sigma$ и существует i со свойством $\tau \in T_i$, $\sigma \in T_i$;

8. все α_τ, $\tau \in T_i$ — взаимно просты с $Q = |X/V|$, если $|T_i| \neq 1$;

9. $\tau(p) \neq \infty$ для любого простого делителя p числа Q и любого $\tau \in T$.

Пусть $K = \bigoplus_{i \leqslant t} K(A_i) \subset X$, где $K(A_i) = \langle \sum_{\tau \in T_i} \alpha_\tau a_\tau \rangle$. Тогда $B = X/K$ называется *жесткой* $\mathfrak{B}^{(1)}$*crq-группой.*

Определение 4. Канонический эпиморфизм $\phi : X \longmapsto B = X/K$ называется *регулярным представлением* $\mathfrak{B}^{(1)}$crq-группы B с разбиением $T = \bigcup_{i \leqslant t} T_i$ и коэффициентами α_τ, $\tau \in T_{cr}(X)$, если группы X и K удовлетворяют вышеперечисленным условиям 1–9.

Заметим, что B/A_0 является циклической группой, изоморфной X/V, где $A_0 = V/K$ — строго разложимая группа, которая является вполне характеристической подгруппой в B. По аналогии с теорией почти вполне разложимых групп, A_0 называется *регулятором* B.

Лемма [1, лемма 3.3]. *Пусть X и Y — почти изоморфные жесткие crq-группы и $\phi\colon X \longmapsto B$, $\psi\colon Y \longmapsto C$ — регулярные представления $\mathfrak{B}^{(1)}$crq-групп B и C с одинаковым разбиением $T = \bigcup_{i \leqslant t} T_i$ и одинаковыми коэффициентами α_τ, $\tau \in T$. Тогда B и C тоже почти изоморфны.*

На основании этой леммы удается получить классификацию с точностью до почти изоморфизма не только жестких, а также блочно-жестких

$\mathfrak{B}^{(1)}$crq-групп (в регуляторе которых содержатся прямые суммы не одной, а нескольких сильно неразложимых групп, изоморфных группам $B(A_i)$, см. [1].

Литература

[1] *Blagoveshchenskaya E.* Classification of a class of finite rank Butler groups // Models, modules and abelian groups, p. 135–146, Walter de Gruyter, Berlin, 2008.

[2] *Arnold D., Vinsonhaler C.* Finite Rank Butler Groups: A Survey of Recent Results // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 146, p. 17–41, 1993.

[3] *Fuchs L., Metelli C.* On a class of Butler groups // Manuscripta Math., 71, p. 1–28, 1991.

[4] *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups / vol. 1, 2, Academic Press 1970, 1973.

[5] *Blagoveshchenskaya E., Mader A.* Decompositions of almost completely decomposable abelian groups // Contemporary Mathematics, vol. 171, p. 21–36, 1994.

Квазинеобратимые эндоморфизмы абелевых групп

Буданов А.В. (Томск)

В последнее время абелевы группы изучаются вместе с их кольцами эндоморфизмов. При таком подходе возникают задачи, связанные с описанием структуры кольца эндоморфизмов в терминах действия эндоморфизмов на группе. Примером таких проблем служат проблемы описания радикалов колец эндоморфизмов различных классов групп в терминах действия эндоморфизмов из радикалов на группе [1, проблемы 17, 18], [2]. В настоящей работе вводится понятие квазинеобратимого эндоморфизма абелевой группы без кручения и с его помощью исследуются кольца эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения.

Рассматриваемые в работе группы подразумеваются абелевыми и не имеющими кручения. Все используемые обозначения и неопределяемые термины являются общепринятыми в теории абелевых групп и могут быть найдены в [3].

Определение. Пусть G — абелева группа без кручения. Будем говорить, что эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ *квазиобратим слева на элементе* $g \in G$, если найдется эндоморфизм $\beta \in E(G)$ и натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такие, что $\beta\alpha g = ng$. Эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ назовем *квазинеобратимым слева*, если он не является квазиобратимым слева ни на одном элементе группы за исключением нуля. Иными словами, эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ квазинеобратим слева, если для произвольных $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in \mathbb{N}$ из равенства $\beta\alpha g = ng$ следует, что $g = 0$.

Можно показать, что аналогичным образом определяемая квазинеобратимость справа равносильна квазинеобратимости слева. Поэтому в дальнейшем будем называть квазинеобратимые слева эндоморфизмы просто квазинеобратимыми. Данное выше определение можно сформулировать и в других терминах. А именно, квазинеобратимость слева эндоморфизма $\alpha \in E(G)$ равносильна каждому из следующих свойств.

1. Для любых $\beta \in E(G)$ и $n \in \mathbb{N}$ эндоморфизм $n - \beta\alpha$ является мономорфизмом.

2. $\langle E(G)\alpha g\rangle_* \cap \langle g\rangle_* = 0$ для каждого $g \in G$ или, что равносильно, $g \notin \langle E(G)\alpha g\rangle_*$, если $g \neq 0$.

Основное внимание в работе уделяется исследованию квазинеобратимых эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения. В указанных случаях показано, что множество всех квазинеобратимых эндоморфизмов образует идеал кольца эндоморфизмов, который может быть определен в терминах действия эндоморфизмов на группе. Этот результат сделал возможным рассмотрение факторкольца по идеалу квазинеобратимых эндоморфизмов. В заключительной части выявлены некоторые взаимосвязи введенного идеала и первичного и ниль радикалов кольца эндоморфизмов, представленные в виде условий нильпотентности идеала квазинеобратимых эндоморфизмов.

Главный результат работы сводит вопрос о квазинеобратимости эндоморфизма вполне разложимой группы к вопросу о его действии на ее прямых слагаемых ранга 1, что позволяет сразу установить квазинеобратимость эндоморфизма представленного в матричном виде относительно какого-либо разложения группы в прямую сумму групп ранга 1.

Теорема 1. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения, $G = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ — ее разложение в прямую сумму групп ранга 1 и $\pi_i \colon G \to A_i$*

$(i \in I)$ — естественные проекции. Эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ квазинеобратим тогда и только тогда, когда для любых (необязательно различных) прямых слагаемых A_i, A_j, входящих в данное разложение и имеющих один тип, $\pi_i \alpha A_j = 0$.

Для сепарабельных групп получается следующее

Следствие. *Эндоморфизм α сепарабельной группы G квазинеобратим тогда и только тогда, когда для любых двух её прямых слагаемых A, B ранга 1, имеющих один и тот же тип, $\pi \alpha A = 0$ ($\pi\colon G \to B$ — произвольная проекция).*

Из последних результатов легко вывести что множество $Q(G)$ всех квазинеобратимых эндоморфизмов сепарабельной группы G является идеалом кольца $E(G)$. Пусть $\Omega(G)$ обозначает множество типов прямых слагаемых ранга 1 сепарабельной группы G. Для каждого типа t обозначим G_t группу $G(t)/G^*(t)$. Для вполне разложимой группы G группа G_t является ее однородной компонентой типа t.

Теорема 2.1. *Если группа G вполне разложима, то*

$$E(G)/Q(G) \cong \prod_{t \in \Omega(G)} E(G_t).$$

2. *Если группа G сепарабельна, то $E(G)/Q(G)$ изоморфно подкольцу в $\prod\limits_{t \in \Omega(G)} E(G_t)$.*

В заключительной части работы рассматриваются условия нильпотентности идеала $Q(G)$. Пусть $P(R)$ обозначает первичный, $N(R)$ — ниль-радикал. Говорят, что частично упорядоченное множество удовлетворяет условию m-максимальности для натурального числа m, если каждая строго возрастающая цепь его элементов состоит из не более чем m элементов.

Теорема. 3 *Следующие условия на сепарабельную группу G равносильны:*

1) $P(E(G))^m = 0$;

2) $N(E(G))^m = 0$;

3) $Q(G)^m = 0$;

4) $\Omega(G)$ *удовлетворяет условию m-максимальности.*

При этом $Q(G)$ — наибольший идеал, который можно использовать *в условии 4). Справедливо более сильное утверждение: если I — идеал кольца $E(G)$ и $I \not\subset Q(G)$, то в I найдется не нильпотентный эндоморфизм.*

Литература

[1] *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П.А. Крылов — М.: Факториал Пресс — 2006.

[2] *Мисяков В.М.* Некоторые вопросы теории абелевых груп / В.М. Мисяков // Всероссийская конференция по математике и механике — Тезисы докладов — Томск: ТГУ — 2008. — С.55.

[3] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1. — 1977. — Т.2.

Категория локальных cl-групп

Вершина С.В., Фарукшин В.Х. (Бийск, Москва)

Абелева группа A называется *p-локальной* (*обобщенно примарной* по Куликову), если $qA = A$ для любого простого числа $q \neq p$.

p-локальную группу без кручения назовем *cl-группой* (circle, line), если ее поле расщепления, подполе p-адических чисел, является конечным алгебраическим расширением поля рациональных чисел, каждое число которого может быть построено с помощью циркуля и линейки, исходя из заданной единицы.

Теорема 1. *Пусть A и B являются cl-группами конечного ранга. Тогда следующие группы также являются cl-группами:*
1) *сервантные подгруппы cl-групп;*
2) *прямые слагаемые cl-групп;*
3) *гомоморфные образы cl-групп;*
4) *конечные прямые суммы cl-групп;*
5) *группы, двойственные (по Арнольду) cl-группам;*
6) *группы квазиизоморфные cl-группам;*
7) $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B$, *где $\mathbb{Z}_p$ — локализация кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p;*
8) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B)$*;*

9) *аддитивные группы кольца эндоморфизмов и его центра cl-групп;*
10) *расширение группы* A *с помощью группы* B.

Теорема 2. *Если ранг сильно неразложимой cl-группы является нечетным числом, то кольцо ее эндоморфизмов коммутативно.*

Литература

[1] *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел / М.: Высшая шк. 1979.

[2] *Lady E.L.* Splitting Fields for Torsion-Free Modules over Discrete Valuation Rings // J. Algebra, 49. p. 261–275, 1977.

Определяемость абелевых групп своими группами автоморфизмов

Вильданов В.К., **Себельдин А.М.** (Нижний Новгород)

Исследуется вопрос определяемости абелевой группы её группой автоморфизмов. Получен критерий определяемости группы в классе вполне разложимых абелевых блочно жестких групп без кручения.

Определение 1. Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Пусть $\mathbf{F_{cd}}$ класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения, $\mathbf{F_{br}}$ — класс вполне разложимых блочно жестких абелевых групп без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы A.

Теорема 1. *Пусть группа* $A \in \mathbf{F_{cd}}$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов, тогда* A *почти делимая и для всякого минимального типа* $\tau \in \Omega(A)$, $r(A^{(\tau)}) > 1$.

Теорема 2. 2-*делимая группа* $A \in \mathbf{F_{cd}}$, $r(A) = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда* A *однородная почти делимая группа.*

Теорема 3. *Пусть* $A \in \mathbf{F_{br}}$ 2-*делимая группа,* A *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{F_{br}}$ *тогда и только тогда, когда* A *почти делимая и для любого типа* $\tau \in \Omega(A)$, $r(A^{(\tau)}) > 1$.

О применении кристаллографических групп в дизайне

Голованова О.В. (Красноярск)

С построениями сетчатых орнаментов и мозаик (см. рис. 1, 3, 4), законами симметрии автору приходится сталкиваться при работе со студентами специальностей "Архитектура" и "Дизайн архитектурной среды" Института архитектуры и дизайна Сибирского федерального университета.

Голландский художник Морис Корнелиус Эшер [1], [3], [4] (Maurits Cornelis Escher) (1898 — 1972), создавая черно-белые гравюры из фигур, заполняющих пространство без промежутков, не подозревал, что использует хорошо разработанные законы симметрии. Только в 1935 году он натолкнулся на литературу по кристаллографии. Эшер начал анализировать пространственные закономерности своих рисунков, особенно когда приступил к многоцветным композициям. В 1942 году в своих записках он сформулировал открытые им законы симметричного заполнения пространства многоцветными фигурами. Оказалось, что Эшер получил почти все двух-, трех-, четырех- и шестицветные группы симметрии. Поэтому кристаллографы очень любят иллюстрировать те или иные элементы симметрии и группы гравюрами Эшера.

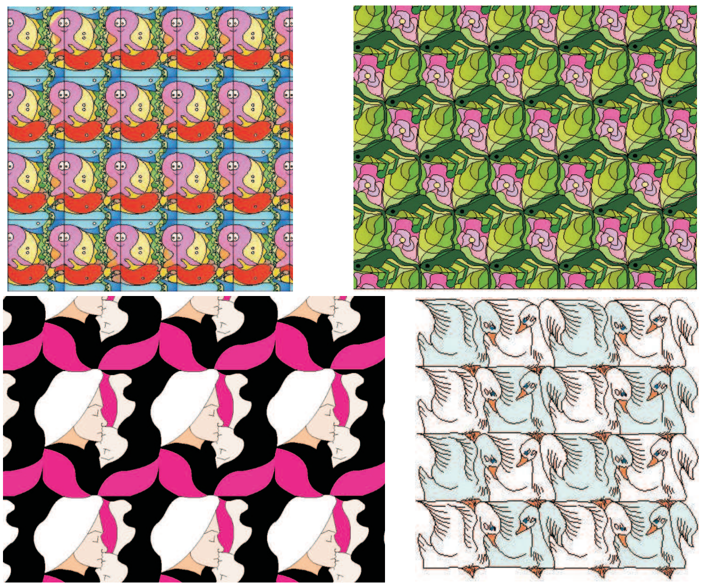

Рис. 1: Мозаики, созданные студентами по технике Эшера.

Сетчатый орнамент (сетчатый, или раппортный) — орнамент, мотив которого повторяется и по вертикали, и по горизонтали, этот орнамент бесконечен во всех направлениях.

Список всех кристаллографических групп приводит Коксетер Г. [1]. В статье Мальцева А.И. [2] даны схемы орнаментов (см. рис. 2), соответствующих каждой из 17-ти кристаллографических групп. Сетчатый орнамент заполняет всю поверхность и располагается по невидимой сетке с формами ячеек: ромба, квадрата, треугольника, параллелограмма.

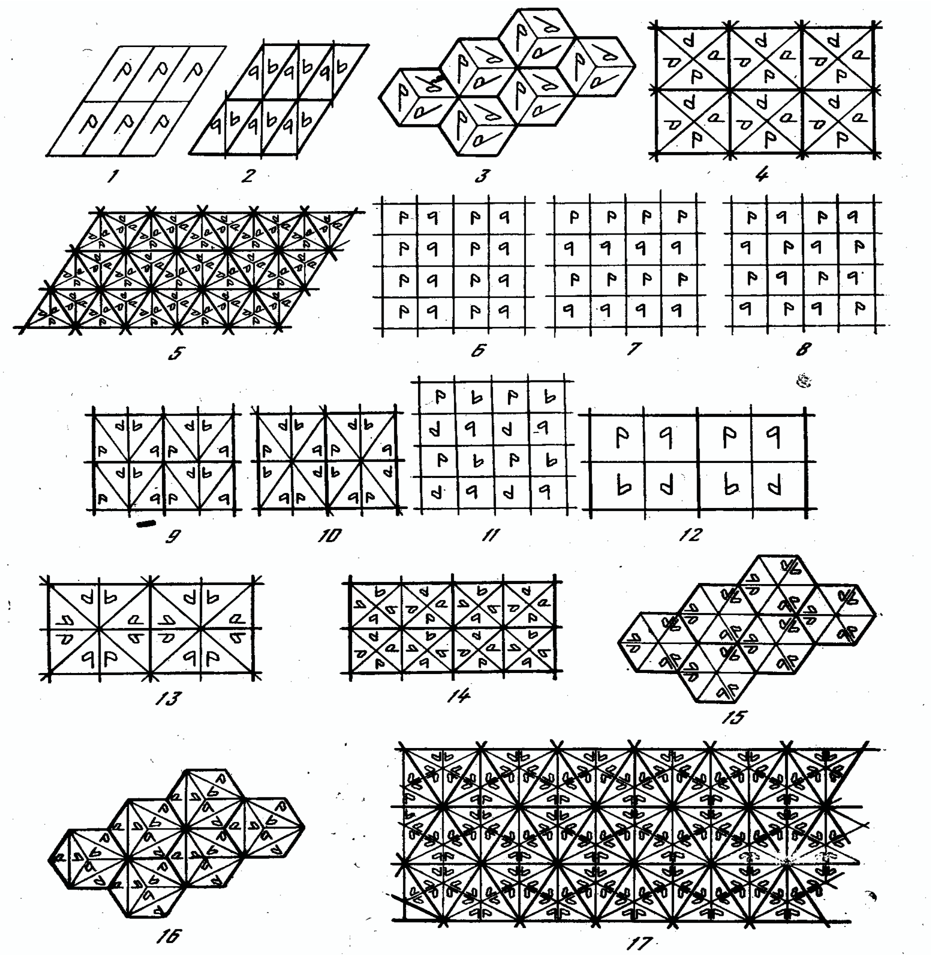

Рис. 2: Схемы орнаментов, соответствующих каждой из 17-ти кристаллографических групп

Ниже приведены сетчатые орнаменты (см. рис. 3, 4), созданные студентами в системе автоматизированного проектирования AutoCAD.

Изучаются также пространственные закономерности симметрии. Смотри [1], [2].

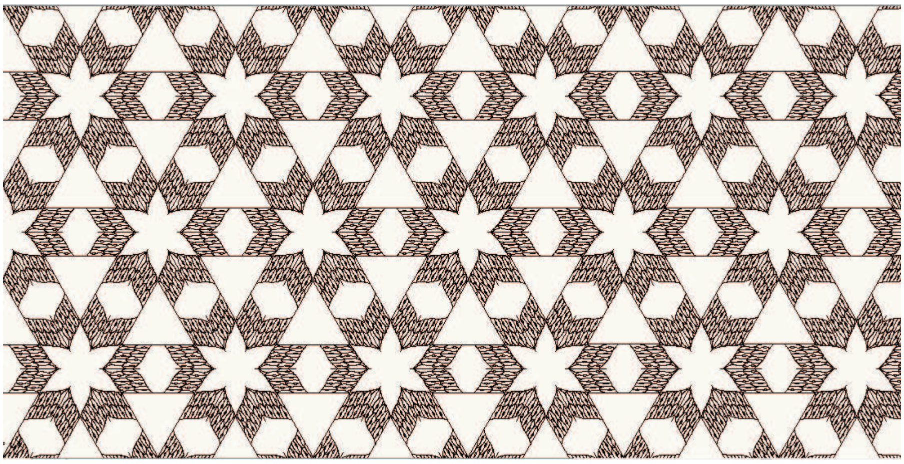

Рис. 3: Орнамент, соответствующий схеме 17 из рис. 2.

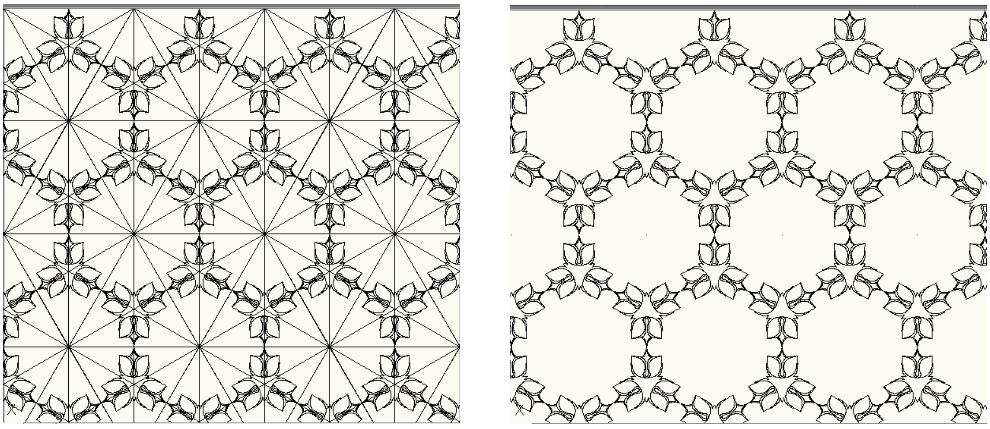

Рис. 4: Орнамент, соответствующий схеме 16 из рис. 2.

Литература

[1] *Коксетер Г.С.М.* Введение в геометрию / Г.С.М. Коксетер — М.: Наука, 1966.

[2] *Мальцев А.И.* Группы и другие алгебраические системы / А.И. Мальцев — В кн.: Избранные труды. Т 1. М.: Наука, 1976 г. — С. 352–421. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. Т 3. Изд-во АН СССР, 1956. — С. 248–331.

[3] http://www.mcescher.com/

[4] http://www.im-possible.info/russian/ articles/escher/escher.html

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00395).

Определяемость однородных вполне транзитивных групп своими голоморфами

Гриншпон С.Я, Гриншпон И.Э. (Томск)

Будем говорить, что группа A определяется своим голоморфом в некотором классе $\Re$, если для любой группы B из этого класса изоморфизм голоморфов групп A и B влечет изоморфизм самих групп A и B. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [1]. Однако, ситуация меняется при переходе к абелевым группам. В [1] Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И.Х. Беккером [2]. Определяемость векторных групп своими голоморфами исследовалась в [3] и [4].

Рассмотрим определяемость своими голоморфами однородных вполне транзитивных абелевых групп без кручения.

Напомним, что абелева группа без кручения A называется вполне транзитивной, если для любых двух элементов $a, b \in A$ таких, что $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ существует эндоморфизм η группы A, отображающий элемент a в элемент b.

При исследовании данного вопроса были доказаны такие результаты.

Теорема 1. *Всякая нормальная абелева подгруппа голоморфа абелевой группы без кручения является группой без кручения.*

Для абелевой группы без кручения A обозначим через $T(A)$ множество всех типов элементов группы A.

Теорема 2. *Пусть S — нормальная абелева подгруппа голоморфа абелевой группы без кручения A. Тогда для любого типа $\mathbf{t} \in T(S)$ существует тип $\mathbf{t}' \in T(A)$ такой, что $\mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$.*

С помощью этих результатов, а также других установленных фактов, связанных со строением абелевых нормальных подгрупп голоморфов абелевых групп, был получен следующий результат.

Теорема 3. *Всякая однородная вполне транзитивная группа определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Следствие 1. *Всякая однородная сепарабельная группа определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Следствие 2. *Всякая группа без кручения полная в своей p-адической топологии определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Литература

[1] *Mills W. N.* On the non-isomorphism of certain holomorphs / W.N. Mills // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. V.74. — P. 428–443.

[2] *Беккер И.Х.* Абелевы группы с изоморфными голоморфами / И.Х. Беккер // Изв. вузов. Математика. — 1975. N.3. — С. 97–99.

[3] *Гриншпон И.Э.* Голоморфно изоморфные векторные группы / И.Э. Гриншпон // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. Бийск. — 2006. — С. 14–16.

[4] *Гриншпон И.Э.* Определяемость векторных групп своими гооморфами / И.Э. Гриншпон // Вестник Томского гос. университета. — 2007. N.298. — С. 111–113.

Гомоморфная устойчивость и группы, полные в своей p-адической топологии

Гриншпон С.Я., Ельцова Т. А. (Томск)

Абелева группа A называется *гомоморфно устойчивой относительно группы* B, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, то есть если $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ — подгруппа группы B.

Гомоморфная устойчивость групп из некоторых классов исследовалась в цикле работ [1–5]. Показано, что класс гомоморфно устойчивых групп замкнут относительно прямых сумм. Получен критерий гомоморфной устойчивости жестких групп. Исследована гомоморфная устойчивость групп относительно прямых произведений, а также гомоморфная устойчивость прямых произведений относительно узких групп. Доказано, что сепарабельные группы гомоморфно устойчивы относительно любых групп. Исследованы связи делимых и редуцированных групп с гомоморфной устойчивостью. Показано, что в классе групп без кручения можно строить группы ранга n ($n > 1$), не являющиеся гомоморфно устойчивыми, каждая подгруппа которых меньшего ранга является гомоморфно устойчивой.

В настоящей работе рассматривается гомоморфная устойчивость связанная с группами, полными в своей p-адической топологии.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Любая группа, полная в своей p-адической топологии, гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Теорема 2. *Всякая группа гомоморфно устойчива относительно любой группы, полной в своей p-адической топологии.*

Литература

[1] *Гриншпон С.Я.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы / С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова // Вестн. Том. ун-та. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. — Томск, 2003. — № 280. — С. 31–33.

[2] *Grinshpon S.Ya.* Homomorphic images of Abelian groups / S.Ya. Grinshpon, T.A. Yeltsova // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 154., № 3.— P. 290–294.

[3] *Ельцова Т.А.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Вестн. Том. ун-та. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. — Томск, 2006. — № 290. — С. 30–32.

[4] *Grinshpon S.Ya.* Homomorphic stability of Abelian groups / S.Ya. Grinshpon, T.A. Yeltsova // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 163., № 6.— P. 670–676.

[5] *Гриншпон С.Я.* Связь делимых и редуцированных групп с гомоморфной устойчивостью / С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова // Вестн. Том. ун-та. Сер. Математика и механика. — Томск. — 2009. — № 2(6). — С. 14–19.

Собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные группе [1]

Гриншпон С.Я., Никольская М.М. (Томск)

Исследованию абелевых групп, содержащих собственные подгруппы, изоморфные самой группе, посвящен ряд работ. Такие группы изучал

[1] Авторы поддержаны ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 года.

Р.А. Бьюмонт в [1]. Он назвал такие группы I-группами. В [1], в частности, доказано, что делимая группа является I-группой тогда и только тогда, когда она имеет бесконечный ранг. Такие группы и модули исследовались в [2] и [3] Р.А. Бьюмонтом и Р.С. Пирсом. Кроме I-групп, в [3] рассматривались IP-группы (группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе) и ID-группы (группы, изоморфные собственному прямому слагаемому). В частности, в [3] доказано, что если G — редуцированная абелева группа такая, что G/pG — конечная группа для любого простого числа p, то G не является ID-группой. В [4] П. Кроули строит пример бесконечной примарной абелевой группы без элементов бесконечной высоты, которая не изоморфна никакой собственной подгруппе. В [5] исследуются абелевы p-группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе. В [6] рассматриваются квазиминимальные группы. (Абелева группа A называется квазиминимальной, если она изоморфна всем ее подгруппам той же мощности, что и сама группа A). В [6] доказано, в частности, что если G — бесконечная абелева p-группа, то G — квазиминимальная группа тогда и только тогда, когда $G \cong \mathbf{Z}(p^{\infty})$ или G является прямой суммой циклических групп порядка p.

В настоящей работе исследуются группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Абелеву группу назовем *IF-группой*, если она изоморфна некоторой собственной вполне характеристической подгруппе.

Всюду далее под словом «группа» будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Всякая ограниченная группа не является IF-группой.*

Обозначим через $\mathbf{N}_0$ множество всех целых неотрицательных чисел, а через $f_A(k)$ — k-тый инвариант Ульма – Капланского p-группы A, то есть ранг фактор-группы $p^k A[p]/p^{k+1}A[p]$. Введем следующее определение.

Пусть A — сепарабельная p-группа. Строго возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $i_0, i_1, ..., i_n, ...$ назовем *допустимой* для группы A, если для инвариантов Ульма – Капланского этой группы выполняется система равенств $f_A(k) = \sum\limits_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i),\ k \in \mathrm{N}_0$.

Теорема 2. *Неограниченная сепарабельная p-группа с конечными инвариантами Ульма – Капланского не является IF-группой, если для нее существует только одна допустимая последовательность и эта последовательность состоит из всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Следствие 3. *Неограниченная сепарабельная p-группа не является IF-группой, если ее инварианты Ульма – Капланского конечны и образуют возрастающую последовательность.*

Литература

[1] *Beaumont R.A.* Groups with isomorphic proper subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. —V.51. — P. 381–387.

[2] *Beaumont R.A.* Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules / R.A. Beaumont, R.S. Pierce // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — V.91. — P. 209–219.

[3] *Beaumont R.A.* Isomorphic direct summands of abelian groups /R.A. Beaumont, R.S. Pierce // Math. Annalen — 1964. — V.153. — P. 21–37.

[4] *Crawley P.* An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — V.68.— p. 463–467.

[5] *Monk G.S.* Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Ill. J. Math. — 1970. — V.14. — p. 164–177.

[6] *Goldsmith B.* Quasi-minimal groups. / B. Goldsmith, S. 'Oh'og'ain, S. Wallutis // Proc. Of Amer. Math. Soc. — 2004. — V.132. — p. 2185–2195.

Нетривиальные локальные автоморфизмы кольца нильтреугольных матриц над ассоциативно коммутативными кольцами

Елисова А.П. (Красноярск)

Наряду с изучением автоморфизмов колец и алгебр в последние годы актуальным стал вопрос об их локальных автоморфизмах. Понятие локальный автоморфизм было введено Larson и Sourour.

Определение 1. *Локальным автоморфизмом* кольца или алгебры A называют автоморфизм аддитивной группы A^+ (K — линейный для алгебры), который на каждый элемент из A действует как некоторый автоморфизм кольца или соответственно алгебры A, вообще говоря, зависящий от выбора элемента. Тривиальными локальными автоморфизмами являются автоморфизмы. Остальные локальные автоморфизмы называют нетривиальными.

Larson и Sourour (1990 г.) доказали, что автоморфизмы и антиавтоморфизмы полной алгебры $M_n(\mathbb{C})$ всех комплексных $n \times n$ матриц исчерпывают ее локальные автоморфизмы [1]. Randall Crist (2000 г.) [2] построил пример нетривиального локального автоморфизма для определенной подалгебры треугольной трехмерной комплексной алгебры.

Исследуются локальные автоморфизмы кольца $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц (с нулями на главной диагонали и над ней) над ассоциативно коммутативным кольцом K с единицей. Выявляются условия на $d \in K$ и $k, m,\ 1 \leqslant k - m < n$, при которых локальным автоморфизмом кольца $NT(n, K)$ является отображение

$$\varphi_{km} :\ \alpha \to \alpha + da_{km}e_{n1}\ (\alpha \in NT(n, K),\ d \in K).$$

Определение 2. (Локальный) автоморфизм кольца или алгебры A называется *центральным*, если он действует тождественно по модулю центра A.

Автоморфизмы кольца $NT(n, K)$ описаны в [4], в том числе и центральные. Ясно, что к ним относятся и отображения $\varphi_{m+1,m}$ при $n > 2$ и $\forall K$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если отображение φ_{km} при $k - m > 1$ является локальным автоморфизмом кольца $NT(n, K)$ $(n > 2)$, то (k, m) есть $(3, 1)$, $(n, n - 2)$ или $(n, 1)$. В частности, когда элемент d порождает в кольце K минимальный ненулевой идеал, то отображения φ_{31} и $\varphi_{n,n-2}$, φ_{n1} определяют нетривиальные локальные автоморфизмы.*

Литература

[1] *Larson David R., Sourour Ahmed R.* Local Derivations and local automorphisms of B(H) / David R. Larson, Ahmed R. Sourour // Proc. Sympos. Pure Math. – 1990. – №51. – P. 187-194.

[2] *Crist R.* Local automorphisms / R. Crist // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – №128. – P.1409-1414.

[3] *Semrl P.* Local automorphisms and derivations of B(H) / P. Semrl// Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – №125. – P.2677-2680.

[4] *Левчук В.М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов / В.М. Левчук // Сиб. матем. журн. – 1983. – Т.24. – №4. – С.543-557.

Теория групп в техническом ВУЗе

Ельцов А.А., Ельцова Т.А. (Томск)

Теория групп, являясь одним из самых абстрактных разделов математики, находит в последнее время всё большее применение в инженерной практике. Это связано как с появлением новых специальностей вызванное развитием техники, в том числе, появлением компьютеров, так и всё большим проникновением теории групп в различные области инженерной деятельности, а следовательно, и в специальные курсы, например, в кристаллографию, криптографию, обработку изображений, компьютерную графику и в другие разделы. В результате, появляется необходимость её изучения в инженерных вузах.

Изменение содержания математической подготовки инженеров, выразившееся в необходимости изучения абстрактных разделов математики в специальных курсах, повлекло за собой несколько проблем. Первая из них — уровень изложения материала в традиционном курсе математики для инженерных специальностей. Появившаяся в последнее время тенденция к упрощению общего курса математики в вузе играет в этом плане плохую роль, так как столкнувшись с упрощённым изложением в общем курсе, студенты испытывают трудности с восприятием и пониманием разделов с большим уровнем абстракции. Вторая из этих проблем — появление дополнительных требований к написанию учебников и учебных пособий как для общего, так и для специальных курсов. Нужны учебники и учебные пособия, написанные простым языком и понятные большему, чем профессиональные математики, кругу читателей. Об этой проблеме давно говорят, есть даже специальная серия книг по математике для инженеров, но в связи с постоянным расширением круга математических вопросов, используемых в различных областях знаний, потребность в подобных учебниках и учебных пособиях, в том числе и с изложением теории групп, остаётся, хотя и постепенно решается. Из книг по абстрактной алгебре (включая теорию групп) можно отметить достаточно просто написанную книгу Э.Фрида [1], а также книги по теории групп П.С. Александрова [2] и И. Гроссмана, В. Магнуса [3], но они, к сожалению, не охватывают многих вопросов, желательных для изучения.

В традиционном курсе для инженеров теория групп, колец, полей либо не читается вовсе, либо излагается в курсе линейной алгебры, при этом соответствующая часть занимает 1–2 лекции и предполагает самое поверхностное знакомство с этими алгебраическими структурами. В Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники (ТУСУРе) абстрактная алгебра как самостоятельный курс изучается на некоторых специальностях с различным количеством отводимых на него часов.

Нами этот курс читается для направления «Прикладная математика и информатика» в объёме 50 часов (25 часов лекций и 25 часов практики). Курс изучается в 3-м семестре как завершающий для дисциплины «Геометрия и алгебра». Такое небольшое количество лекционных часов предъявляет требования на отбор излагаемого материала. С одной стороны, необходимо показать все прелести теории, а с другой, изложить интересные результаты, которые могут потребоваться в приложениях.

Естественно, представляют интерес циклические группы, как конечные, так и бесконечные. Не могут остаться без внимания и такие вопросы, как подгруппы, нормальные подгруппы, классы смежности, факторгруппы, разложение групп в прямое произведение (прямую сумму) подгрупп.

При рассмотрении отображений $f\colon X \to Y$, не наделяя X и Y какой-либо математической структурой, мало что можем получить. Инъекция, сюръекция, биекция, суперпозиция отображений, обратное отображение — весь круг вопросов доступных для изучения, по крайней мере в учебном курсе. Поэтому представляется интересным изучать отображения множеств наделённых определённой структурой, в частности структурой группы. Появляется возможность, в случае наделения X и Y, например, структурой группы или кольца или линейного пространства, рассмотреть отображения, сохраняющие операции. Для групп и колец это гомоморфизмы, для линейных пространств — линейные операторы. Как хорошо известно, множество всех гомоморфизмов $f : A \to B$ абелевой группы A в абелеву группу B образует группу $\mathrm{Hom(A, B)}$. Изучение групп гомоморфизмов является весьма нтересным и интенсивно развиваемым направлением. Далее, так как множество отображений $f : X \to X$ есть полугруппа относительно операции суперпозиции, то и множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom(A, A)}$, будучизамкнутым относительно этой операциии, является полугруппой, обратимые элементы которой образует группу, называемую группой эндоморфизмов EndA. Введение в круг изучаемых при этом вопросов будет далеко не лишним. Так как в технике применяются в основном конечные группы, то изучаем их более подробно. При любом наполнении представляют интерес группы симметрии, матричные группы.

Для упражнений используются группы целых чисел, группы корней из единицы, группы подстановок и т.д.

Затем изучаются кольца и их частный случай — поля. Кроме общих вопросов об идеалах, главных идеалах и т.д., рассматриваются более частные вопросы. Много интересных вопросов возникает при рассмотрении расширения полей, в том числе и конечных. В частности, интересно расширение поля $\mathbb{R}$ до поля $\mathbb{C}$. Подробно рассматриваются кольца вычетов. Следует отметить, что кольца вычетов находят всё большее применение и в последнее время интенсивно изучаются.

К сожалению, такой короткий курс оставляет за рамками изложения много интересных вопросов, в том числе имеющих практическое применение.

Литература

[1] *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру / Э. Фрид — М.: Мир, 1979.

[2] *Александров П.С.* Введение в теорию групп / П.С. Александров — М.: Наука, 1980.

[3] *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы / И. Гроссман — М.: Мир, 1971.

Проективные модули над кольцами псевдоалгебраических чисел[1]

Зиновьев Е.Г. (Томск)

Дадим основное определение данной заметки.

Определение. Пусть P — некоторое бесконечное множество простых чисел. Для каждого $p \in P$ пусть $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, или $R_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Положим $K = \prod\limits_{p\in P} R_p$, $T = \bigoplus\limits_{p\in P} R_p$. Подкольцо R кольца K будем называть кольцом *псевдоалгебраических чисел*, если $T \subset R$ и R/T — некоторое поле алгебраических чисел $\mathcal{F}$.

Если $R_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ для всех простых p и $R/T \cong \mathbb{Q}$, то R называется кольцом псевдорациональных чисел [1–3]. Кольцо псевдоалгебраических чисел R является коммутативным кольцом с единицей. Любой конечно порожденный идеал кольца R является главным и конечно представимым. Любое поле алгебраических чисел реализуется в качестве поля R/T для некоторого кольца псевдоалгебраических чисел R. Всякий R-модуль M равен $A \oplus D$, где подмодуль A не содержит ненулевых $\mathcal{F}$-пространств, а D — наибольший подмодуль в M, являющийся $\mathcal{F}$-пространством.

Рассмотрим некоторую характеризацию проективных R-модулей.

Теорема. *Если A — проективный R-модуль, то существует кардинальное число $\mathfrak{N}$, такое, что*

$$A \oplus T^{\mathfrak{N}} \cong R^{\mathfrak{N}} \oplus TA.$$

Литература

[1] *Крылов П.А.* Об одном классе смешанных абелевых групп / П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова, Е.И. Подберезина // Вестник ТГУ. — Томск. — 2000. — Т. 269. — С. 29-34.

[2] *Fomin A.A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Trends in Math. — 1999. — P. 87-100.

[3] *Царев А.В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80. — № 3. — С. 437-448.

[1]Работа частично профинансирована Федеральным агенством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

Относительная инъективность для абелевых групп[1]

Зиновьев Е.Г., Ярдыков Е.Ю. (Томск)

Относительная инъективность, и двойственное ей понятие относительная проективность, активно изучались в 70–80 годах [1–4]. Они использовались для описания различных классов модулей (квазиинъективных, самоинъективных, π-инъективных и двойственных им модулей), а также эти понятия рассматривались над конкретными кольцами [5].

Определение 1 [1]. Модуль X называется *инъективным относительно модуля* Y (Y-*инъективным*), если для любого $Y' \in Lat(Y)$ каждый гомоморфизм $Y' \to Y$ продолжается до гомоморфизма $Y \to X$.

Рассмотрим понятие относительной инъективности с категорной точки зрения.

Определение 2. Модуль X называется *инъективным относительно модуля* Y (Y-*инъективным*), если для любого $Y' \in Lat(Y)$ и каждого мономорфизма $\alpha : Y' \to Y$, функтор $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_X) : \mathrm{Hom}(Y, X) \to \mathrm{Hom}(Y', X)$ является эпиморфизмом. Здесь $\mathrm{Hom}(\alpha, 1_X)(\beta) = \beta\alpha$, где $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, X)$.

Предложение 1. *Пусть* X, Y *— модули. Если для любого подмодуля* $Y' \in Lat(Y)$ $\mathrm{Hom}(Y', X) = 0$*, то* X *инъективен относительно* Y*.*

Например, каждая p-группа инъективна относительно произвольной q-группы, где p, q — различные простые числа; $\mathbb{Q}_p$ (группа рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p) инъективна относительно класса всех периодических групп.

Зафиксируем модуль X, и будем «собирать» класс модулей $\mathcal{Y}$, относительно которых данный модуль X инъективен. Можно поставить и обратную задачу — для модуля Y найти класс модулей $\mathcal{X}$ инъективных относительно Y. При такой постановке вопроса интересны следующие две теоремы.

Теорема 2 [1,6]. *Все прямые слагаемые и прямые произведения модулей, инъективных относительно данного модуля* Y*,* Y*-инъективны.*

[1]Работа частично профинансирована Федеральным агенством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

Теорема 3 [1,6]. *Класс $\mathcal{Y}$ всех модулей, относительно которых данный модуль X инъективен, содержит все подмодули, гомоморфные образы и прямые суммы модулей из $\mathcal{Y}$.*

Отметим, что класс $\mathcal{X}$ не замкнут относительно бесконечных прямых сумм.

Теорема 4. *Если Y — нетеров модуль и все модули некоторого семейства модулей $\{X_i\}_{i\in I}$ инъективны относительно Y, то $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ — Y-инъективна.*

Далее будем рассматривать $\mathbb{Z}$-модули.

Пусть X, Y — абелевы группы и X_p, Y_p — их p-компоненты, $\mathcal{Y}$ — класс инъективности для X. В силу теоремы 2 можно считать, что X — редуцированая группа. Следующая теорема фактически доказана в [2].

Теорема 5. *Для редуцированной группы X справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс $\mathcal{Y}$ содержит непериодическую группу $\Leftrightarrow$ X — делимая группа.*

2. *Если X — группа без кручения, то $\mathcal{Y}$ — класс всех периодических групп.*

3. *Пусть X — периодическая или смешанная группа, тогда класс $\mathcal{Y}$ состоит из периодических групп Y удовлетворяющих условию, если X_p имеет прямое слагаемое изоморфное $\mathbb{Z}(p^{k_p})$, $k_p \in \mathbb{N}$, то $p^{k_p} Y_p = 0$.*

Например, если $X = \mathbb{Z}(p^k)$, то класс $\mathcal{Y}$ состоит из периодических групп Y таких, что $p^k Y_p = 0$.

Литература

[1] *G. Azumaya, F. Mbuntum, K. Varadarajan*, On M-projective and M-injective modules, Pacific J. Math., 1975, 59, 9 — 16.

[2] *S. Feigelstock, R, Raphael* Some aspects of relative injectivity, Bull. Austral. Math. Soc., 36, 1989, 161 — 170.

[3] *G. Azumaya* M-projective and M-injective modules.

[4] *S. Feigelstock and R. Raphael* Some aspects of relative projectivity, Corm. Algebra, 14, 1986, 1187-1212.

[5] *А.А. Туганбаев* Проективные модули над ограниченными дедекиндвыми кольцами, Фундам. и прикл. математика, 6, 3, 2000, 903 — 911.

[6] *А.А. Туганбаев* Теория колец (Арифметические модули и кольца).

Матрицы Мальцева группы, двойственной группе без кручения конечного ранга

Костромина Ю.В. (Москва)

А.И. Мальцев в своей работе [1] рассматривал только абелевы группы конечного ранга, все элементы которых бесконечного порядка. Он установил соответствие между системами p-матриц и группами, при котором каждой системе изоморфных между собою групп взаимно однозначно соответствует некоторый класс эквивалентных между собою систем совершенных p-матриц.

Цель нашей статьи получить матрицы Мальцева группы, двойственной в смысле Уорфилда (R. Warfield) группе без кручения конечного ранга.

Рассмотрим группу гомоморфизмов $Hom(G, R)$, где G — группа без кручения ранга r, R — аддитивная группа подкольца поля $\mathbb{Q}$. Пусть $char(1_R) = (s_p)$. Обозначим $G^* = Hom(G, R)$ — группа, двойственная в смысле Уорфилда [2] группе G.

Будем рассматривать матрицы Мальцева для одного фиксированного p (т.е. будем считать G — p-примитивной группой, а $R = \mathbb{Q}^{(p)}$). Характеристика $char(1_R)$ в этом случае будем определяться числом s, где s — p-ая компонента характеристики элемента 1_R.

Теорема 1. *Пусть G — абелева группа без кручения конечного ранга с фиксированным базисом $x_1, x_2, ..., x_r$ и G^* — двойственная (по Уорфилду) ей группа с дуальным базисом $x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$, который определяется следующим образом:*

$x_i^*(x_j) = 0$, *если* $i \neq j$;
$x_i^*(x_i) = 1$.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_r$ — целые числа, являющиеся представителями классов вычетов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$. Тогда

$$\frac{a_1x_1^* + a_2x_2^* + ... + a_rx_r^*}{p^s} \in G^* \Longleftrightarrow \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 + ... + \alpha_rb_r = 0,$$

где $b_1, b_2, ..., b_r$ — столбцы p-матрицы Мальцева s-того слоя группы G.

Доказательство. Рассмотрим p-матрицу s-того слоя группы G.

$A_s = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & ... & \beta_{rr} \end{pmatrix}$, где β_{ij} — целые числа, являющиеся представителями классов вычетов по модулю p^s. Обозначим $b_1, b_2, \ldots, b_r$ — столбцы матрицы A_s.

Пусть

$$z_1 = \frac{\beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + ... + \beta_{1r}x_r}{p^s},$$
$$z_2 = \frac{\beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + ... + \beta_{2r}x_r}{p^s},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_r = \frac{\beta_{r1}x_1 + \beta_{r2}x_2 + ... + \beta_{rr}x_r}{p^s}.$$

Заметим, что любое отображение базисных элементов группы G в $\mathbb{Q}$ продолжается до гомоморфизма $f : G \to \mathbb{Q}$. Пусть $y_1, y_2, ..., y_r \in \mathbb{Q}$, тогда равенства $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, ..., f(x_r) = y_r$ задают гомоморфизм f из G в $\mathbb{Q}$. Если образы элементов группы G будут лежать в R, то и гомоморфизм будет в R.

В частности, рассмотрим гомоморфизмы $x_i^*(x_j) = 0$, если $i \neq j$ и $x_i^*(x_i) = 1$.

$x_i^*(z_j) = \dfrac{\beta_{ji}}{p^s} \in R$. Отсюда следует, что гомоморфизмы x_i^* переводят элементы z_i в элементы группы R, значит и вся группа G перейдет в R. Таким образом, мы получили набор гомоморфизмов $x_1^*, x_2^*, ..., x_r^* \in G^*$.

Обозначим $f = \dfrac{a_1x_1^* + a_2x_2^* + ... + a_rx_r^*}{p^s}$, f будет гомоморфизмом, если f образующие элементы переводит в R, то есть $f(z_i) \in R$.

Применим f к $z_1, z_2, ..., z_r$. Получим

$$f(z_1) = \frac{\frac{\beta_{11}a_1}{p^s} + \frac{\beta_{12}a_2}{p^s} + ... + \frac{\beta_{1r}a_r}{p^s}}{p^s} = \frac{\beta_{11}a_1 + \beta_{12}a_2 + ... + \beta_{1r}a_r}{p^{2s}},$$
$$f(z_2) = \frac{\frac{\beta_{21}a_1}{p^s} + \frac{\beta_{22}a_2}{p^s} + ... + \frac{\beta_{2r}a_r}{p^s}}{p^s} = \frac{\beta_{21}a_1 + \beta_{22}a_2 + ... + \beta_{2r}a_r}{p^{2s}},$$

. . . .

$$f(z_1) = \frac{\frac{\beta_{r1}a_1}{p^s} + \frac{\beta_{r2}a_2}{p^s} + ... + \frac{\beta_{rr}a_r}{p^s}}{p^s} = \frac{\beta_{r1}a_1 + \beta_{r2}a_2 + ... + \beta_{rr}a_r}{p^{2s}}.$$

Отсюда следует, что $f(z_i) \in R \Leftrightarrow \beta_{i1}a_1 + \beta_{i2}a_2 + ... + \beta_{ir}a_r \equiv 0(mod p^s)$.

Таким образом, $\frac{a_1x_1^* + a_2x_2^* + ... + a_rx_r^*}{p^s} \in G^*$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 + ... + \alpha_rb_r = 0$. Что и требовалось доказать.

Используя эту теорему, не составит труда вычислить матрицы Мальцева групп двойственных в смысле Уорфилда группам без кручения конечного ранга.

Литература

[1] *Мальцев А.И.* Абелевы группы конечного ранга без кручения // Математический сборник. — 1938. — Т. 4(46). — №1. — С. 45–68.

[2] *Warfield R.B.* Homomorphisms and duality for abelian groups // Jr. Math. Z. — 1968. — V.107. — P. 189–212.

О прямых разложениях p-локальных групп

Красногорский Б.А., Фарукшин В.Х. (Москва)

Два прямых разложения p-локальных групп без кручения называются *эквивалентными*, если между прямыми слагаемыми этих разложений существует биективное соответствие, являющееся изоморфизмом на каждом прямом слагаемом.

Теорема 1. *Существует p-локальная группа без кручения конечного ранга с двумя неэквивалентными разложениями в прямую сумму неразложимых слагаемых.*

Теорема 2. *Существует p-локальная группа без кручения любого бесконечного ранга с неэквивалентными разложениями в прямую сумму неразложимых слагаемых.*

Литература

[1] *Arnold D.* Finite rank torsion-free Abelian groups and rings // Lecture Notes Math., 931, 1982.

Свойства инъективности и проективности $\mathcal{L}$-копериодических локально компактных абелевых групп

Крючков Н.И. (Рязань)

В начале 30-х годов 20 в. Л.С. Понтрягин построил замечательную теорию двойственности для локально компактных абелевых групп. Благодаря ей изучение дискретных и компактных групп представляет по существу одну задачу, а чисто топологические свойства компактных групп выражаются в дуальной категории на алгебраическом языке и обратно. Первые примеры такой взаимосвязи привел сам Л.С. Понтрягин, охарактеризовав размерность, связность и локальную связность компактной группы в алгебраических свойствах группы характеров.

По-видимому, еще больший интерес может представлять задача построения наименьшего в определенном смысле класса локально компактных абелевых групп $\mathcal{X}$, содержащего некоторый класс дискретных абелевых групп $\mathcal{A}$ и класс компактных групп $\mathcal{K}$, состоящий из всех групп, дуальных к группам из класса $\mathcal{A}$. Естественным способом построения такого класса является включение в него всех таких групп, которые содержат открытую компактную подгруппу из класса $\mathcal{K}$, фактор-группа по которой принадлежит $\mathcal{A}$. Это хорошо согласуется как со структурной теорией локально компактных абелевых групп (см., например, [2], теорема 24.30), так и с теорией двойственности.

В соответствии с этой идеей в [1] был введен класс $\mathcal{L}$-копериодических локально компактных абелевых групп.

Все группы, о которых в дальнейшем идет речь являются абелевыми, через L^* обозначается двойственная в смысле Л.С. Понтрягина группа (группа характеров группы L).

Определение 1. Локально компактная абелева группа L называется *$\mathcal{L}$-копериодической*, если $L \cong \mathbf{R}^n \oplus M$, где M содержит компактную открытую подгруппу K такую, что группы K^* и M/K являются дискретными копериодическими группами.

Хорошо известно, что (дискретные) копериодические группы инъективны относительно всех периодически расщепляющихся коротких точных последовательностей. В настоящей работе получено обобщение этого утверждения для класса локально компактных групп.

Определение 2. Короткая точная последовательность локально компактных групп $E : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ называется *c-расщепляющейся*, если расщепляется последовательность $E\tau$, где τ — естественное вложение $\tau : B(Z) \to Z$, а $B(Z)$ — подгруппа состоящая из всех компактных элементов группы Z.

Легко убедиться, что в категории дискретных групп c-расщепляющаяся последовательность — это в точности периодически расщепляющаяся короткая точная последовательность.

Определение 3. Короткая точная последовательность локально компактных групп $E : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ называется *td-расщепляющейся*, если расщепляется последовательность σE, где σ — естественная проекция $X \to X/X_0$, а X_0 — связная компонента нуля группы X .

В категории компактных групп td-расщепляющиеся точные последовательности двойственны периодически расщепляющимся коротким точным последовательностям дискретных групп. В категории дискретных групп td-расщепляющиеся последовательности — это в точности расщепляющиеся короткие точные последовательности.

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема. *Любая локально компактная $\mathcal{L}$-копериодическая группа инъективна относительно всех c-расщепляющихся и проективна относительно всех td-расщепляющихся коротких точных последовательностей локально компактных групп.*

Отметим также, что достаточно широкий класс $\mathcal{L}$-копериодических групп может быть охарактеризован с помощью инвариантов, которые являются кардинальными числами.

Литература

[1] *Крючков Н.И.* Локально компактные копериодические группы // Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Тезисы докладов. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. С. 470.

[2] *Хьюитт, Э.* Абстрактный гармонический анализ / Э. Хьюитт, К. Росс — М.: Наука, 1975.

О ковровых подгруппах групп Шевалле

Нужин Я.Н. (Красноярск)

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней, $G = G(\Phi, K)$ — универсальная группа Шевалле типа Φ над ассоциативным коммутативным кольцом K с единицей. Группа G порождается корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\},\ r \in \Phi.$$

Подгруппы X_r абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{2}$$

Назовем (*элементарным*) *ковром типа* Φ *над* K всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$$

кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js},\ \text{при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{3}$$

где $C_{ij,rs}$ — структурные константы, определяемые коммутаторной формулой Шевалле, а $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$. *Ковровой* подгруппой назовем подгруппу

$$G_{\mathfrak{A}} = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle.$$

Ковер $\mathfrak{A}$ называется *допустимым*, если

$$G_{\mathfrak{A}} \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r).$$

Пример недопустимого ковра ранга 1, то есть когда $\Phi = A_1$, дает известная теорема Л. Диксона. Действительно, пусть $K = GF(p^n)$, где p — нечетное простое число. Если t — собственный элемент поля $GF(p^n)$, причем $t^2 \neq -1$ при $p^n = 9$, то теорема Л. Диксона утверждает, что группа, порожденная корневыми элементами $x_r(1)$ и $x_r(t)$ (в матричном представлении трансвекциями $t_{21}(1)$ и $t_{12}(t)$), совпадает со всей группой Шевалле типа A_1 над полем K. Отсюда вытекает, что ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$ при $\mathfrak{A}_r = \mathbb{Z}_p,\ \mathfrak{A}_{-r} = t\mathbb{Z}_p$ не является допустимым.

Определения (элементарного) ковра, ковровой подгруппы и допустимого ковра для групп Шевалле было дано В.М. Левчуком, им же был поставлен следующий вопрос.

Верно ли, что для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем K необходимо и достаточна допустимость его подковров $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?

В пользу положительного ответа на этот вопрос свидетельствует тот факт, что соотношения (1), коммутаторная формула Шевалле, из которой происходит условие ковровости (2), и соотношения в группах $\langle X_r, X_{-r}\rangle$, $r \in \Phi$, составляют полную систему определяющих соотношений универсальной группы Шевалле над полем.

Пусть M — подгруппа группы G. Возникает следующий естественный вопрос. Будет ли подгруппа, порожденная пересечениями $M \cap X_r$, $r \in \Phi$, ковровой? В общем случае, как показывает указанный ниже пример 1, ответ отрицательный, однако, справедлива

Лемма 1. *Пусть M — подгруппа группы G типа $\Phi = A_l, D_l, E_l$. Тогда подгруппа, порожденная пересечениями $M \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$, является ковровой и определяется допустимым ковром аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$.*

Пример 1. Пусть M — подгруппа группы Шевалле типа B_2 над полем характеристики 2, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где a и b — фундаментальные корни. Тогда $[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1)$, но по отдельности элементы $x_{a+b}(1)$ и $x_{2a+b}(1)$ не лежат в M и, следовательно, M не является ковровой подгруппой.

При $\Phi = A_{n-1}$ группу G можно рассматривать как подгруппу общей линейной группы $GL_n(K)$, порожденную трансвекциями $t_{ij}(t)$, $i \neq j$, $t \in K$. Ковер и ковровая подгруппа впервые были введены Ю.И. Мерзляковым и получили дальнейшее развитие под названием сеть и сетевая подгруппа в работах З.И. Боревича. Набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

кольца K с условием

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jm} \subseteq \mathfrak{A}_{im},\ 1 \leqslant i, j, m \leqslant n, \tag{4}$$

будем называть *полным ковром степени* n *над* K. В этом случае *элементарным ковром степени* n *над* K называется набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\}$$

кольца K с условием

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jm} \subseteq \mathfrak{A}_{im},\ 1 \leqslant i, j, m \leqslant n,\ i \neq j,\ i \neq m,\ j \neq m. \qquad (5)$$

По элементарному ковру $\mathfrak{A}$ степени n над K определяется ковровая подгруппа $G_{\mathfrak{A}} = \langle t_{ij}(\mathfrak{A}_{ij}) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\rangle$. Заметим, что для элементарного ковра диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$ не определяются. Будем говорить, что элементарный ковер *продолжается до полного ковра*, если множества $\mathfrak{A}_{ii}$ можно доопределить таким образом, чтобы выполнялись включения (3). Ясно, что элементарный ковер будет допустимым, если он продолжается до полного ковра. Однако, как показывает следующий пример, не всякий допустимый ковер продолжается до полного ковра.

Пример 2. Элементарный ковер $\mathfrak{A}_{21} = \{0, 1\}$, $\mathfrak{A}_{12} = \{0, a\}$ степени 2 над полем $GF(4) = \{0, 1, a, 1 + a\}$ является допустимым, но не продолжается до полного ковра.

Назовем элементарный ковер $\mathfrak{A}$ *неразложимым*, если все $\mathfrak{A}_{ij}$ ненулевые. Очевидно, из примера 2 можно получить допустимый разложимый элементарный ковер любой степени n, не продолжаемый до полного ковра. Отметим, что любая пара подгрупп аддитивной группы основного кольца K определяет элементарный ковер степени 2, так как условие (4) нетривиально для элементарных ковров начиная со степени 3.

Существует ли неразложимый элементарный ковер степени $n \geqslant 3$, не продолжаемый до полного ковра?

Существует ли неразложимый элементарный ковер степени $n \geqslant 3$ (лиева ранга $l \geqslant 2$), не являющийся допустимым ковром?

Последний вопрос можно рассматривать как усиление указанного выше вопроса В.М. Левчука и в случае локально конечного поля K ответ на него отрицательный, то есть всякий неразложимый элементарный ковер лиева ранга $l \geqslant 2$ над локально конечным полем K является допустимым ковром.

Составленные из тетраэдра и квадратной пирамиды выпуклые m-правильногранники[1]

Омельчук Т.А., Тимофеенко А.В. (Красноярск)

Недавно завершена классификация выпуклых многогранников с правильными или составленными из правильных многоугольников гранями, причём кривизна каждой вершины положительна, т.е сумма сходящихся в ней плоских углов граней меньше 2π, [1]. Открыта пока проблема описания таких многогранников при допущении вершин с нулевой кривизной. Для её решения введены m-правильногранники, $m = 0, 1, 2, \ldots$, [1]. В докладе будут представлены все 0- и 1-правильногранники, которые составлены из правильногранных пирамид M_1 и M_2 с треугольным и квадратным основанием соответственно. Кружок слева от формулы многогранника говорит о наличии в нём вершины с нулевой кривизной, а черта над формулой обозначает, что соответствующий многогранник не обладает такими вершинами, но имеет неправильные грани, составленные из правильных многоугольников.

Предложение. *Каждый 0-правильногранник или 1-правильногранник, составленный не более, чем из восьми 0-правильногранников M_1 и M_2, есть одно из следующих соединений этих пирамид, причём в каждом таком соединении число несоставных слагаемых минимально и в списке k многогранник $S_{k,j}$ расположен на j-м месте:*
2)$M_1 + M_1$, $\overline{M_1 + M_2}$, $M_2 + M_2$; 3)$^\circ S_{2,2} + M_1$, $\overline{S_{2,2} + M_2}$, $^\circ S_{2,2} + M_2'$;
4)$\overline{S_{3,1} + M_2}$, $S_{3,1} + M_2$’, $\overline{S_{3,2} + M_1}$, $\overline{S_{2,2} + S_{2,2}}$, $^\circ S_{2,2} + S'_{2,2}$;
5)$S_{4,1} + M_1$, $S_{4,4} + M_2$; 6)$^\circ S_{5,2} + M_1$, $^\circ S_{5,2} + M_2$,$^\circ S_{4,1} + S_{2,2}$, $^\circ S_{3,3} +^\circ S_{3,3}$;
7)$^\circ S_{6,1} + M_2$, $^\circ S_{4,5} + S_{3,1}$;
8)$^\circ S_{7,2} + M_2$; $^\circ S_{6,1} + S_{2,2}$; $^\circ S_{6,3} + S'_{2,2}$; $^\circ S_{6,3} + S''_{2,2}$; $^\circ S_{5,1} + S_{3,1}$;$^\circ S_{4,2} + S_{4,2}$.

Следствие [1]. *Справедливы равенства:* $^\circ S_{7,2} = M_4$, $\overline{S_{4,4}} = P_{4,30}$.

Литература

[1] *Тимофеенко А.В.* Инволюции конечных групп и выпуклые правильногранники, Автореферат дисс... д.ф.-м.н., Екатеринбург, 2009.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ №09-01-00395, 09-01-00317, 10-01-00509 и КГПУ №08-10-1/НП .

Квадратичные p-локальные группы без кручения конечного ранга

Сафронов Л.В., Фарукшин В.Х. (Бийск, Москва)

Определение. p-локальную абелеву группу без кручения назовем *квадратичной*, если ее p-адическая матрица относительно некоторой максимальной линейно независимой системы (м.л.н.с.) элементов состоит из квадратичных иррациональностей.

Заметим, что p-адическая матрица квадратичной p-локальной группы будет состоять из квадратичных иррациональностей относительно любой м.л.н.с. элементов группы.

Теорема 1. *Для квадратичных p-локальных абелевых групп A и B без кручения конечного ранга имеют место следующие утверждения:*
1) *если $r(A) = r(B) = 2$ и (α) и (β) их p-адические матрицы, то*
 а) $A \cong B \;\Leftrightarrow\; \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$;
 б) $\mathsf{E}(A) \cong \mathsf{E}(B) \;\Rightarrow\; A \cong B$;
 в) $\mathrm{End}\, A \cong \mathrm{End}\,(B) \;\Rightarrow\; A \cong B$;
2) *если $r(A) = 3$ и $r_p(A) = 1$, то либо A разложима и имеет делимое прямое слагаемое ранга* 1, *либо A — неразложима и $\mathsf{E}(\mathrm{A}) \cong \mathbb{Z}_p$;*
3) *если $r(A) = 4$ и $r_p(A) = 1$, то либо A неразложима и $[\mathbb{Q}\mathsf{E}(A)\colon \mathbb{Q}] =$ 1, 2, 4, либо A — разложима и имеет делимое прямое слагаемое ранга* 1 *или* 2.

Теорема 2. *Пусть A и A^* — взаимно двойственные по Арнольду квадратичные p-локальные группы конечного ранга. Если сервантная подгруппа B коранга* 1 *группы A изоморфна плотной подгруппе аддитивной группы поля расщепления группы A, то группа A^* имеет прямое слагаемое p-ранга* 1.

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974., 1977 — Т. 1., 2.

[2] *Arnold D.* Finite rank torsion-free Abelian groups and rings // Lecture Notes Math., 931, 1982.

Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

Сорокин К.С. (Томск)

В 1977 году Николсон предложил следующее определение.

Определение 1[1]. Кольцо называется чистым, если каждый его элемент является суммой обратимого и идемпотентного элементов.

Согласно [5, теорема 3.9] кольцо эндоморфизмов непрерывного модуля является чистым. Так как абелевы группы являются $\mathbb{Z}$-модулями, то этот результат для них также справедлив.

Определение 2[5]. Модуль называется непрерывным, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1. каждый подмодуль модуля — существенный подмодуль в некотором прямом слагаемом модуля;

2. каждый подмодуль модуля, изоморфный прямому слагаемому модуля, сам является прямым слагаемым модуля.

Делимые абелевы группы являются непрерывными $\mathbb{Z}$-модулями, поэтому их кольца эндоморфизмов — чистые кольца. Применяя [4, следствие 3], [1, теорема 21.3], а также [3, теорема 3.11] получаем следующий результат.

Теорема 3. *Группа имеет чистое кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда её редуцированная часть имеет чистое кольцо эндоморфизмов.*

Доказательство. Согласно [1, теорема 21.3] всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы C. Тогда по [3, теорема 3.11]

$$\mathrm{End}(A) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}(D) & \mathrm{Hom}(C,D) \\ \mathrm{Hom}(D,C) & \mathrm{End}(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{End}(D) & \mathrm{Hom}(C,D) \\ 0 & \mathrm{End}(C) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{Hom}(D,C) = 0$, так как для любого $\alpha \in \mathrm{Hom}(D,C)$ образ $\mathrm{im}(\alpha)$ — делимая подгруппа в C, а поскольку C — редуцированная группа, то $\mathrm{im}(\alpha) = 0$, т.е. $\alpha = 0$. Применяя [4, следствие 3], получаем, что $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(D)$ и $\mathrm{End}(C)$ —

чистые кольца. Кольцо $\mathrm{End}(D)$ — чистое. Тогда $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(A)$ — чистое.$\square$

Определение 4[2]. Группа без кручения называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1.

Связь между кольцами эндоморфизмов групп без кручения ранга 1 и подкольцами поля $\mathbb{Q}$ описывает следующее предложение.

Предложение 5[3]. Пусть A — группа без кручения ранга 1. Тогда кольцо $\mathrm{End}(A)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbb{Q}$, порождённому 1 и всеми такими дробями $\frac{1}{p}$ (p– простое), что $pA = A$.

Возникает вопрос, когда подкольцо поля $\mathbb{Q}$ является чистым? Полным ответом на него является следующий результат.

Предложение 6. Подкольцо $R \subset \mathbb{Q}$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $R = \mathbb{Q}_p$ для некоторого простого числа p, либо $R = \mathbb{Q}$.

Здесь и далее через $\mathbb{Q}_p$ обозначается группа или кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p.

Докажем теперь основной результат, который даёт полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов.

Теорема 7. Если B — вполне разложимая группа с редуцированной частью A, то кольцо эндоморфизмов группы B — чистое тогда и только тогда, когда $A = \bigoplus\limits_{p\in\Pi}(\bigoplus\limits_{i=1}^{n_p} A_i{}^p)$, где Π — некоторое множество простых чисел, $A_i{}^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi, i = 1, ..., n_p, n_p \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Достаточность. Для всякого $p \in \Pi$ обозначим через A_p группу $\bigoplus\limits_{i=1}^{n_p} A_i{}^p$. Тогда для любого $p \in \Pi$ имеем $t(A_p) = t(\mathbb{Q}_p) = (\infty, \infty, ..., \infty, 0, \infty, \infty, ...)$, где 0 соответствует простому числу p. Обозначим через t_p тип $t(A_p)$. Так как $A(t_p) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n_p} A_i{}^p$ — вполне инвариантные подгруппы группы A, то $\mathrm{End}(A) \cong \prod\limits_{p\in\Pi} \mathrm{End}(A(t_p))$. Применяя [4, предложение 7], получим, что $\mathrm{End}(A)$— чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(A(t_p))$ — чистое кольцо. Так как $A_i{}^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi, i = 1, ..., n^p$), то из предложения 5 следует, что $\mathrm{End}(A_i{}^p) \cong \mathrm{End}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p$. Применяя предложение 6, получим, что $\mathrm{End}(A_i{}^p)$ — чистое ($p \in \Pi, i = 1, ..., n^p$).

Тогда по [6, теорема 13.69] $\mathrm{End}(A(t_p))$ — чистое кольцо ($p \in \Pi$). Таким образом, $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо. Из теоремы 3 следует, что $\mathrm{End}(B)$ — чистое.

Необходимость. Пусть $\{{e_i}^t\}_{i\in I_t, t\in T}$ — полная ортогональная система идемпотентов, соответствующая каноническому разложению группы $A = \bigoplus\limits_{t\in T}(\bigoplus\limits_{i\in I_t} {A_i}^t)$ (т.е. ${A_i}^t = {e_i}^t A, i \in I_t, t \in T$). Так как ${A_i}^t$ ($i \in I_t$, $t \in T$) — группы ранга 1, то ${e_i}^t$ — примитивные идемпотенты. Из условия и теоремы 3 следует, что $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо. Тогда из [4, предложение 1] получаем, что ${e_i}^t$ — локальные идемпотенты, т.е. ${e_i}^t\mathrm{End}(A){e_i}^t$ — локальное, а значит, чистое кольцо ($i \in I_t, t \in T$). Согласно [3, предложение 3.9] $\mathrm{End}({A_i}^t) = \mathrm{End}({e_i}^t A) \cong {e_i}^t\mathrm{End}(A){e_i}^t$. Тогда $\mathrm{End}({A_i}^t)$ — чистое кольцо ($i \in I_t, t \in T$). По предложению 5 $\mathrm{End}({A_i}^t)$ — подкольцо в $\mathbb{Q}$ ($i \in I_t, t \in T$). Применяя предложение 6, получаем, что $\mathrm{End}({A_i}^t) \cong \mathbb{Q}_{p_t}$ для некоторого простого p_t ($i \in I_t, t \in T$). Тогда по предложению 5 получаем, что ${A_i}^t \cong \mathbb{Q}_{p_t}$ ($i \in I_t, t \in T$). Таким образом, $A = \bigoplus\limits_{p\in\Pi}(\bigoplus\limits_{i\in I_p} {A_i}^p)$, где ${A_i}^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($i \in I_p, p \in \Pi$), Π — некоторое множество простых чисел, причём $\mathrm{End}(A)$ — чистое. Согласно доказательству достаточности, $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(A(t_p))$ — чистое кольцо ($p \in \Pi$), в нашем случае $\mathrm{End}(A(t_p)) = \bigoplus\limits_{i\in I_p} {A_i}^p$. Предположим, что I_p — бесконечное множество. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus\limits_{i\in I_p} {A_i}^p) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}({\mathbb{Q}_p}^{(|I_p|)})$ — чистое кольцо. Так как $\mathbb{Q}_p$ — полулокальное кольцо, применяя [5, теорема 5.2], получим, что $\mathbb{Q}_p$ — правое совершенное кольцо. Тогда по [6, теорема 6.48] $\mathbb{Q}_p$ — полуартиново кольцо. Но $\mathbb{Q}_p$ не является полуартиновым (так как содержит бесконечно убывающую цепь главных идеалов, порожденных элементами вида p^k, $k = 0, 1, ...$). Таким образом, имеем $A = \bigoplus\limits_{p\in\Pi}(\bigoplus\limits_{i=1}^{n_p} {A_i}^p)$, где ${A_i}^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi, i = 1, ..., n_p, n_p \in \mathbb{N}$).$\square$

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1.

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2.

[3] *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп

и их колец эндоморфизмов / П.А. Крылов — Томск: Томский государственный университет, 2002.

[4] *Han J., Nicholson W.K.* Extension of clean rings / J. Han, W.K. Nicholson // Commun. Algebra — 2001. — V.29. — №6. — P. 2589–2595.

[5] *Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y.* Continuous modules are clean / V.P. Camillo // J. Algebra — 2006. — №304. — P. 94–111.

[6] *Туганбаев А.А.* Теория колец / А.А Туганбаев. — М.: МЦНМО, 2009.

Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел[1][2]

Тимошенко Е.А. (Томск)

Пусть P — множество всех простых чисел. Для $p \in P$ символом $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ обозначим кольцо целых p-адических чисел. Введём обозначения

$$K = \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p, \qquad T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p \subset K.$$

В кольце K имеется единственное подкольцо R (содержащее единицу кольца K) такое, что идеал T содержится в R и что факторкольцо R/T изоморфно полю $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Кольцо R (называемое *кольцом псевдорациональных чисел*) было введено в $[1, 2]$ для изучения одного важного класса смешанных абелевых групп. Это кольцо можно также описать как множество всех элементов $(k_p)_{p \in P}$ кольца K таких, что для некоторого $m/s \in \mathbb{Q}$ равенство $sk_p = me_p$ выполнено почти при всех простых p (через e_p здесь обозначена единица кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p$).

Для всякого R-модуля M фактормодуль M/MT представляет собой линейное $\mathbb{Q}$-пространство; размерность этого пространства мы назовём *псевдорациональным рангом* модуля M и обозначим через $r^*(M)$.

Кольцо R, как отмечено в $[1, 2]$, содержит идемпотенты двух типов:

$$e_X = \sum_{p \in X} e_p; \qquad 1 - e_X = 1 - \sum_{p \in X} e_p,$$

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы». Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

[2] Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

где X — конечное (возможно, пустое) подмножество множества P.

Кольцо $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ и его единичный элемент e_p можно естественным образом отождествить с соответствующими идеалом и идемпотентом кольца R. Ясно также, что $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модули можно рассматривать как R-модули.

Первые попытки описания проективных R-модулей предпринимались в работе [3], но не были завершены из-за ошибки в конце доказательства теоремы 3. В указанной работе, в частности, был установлен тот факт, что всякий проективный R-модуль M можно представить в виде

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P} F_p\Big);$$

здесь $M_i = (1-\varepsilon_i)R$, где все ε_i суть некоторые идемпотенты вида e_X, а F_p — это свободные $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модули.

Для любых $i \in I$ и $p \in P$ идеал $M_i e_p$ равен либо $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, либо 0. Получаем, что при любом $p \in P$ модуль Me_p есть свободный $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модуль. Ранг этого свободного модуля (он определён однозначно) будет обозначаться через $r_p(M)$. Итак, всякому проективному модулю M_R мы можем сопоставить кардинальные числа $r^*(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in P}$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in P}$ *— произвольные кардинальные числа, и пусть* $L = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}$. *Проективный модуль* M_R *такой, что справедливы все равенства* $r^*(M) = \mathfrak{M}$ *и* $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$, *существует тогда и только тогда, когда*

(a) *множество* L *конечно*

или

(b) *выполнены следующие четыре условия:*

(b1) $\mathfrak{M}$ *— бесконечный кардинал счётной конфинальности;*

(b2) *множество* L *счётно;*

(b3) *множество* $\{\mathfrak{M}_p \mid p \in L\}$ *(без учёта повторов) может быть представлено в виде возрастающей последовательности кардинальных чисел* $\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 < \ldots < \mathfrak{N}_n < \ldots$, *где* $\sup\{\mathfrak{N}_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathfrak{M}$;

(b4) *для любого* n *множество* $\{p \in P \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ *конечно.*

Если справедливо (a) *или* (b), *то соответствующий проективный модуль* M *определён однозначно с точностью до изоморфизма.*

Замечание. Условие (b1) приведено в теореме скорее для удобства. Его можно опустить, поскольку оно сразу следует из (b3).

Покажем, как можно построить проективный R-модуль M, который соответствует набору кардиналов $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in P}$, обладающему свойством (a) или (b).

Пусть выполнено свойство (a). Положим

$$\lambda_p = \begin{cases} \mathfrak{M}_p, & \text{если } p \in L; \\ 0, & \text{если } \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}; \\ \mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}, & \text{если } \mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}, \end{cases}$$

тогда проективный R-модуль

$$M = \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}}(1 - e_L)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P} F_p\Big),$$

где F_p есть свободный $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модуль ранга λ_p, обладает требуемой системой инвариантов.

Пусть выполнено (b). Обозначим $\mathfrak{N}_0 = 0$ и $\lambda_n = \mathfrak{N}_{n+1} - \mathfrak{N}_n$. Нужной системой инвариантов обладает проективный R-модуль

$$M = \Big(\bigoplus_{n\geqslant 0}\bigoplus_{\lambda_n}(1 - \varepsilon_n)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin L} F_p\Big),$$

где ε_n есть сумма всех e_p таких, что $\mathfrak{M}_p \leqslant \mathfrak{N}_n$ (мы знаем, что множество таких простых p конечно), а F_p — это свободный $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модуль ранга

$$\begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}; \\ \mathfrak{M}_p, & \text{если } \mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Литература

[1] *Fomin A.A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers / A.A. Fomin // Abelian Groups and Modules. — Basel: Birkhäuser, 1999. — P. 87–100. (Trends in Math.).

[2] *Крылов П.А.*, *Пахомова Е.Г.*, *Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп / П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова, Е.И. Подберезина // Вестн. Томского ун-та. Серия «Математика. Кибернетика. Информатика». — 2000. — № 269. — С. 47–51.

[3] *Царёв А.В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел / А.В. Царёв // Мат. заметки. — 2006. — Т. 80, № 3. — С. 437–448.

О количестве почти вполне разложимых групп

Тверетин А.С. (Сургут)

Абелева группа без кручения конечного ранга называется *квазиразложимой*, если она содержит разложимую в прямую сумму подгруппу такую, что фактор-группа по ней конечна. В противном случае группа называется *сильно неразложимой.* Любая квазиразложимая группа G конечного ранга обладает такими подгруппами $\oplus_{i=1}^{n} A_i = A$, что каждая подгруппа A_i сильно неразложима и сервантна в G, а фактор-группа $G/A = T$ — конечная группа. Всякая такая подгруппа A называется полным квазиразложением группы G. Известно [1], что если группы A_i, $i = 1, \ldots, n$, образуют жёсткую систему (в том смысле, что $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots n$), то группа A будет единственным полным квазиразложением группы G. Следовательно, фактор-группа T также определяется однозначно. Поставим следующую задачу: по известному квазиразложению A и фактор-группе T определить число групп G с точностью до изоморфизма. Согласно [1], всякую такую группу назовём (A, T)-группой. Все обозначения и терминология стандартны и взяты из [2], [3], а также [4].

В работе определяется количество (A, T)-групп при условиях, что A является единственным (с точностью до изоморфизма) полным квазиразложением. Данная работа дополняет ранее опубликованные работы автора [5, 6], где группы рассматривались с точностью до равенства.

В работе рассматриваются почти вполне разложимые абелевы группы без кручения, т.е. группы G, у которых каждая подгруппа A_i имеет ранг 1. При этом все подгруппы A_i, $i = 1, \ldots, n$ образуют жёсткую систему групп. Через p обозначается всюду фиксированное простое число.

Каждый автоморфизм φ группы A продолжается до автоморфизма её делимой оболочки D, который мы будем обозначать φ_D, но не обязательно до автоморфизма группы G.

Поскольку группы A_i образуют жёсткую систему, то каждая подгруппа A_i вполне характеристична как в A, так и в G. Следовательно, любой автоморфизм группы A индуцирует автоморфизмы на группах A_i. Последние, в свою очередь, индуцируют автоморфизмы на фактор-группах A_i/pA_i, которые можно представить как умножение на некоторое целое число $r_i = 0, 1, \ldots, p-1$. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & A_i \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_i} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_i} \\ A_i/pA_i & \xrightarrow{r_i} & A_i/pA_i \end{array}$$

где $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$, π_i — проекции, ν_i — естественные эпиморфизмы.

Теорема 1 [1]. *Автоморфизм группы A, индуцирующий тождественные автоморфизмы групп A_i/pA_i, продолжается до автоморфизма G.*

Следующее утверждение является обобщением.

Теорема 2. *Если автоморфизм группы A обладает тем свойсвом, что он индуцирует умножение на одно и то же число r на всех A_i/pA_i, то этот автоморфизм продолжается до автоморфизма группы G, где фактор-группа G/A элементарна, т.е. разлагается в прямую сумму групп $\mathbb{Z}(p)$.*

Лемма. *Предположим, что фактор-группа $G/A \cong \oplus_k \mathbb{Z}(p)$. Тогда подгруппа $A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ сервантна в G тогда и только тогда, когда A_1 не выделяется прямым слагаемым в G.*

Теорема 3. *Если подгруппа $A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ сервантна в G, где фактор-группа $G/A \cong \mathbb{Z}(p^m)$ (т.е. циклическая), то автоморфизм φ группы A, индуцирующий тождественный автоморфизм на A_1/pA_1, но индуцирующий не тождественный автоморфизм хотя бы на одной A_i/pA_i, $i = 2, \ldots, n$, не продолжается до автоморфизма группы G.*

Замечание. *Если автоморфизм группы A не продолжается до автоморфизма группы G, то его продолжение на делимую оболочку переводит G в другую группу.*

При таких условиях каждый автоморфизм группы A удовлетворяет либо условиям теоремы 2, либо на него распространяется следствие теоремы 3.

Теорема 4. *При указанном предположении две неразложимые группы с изоморфными полными квазиразложениями и циклическими факторгруппами, изоморфными $\mathbb{Z}(p^m)$, изоморфны.*

Теорема 4 не обобщается на более высокие ранги фактор-группы; наоборот,

Теорема 5. *Если G_1, G_2 — различные неразложимые группы с общим квазиразложением A, каждая A_i делится на хотя бы один примитивный корень по модулю p, $G_1 \cap G_2 \ncong A$, то G_1 и G_2 не изоморфны.*

Литература

[1] *Кожухов С.Ф.* Конечные группы автоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга // Известия АН СССР, серия математическая, Т.52, №3, 1988. — С. 501–521

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1.

[3] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2.

[4] *Arnold D.* Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings / Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.

[5] *Кожухов С.Ф* Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с циклическим фактором / С.Ф. Кожухов, А.С. Тверетин // Фунд. и прикл. матем. Т.13 вып.3, 2007. — С. 61–67.

[6] *Тверетин А.С.* Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с элементарным фактором // Вестник ТГУ, № 305 — С. 185–187.

Расщепление p-локальных групп без кручения

Фарукшин В.Х. (Москва)

Абелева группа G называется *p-локальной*, если $G = G \otimes \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}_p$ — локализация кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по простому идеалу (p).

Подполе K поля p-адических чисел называется *полем расщепления* группы G, если для плотного подкольца R поля K имеет место изоморфизм $G \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong D \oplus M$, где D — K-пространство, M — свободный R-модуль.

Поле расщепления K и его группа Галуа $G(K/\mathbb{Q})$ являются инвариантами группы G.

Рассматриваются взаимосвязи между этими инвариантами и структурой p-локальной абелевой группы без кручения конечного ранга. В частности, группа Галуа для конечных алгебраических расширений определяет всю совокупность квазисервантно инъективных и квазисервантно проективных прямых слагаемых для данной группы.

Литература

[1] *Lady E.L.* Splitting Fields for Torsion-Free Modules over Discrete Valuation Rings // J. Algebra, 66. p. 281–306, 1980.

О группах, изоморфных своим группам эндоморфизмов

Царев А.В. (Москва)

Пусть группа A изоморфна своей группе эндоморфизмов $\operatorname{End} A$. Тогда изоморфизм $\Phi\colon A \to \operatorname{End} A$ индуцирует на группе A структуру ассоциативного кольца с единицей. При этом, умножение элементов группы определяется следующим образом:

$$a \cdot b = \Phi^{-1}\big(\Phi(a) \cdot \Phi(b)\big).$$

Через L_a и R_a будем обозначать оператор левого и правого умножения на элемент $a \in A$ соответственно, т.е.

$$L_a(b) = a \cdot b \ \text{ и } \ R_a(b) = b \cdot a$$

для любого $b \in A$. В группе $\operatorname{End} A$ рассмотрим подгруппы

$$L_A = \{L_a \mid a \in A\},\ R_A = \{R_a \mid a \in A\},\ K_A = \{\varphi \in \operatorname{End} A \mid \varphi(1_A) = 0\}.$$

Очевидно, что группы L_A и R_A изоморфны группе A, а с группой K_A их связывают следующие соотношения:

$$\operatorname{End} A = L_A \oplus K_A = R_A \oplus K_A. \tag{1}$$

Действительно, если φ — произвольный элемент группы $\operatorname{End} A$, то элемент $\varphi - L_{\varphi(1)}$ лежит в группе K_A, поэтому $\operatorname{End} A = L_A + K_A$. А так как $L_A \cap K_A = 0$, то $L_A + K_A = L_A \oplus K_A$. Аналогично, показывается, что $\operatorname{End} A = R_A \oplus K_A$.

Теорема 1. *Если A — группа без кручения конечного ранга, такая что $A \cong \operatorname{End} A$, то ее кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ коммутативно.*

Доказательство. Из изоморфизма групп A и $\operatorname{End} A$ следует равенство рангов $r(A) = r(\operatorname{End} A)$. Тогда из разложения (1) вытекает, что $K_A = 0$ и, значит, $\operatorname{End} A = L_A = R_A$. Отсюда следует, что для произвольного элемента $a \in A$ существует элемент $b \in A$, такой что $L_a = R_b$. Тогда $a = L_a(1) = R_b(1) = b$, т.е. $L_a = R_a$ для любого $a \in A$, а значит, $\mathsf{E}(A)$ — коммутативное кольцо.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Если A — неразложимая группа, такая что $A \cong \operatorname{End} A$, то ее кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ коммутативно.*

Литература

[1] *Крылов П.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев // М.: Факториал, 2008.

О кольцах квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4

Чередникова А.В. (Кострома)

Рассматриваются только абелевы группы без кручения конечного ранга. Через $\mathbb{Q}$ обозначается поле рациональных чисел. Определения основных понятий теории квазиразложений абелевых групп без кручения конечного ранга можно найти в [1].

Определение 1. *Кольцом квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ группы G называется минимальная рациональная алгебра, содержащая кольцо $E(G)$ эндоморфизмов группы.

Определение 2. *Псевдоцоколем* группы называется сервантная оболочка суммы всех ее минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп.

Кольца квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения рангов 2, 3 описаны в [2, 3, 4, 5]. В работе представлены классификация радикалов Джекобсона колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 4, отличных от своих псевдоцоколей (теоремы 1–3), и классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 3 (теорема 4).

Теорема 1. *Радикал Джекобсона* $\boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G))$ *кольца квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ *сильно неразложимой абелевой группы* G *без кручения ранга* 4*, псевдоцоколь которой имеет ранг* 3*, является с точностью до изоморфизма подалгеброй алгебры* $\mathbf{A_1}$*, где*

$$\mathbf{A_1} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Следствие 1.1. *Если* G *— сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга* 4*, псевдоцоколь которой имеет ранг* 3*, то*

$$1 \leqslant dim_{\mathbb{Q}} \boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G)) \leqslant 3.$$

Теорема 2. *Радикал Джекобсона* $\boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G))$ *кольца квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ *сильно неразложимой абелевой группы* G *без кручения ранга* 4*, псевдоцоколь которой имеет ранг* 2*, является с точностью до изоморфизма подалгеброй алгебры* $\mathbf{A_2}$*, где*

$$\mathbf{A_2} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Следствие 2.1 *Если* G *— сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга* 4*, псевдоцоколь которой имеет ранг* 2*, то*

$$1 \leqslant dim_{\mathbb{Q}} \boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G)) \leqslant 5.$$

Теорема 3. *Радикал Джекобсона* $\boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G))$ *кольца квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ *сильно неразложимой абелевой группы* G *без кручения ранга* 4*, псевдоцоколь которой имеет ранг* 1*, является с точностью до изоморфизма подалгеброй алгебры* $\mathbf{A_3}$*, где*

$$\mathbf{A_3} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Следствие 3.1 *Если G – сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4, псевдоцоколь которой имеет ранг 1, то*

$$1 \leqslant dim_{\mathbb{Q}} \boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G)) \leqslant 6.$$

Теорема 4. *Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4 с псевдоцоколем ранга 3. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_4} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_5} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x, y, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_6} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & t \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2.

[2] *Beamont R.S., Pierce R.S.* Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. 1961. — V.38. P. 1–41.

[3] *Чередникова А.В.* Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули (сборник статей). — Томск: ТГУ — 1996. — Вып.13,14. — С. 237–242.

[4] *Чередникова А.В.* Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули (сборник статей). — Томск: ТГУ — 1996. — Вып.13, 14. — С. 224–236.

[5] *Чередникова А.В.* Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Математические заметки. 1998.— Т.63, Вып.5. — С. 763–773.

E-центр и E-коммутант абелевых групп[1]

Чехлов А.Р. (Томск)

Подгруппу H абелевой группы A назовем *коммутаторно инвариантной*, кратко *ki-подгруппой* (обозначение $H \leqslant ki\, A$), если $[\varphi, \psi]H \subseteq H$ для любых φ, ψ из кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A, где $[\varphi, \psi] = \varphi - \psi$ — коммутатор φ и ψ. Запись $H \leqslant A$ означает, что H — подгруппа в A; а $G \leqslant fi\, A$, что G — вполне инвариантная подгруппа в A. Если a — элемент порядка p^k, то через $e(a) = k$ обозначим его *экспоненту*; A_p — p-компоненту, а $t(A)$ — периодическую часть группы A; $A[p^k] = \{a \in A \,|\, p^k a = 0\}$, причем если A — p-группа, то $A[p^\infty] = A$. Если B, G — группы, $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через $\mathrm{Hom}\,(B, G)X = \sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}(B,G)} fX$ обозначим подгруппу группы G, порожденную всеми гомоморфными образами подмножества X.

E-центром группы A назовем следующую ее подгруппу

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi, \psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi, \psi \in E(A)\}.$$

Если $G \leqslant fi\, A$, то $Z(G) \subseteq Z(A)$; в частности, если кольцо $E(G)$ коммутативно, то $G \subseteq Z(A)$. Если A — такая группа, что все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами и $E(A)$ — некоммутативное кольцо, то $Z(A) = 0$. Если A — группа без кручения, то $Z(A)$ — чистая подгруппа в A, в общем случае это не так. Любая подгруппа в $Z(A)$ будет ki-подгруппой в A.

Обозначим через A' подгруппу группы A, порожденную всеми ее подгруппами вида $[\xi, \eta]A$, т.е. $A' = \langle [\xi, \eta]A \,|\, \xi, \eta \in E(A) \rangle$ (*E-коммутант*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

группы A). Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$, а $Z(A) = A$. Если $a \in A$ и $\xi, \eta \in E(A)$, то через $[\xi, \eta]a$ обозначим *коммутатор* элемента a (соответствующий эндоморфизмам ξ, η). Всякая подгруппа, содержащая A', будет ki-подгруппой в A.

Всегда $Z(A), A' \leqslant fi\, A$. Возможен случай, когда $Z(A) = A'$. Например, если B, C — группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов и $C \leqslant fi\, A = B \oplus C$, причем след B в C совпадает с C, то $A' = C = Z(A)$.

Лемма 1. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, *где* $|\, I\,| > 1$, *и* $G_i = \bigoplus\limits_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$.

1. *Если для любого* $0 \neq a \in A_i$ *каждой группы* A_i *существует* $\varphi \in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)$ *со свойством* $\varphi a \neq 0$, *то* $Z(A) = 0$.

2. $Z(A) = \bigoplus\limits_{i \in I} (Z(A) \cap A_i)$.

3. $\varphi(Z(A) \cap A_i) = 0$ *для любого* $\varphi \in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)$.

4. $Z(A) \cap A_i = B_i$, *где* $B_i = Z(A_i) \cap (\bigcap\limits_{\varphi \in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)} \operatorname{Ker}\varphi)$.

В частности, равенство $Z(A) \cap A_i = Z(A_i)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\varphi(Z(A_i)) = 0$ *для любого* $\varphi \in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)$.

Для гомоморфизма $f\colon A \to B$ не обязательно $f(Z(A)) \subseteq Z(B)$. Кроме того, если $A = \oplus A_i$ ($A = \prod A_i$), где $A_i \leqslant fi\, A$, то $Z(A) = \oplus Z(A_i)$ ($Z(A) = \prod Z(A_i)$). А если $A = \oplus A_i$ ($A = \prod A_i$), где $|\, I\,| > 1$ и $A_i \cong A_j$ при $i, j \in I$, то $Z(A) = 0$.

Следствие 1. *Если* $A = B \oplus C$ *и* $C \leqslant fi\, A$, *то* $Z(A) = G \oplus Z(C)$, *где* $G = Z(B) \cap (\bigcap\limits_{\varphi \in \operatorname{Hom}(B, C)} \operatorname{Ker}\varphi)$.

Следствие 2. *Пусть* $D = t(D) \oplus D_0$ — *делимая группа. Тогда*

1) *если* $t(D) \neq 0$, *то* $Z(D) = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p$, *где* $\Pi = \{p \in P \,|\, r(D_p) = 1\}$ *и* $Z(D) = 0$ *при* $\Pi = \varnothing$;

2) *если* $t(D) = 0$, *то* $Z(D) = D_0$ *при условии, что* $r(D_0) = 1$, *и* $Z(D) = 0$ *при* $r(D_0) > 1$.

Следствие 3. 1. *Если* $A = B \oplus D$ — *нередуцированная группа без кручения, где* D — *ее делимая часть, то* $Z(D) = D$ *при условии, что* $r(D) = 1$, *в противном случае* $Z(A) = 0$.

2. *Если* $T = t(A)$ *и* $A = T \oplus R$ — *расщепляющаяся группа, то* $Z(A) = Z(T)$ *при условии, что* T — *нередуцированная группа, в противном случае* $Z(A) = Z(T) \oplus (Z(R) \cap (\bigcap\limits_{p \in \Pi} p^{m_p} R))$, *где* $\Pi = \{p \in P \,|\, T_p \neq 0\}$,

$m_p = \sup\{e(a)\,|\,a \in T_p\}$.

Теорема 1. *Пусть* $A = B \oplus D$, *где* $D = t(D) \oplus D_0$ — *ненулевая делимая часть группы* A, *и пусть* $G = Z(B) \cap (\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(B,D)} \mathrm{Ker}\varphi)$. *Тогда* G *является периодической подгруппой*, $G = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} G_p$, *а* $Z(A)$ *совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если* $t(D) \neq 0$, *то* $Z(A) = G \oplus (\bigoplus\limits_{p\in K} D_p)$, *где* $K = \{p \in P\,|\,r(D_p) = 1\}$ *и* $\Pi \cap K = \varnothing$;

2) *если* $t(D) = 0$, *то либо* $Z(A) = G$, *либо, если* $r(D_0) = 1$, $Z(A) = G \oplus D_0$.

Если $A = \oplus A_i$, то как следует из следующей леммы может случится так, что $A'_i = 0$, но $A' \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, *где* $|\,I\,| > 1$, *и* $G_i = \bigoplus\limits_{j \in I\setminus\{i\}} A_j$. *Тогда*

1) $A' = \langle \mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i, \mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i, A'_i, G'_i\rangle$;

2) $A' = \bigoplus\limits_{i\in I} A'_i$ *в точности тогда, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)A_i \subseteq A'_j$ *для любых* $i, j \in I$, $j \neq i$.

Следствие 4. *Пусть* $A = B \oplus D$, *где* $D = t(D) \oplus D_0$ — *ненулевая делимая часть группы* A *и* $B \neq 0$. *Тогда* A' *совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если* B — *непериодическая группа, то* $A' = B' \oplus D$;

2) *если* B — *периодическая группа, то*

$$A' = B' \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi} D_p) \oplus (\bigoplus_{p\in K} D_p[p^{m_p}]) \oplus D'_0,$$

где $\Pi = \{p \in P\,|\,r(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P\,|\,r(D_p) = 1$ *и* $B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(b)\,|\,b \in B_p\}$, *а* $D'_0 = 0$ *при* $r(D_0) = 1$ *и* $D'_0 = D_0$ *при* $r(D_0) > 1$.

Лемма 3. *Если* $A = B \oplus G$ *и для любых* $b \in B$, $g \in G$ *найдутся такие* $x \in G$, $y \in B$ *и* $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$, *что* $\varphi y = g$, $\psi x = b$, *то каждый элемент группы* A *является коммутатором.*

Приведем описание E-центров и E-коммутантов некоторых редуцированных групп.

1. Если A — неограниченная сепарабельная p-группа, то $Z(A) = 0$ и $A' = A$.

Допустим, что $a \in A$. Тогда a можно вложить в прямое слагаемое B группы A, являющееся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку G — неограниченная группа, то существует гомоморфизм $f\colon B \to G$ со свойством $fa \neq 0$, что влечет $a \notin Z(A)$. А поскольку G — неограниченная группа, то $\mathrm{Hom}(G, B)G = B$. Поэтому $B \subseteq A'$.

Для произвольной редуцированной p-группы A возможен случай, когда $Z(A) \neq 0$; действительно, если, например, подгруппа A^1 циклическая, то $Z(A) = A^1$.

2. Пусть A — ограниченная p-группа, $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$, где B_i — прямые суммы некоторого числа копий группы $Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \cdots < k_m$ и $i = 1, \ldots, m$. Тогда $Z(A) = p^{k_{m-1}} B_m$ и $A' = A[p^{k_{m-1}}]$, если B_m — циклическая группа и $Z(A) = 0$, $A' = A$ в противном случае.

3. Пусть A — сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда $Z(A) = \sum\limits_{t \in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ — множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $r(A(t)) = 1$, т.е. $Z(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы A. А A' совпадает с суммой тех прямых слагаемых A_i ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа $\leqslant t(A_i)$.

4. Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа, где A_i — группы без кручения ранга 1. Тогда $Z(A) = \prod\limits_{j \in J} A_j$, где J — множество всех таких $j \in I$, что $r(A(t(A_j))) = 1$ при $j \in J$, т.е. $Z(A)$ совпадает с прямым произведением всех вполне инвариантных подгрупп A_j. А $A' = \prod\limits_{k \in K} A_k$, где K — множество всех таких $k \in I$, что в $I \setminus \{k\}$ найдется подгруппа A_s со свойством $t(A_s) \leqslant t(A_k)$.

5. Пусть $A = \prod A_p$ — алгебраически компактная группа без кручения, где A_p — p-адические компоненты группы A. Тогда $Z(A) = \prod\limits_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid A_p$ — неразложимая группа$\}$. А $A' = \prod\limits_{p \in K} A_p$, где $K = \{p \in P \mid A_p$ — разложимая группа$\}$.

Несложно показать, что в группе A каждая ее подгруппа является ki-подгруппой тогда и только тогда, когда $E(A)$ — коммутативное кольцо.

Лемма 4. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, $\pi_i\colon A \to A_i$ *— соответствующие про-*

екции, и $H \leqslant A$. *Тогда*

1) $H \leqslant ki\, A$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)\pi_i H \subseteq H \cap A_j$ *и* $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ *для любых* $\varphi_i, \psi_i \in E(A_i)$, *где* $i, j \in I$ *и* $j \neq i$;

2) *если* $B_i \leqslant ki\, A_i$, *то* $B = \bigoplus\limits_{i \in I} B_i \leqslant ki\, A$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)B_i \subseteq B_j$ *для всех* $i, j \in I$, *где* $j \neq i$;

3) *если* $A_i \leqslant fi\, A$ *и* $B_i \leqslant A_i$, *то* $B = \bigoplus\limits_{i \in I} B_i \leqslant ki\, A$ *в том и только в том случае, когда* $B_i \leqslant ki\, A_i$ *для всех* $i \in I$;

4) ki*-подгруппа* H *группы* A *являются ее* fi*-подгруппой в том и только в том случае, когда* $\pi_i H = H \cap A_i$ *и* $H \cap A_i \leqslant fi\, A_i$ *для каждого* $i \in I$.

Легко строятся примеры ki-подгрупп, не являющиеся fi-подгруппами.

Пример 1. Пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $H = \langle a + pb \rangle$. Несложно проверяется, что $H \leqslant ki\, A$. Однако $H \nleqslant fi\, A$.

Несложно проверяется, что если $H \leqslant fi\, G$ и $G \leqslant ki\, A$, то $H \leqslant ki\, A$; если $H \leqslant ki\, G$ и $G \leqslant fi\, A$, то $H \leqslant ki\, A$. Как показывает следующий пример, может случиться так, что $H \leqslant ki\, G$, $G \leqslant ki\, A$, но $H \nleqslant ki\, A$.

Пример 2. Пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $o(c) = p^8$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$, $x = a + pb$, $y = p^2 c$ и $G = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$. Если $\pi_a \colon A \to \langle a \rangle$, $\pi_b \colon A \to \langle b \rangle$, $\pi_c \colon A \to \langle c \rangle$ — проекции, то $\pi_a(G) = \langle a \rangle$, $\pi_b(G) = \langle pb \rangle$, $\pi_c(G) = \langle p^2 c \rangle$. Поэтому

$$\begin{gathered}
\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)(\pi_a(G)) = \langle p^2 b \rangle \subseteq G \cap \langle b \rangle = \langle p^2 b \rangle, \\
\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle c \rangle)(\pi_a(G)) = \langle p^7 c \rangle \subseteq G \cap \langle c \rangle = \langle p^2 c \rangle, \\
\mathrm{Hom}(\langle b \rangle, \langle a \rangle)(\pi_b(G)) = 0 = G \cap \langle a \rangle, \\
\mathrm{Hom}(\langle b \rangle, \langle c \rangle)(\pi_b(G)) = \langle p^6 c \rangle \subseteq G \cap \langle c \rangle = \langle p^2 c \rangle, \\
\mathrm{Hom}(\langle c \rangle, \langle a \rangle)(\pi_c(G)) = 0 = G \cap \langle a \rangle, \\
\mathrm{Hom}(\langle c \rangle, \langle b \rangle)(\pi_c(G)) = \langle p^2 b \rangle \subseteq G \cap \langle b \rangle = \langle p^2 b \rangle.
\end{gathered}$$

Следовательно, $G \leqslant ki\, A$. Если теперь $H = \langle x + p^2 y \rangle$, то аналогично проверяется, что $H \leqslant ki\, G$. Однако $H = \langle a + pb + p^4 c \rangle \nleqslant ki\, A$, поскольку $\pi_a(H) = \langle a \rangle$ и $\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)\langle a \rangle = \langle p^2 b \rangle \nsubseteq H$.

Лемма 5. *Если* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, *где* $|\, I \,| > 1$, *и* $A_i \cong A_j$ *при* $i, j \in I$, *то каждая* ki*-подгруппа группы* A *является вполне инвариантной.*

Теорема 2. *Пусть* $A = B \oplus D$, *где* $D = t(D) \oplus D_0$ — *делимая часть группы* A *и* $H \leqslant A$. *Тогда* $H \leqslant ki\, A$ *в том и только в том случае, когда*

H совпадает с одной из следующих подгрупп:

1) $H = F \oplus (\bigoplus_p D_p[p^{k_p}])$, *где F — периодическая ki-подгруппа группы B и $k_p \geqslant \sup\{e(b) \mid b \in F_p\}$;*

2) $H = G \oplus (\bigoplus_{p\in K} D_p[p^{k_p}])$, *где G — периодическая ki-подгруппа в группе $B \oplus D_1$, где $D_1 = \bigoplus_{p\in\Pi} D_p$ — такая группа, что $r(D_p) = 1$ для каждого $p \in \Pi$ (Π — некоторое множество простых чисел со свойством $K \cap \Pi = \varnothing$), $[\varphi, \psi]G \subseteq (G \cap B) \oplus (G \cap D_1)$ для любых $\varphi, \psi \in E(B \oplus D_1)$ и $k_p \geqslant \sup\{e(g) \mid g \in G_p\}$;*

3) $H = C \oplus D$, *где $C \leqslant ki\, B$;*

4) $H = E \oplus t(D)$, $r(D_0) = 1$ *и E — ki-подгруппа в группе $B \oplus D_0$ такая, что πE — периодическая группа и $[\varphi, \psi]E \subseteq E \cap B$ для любых $\varphi, \psi \in E(B \oplus D_0)$, где π — проекция группы A на B.*

Теорема 3. 1. *В разложимой редуцированной сепарабельной группе без кручения A все ki-подгруппы являются вполне инвариантными тогда и только тогда, когда для каждого прямого слагаемого B ранга 1 группы A в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое G, изоморфное B.*

2. *В редуцированной алгебраически компактной группе без кручения A каждая ее ki-подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда все p-адические компоненты группы A разложимы.*

Теорема 4. *Пусть $A = B \oplus C$.*

1. *Наименьшая ki-подгруппа группы A, содержащая C, является вполне инвариантной и совпадает с:*

а) $\mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$;

б) *суммой G всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

2. *Наибольшая ki-подгруппа группы A, содержащаяся в C, является вполне инвариантной и совпадает с:*

а) $K = \bigcap_{\varphi\in \mathrm{Hom}(C,B)} \mathrm{Ker}\varphi$;

б) *пересечением N всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

E-разрешимые абелевы группы[1]

Чехлов А.Р. (Томск)

Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b. Если $a_1, \ldots, a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1, \ldots, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n]$.

Группу A назовем *E-нильпотентной* класса n, если $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}] = 0$ для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in E(A)$ и $[\beta_1, \ldots, \beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_n \in E(A)$; другие обозначения и определения см. в статье «E-центр и E-коммутант абелевых групп» (данный сборник). Ряд свойств коммутаторов приведен в [1–4].

Очевидно, что если $H \leqslant ki\, A$ и $H \cap A' = 0$, то $H \subseteq Z(A)$. Поэтому если H — минимальная ki-подгруппа, то $H \subseteq A'$ или $H \subseteq Z(A)$. В частности, если A порождается минимальными ki-подгруппами, то $A = A' + Z(A)$.

Определим по индукции $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A', \ldots, A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ и $A^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\rho<\alpha} A^{(\rho)}$ при предельном ординале α.

В группе без кручения A любая ki-подгруппа ранга 1 лежит в E-центре. E-центр группы без кручения — чистая подгруппа, а E-коммутант может не быть чистой подгруппой.

Напомним, что кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны.

Группу назовем *E-энгелевой*, класса $\leqslant n$, если $[\alpha, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}] = 0$ для любых ее эндоморфизмов α, β. Доказано, что в E-энгелевой группе A все ее прямые слагаемые вполне инвариантны. В частности, кольцо $E(A)$ нормальное.

Группу A назовем *E-разрешимой*, если $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое n назовем *классом E-разрешимости* группы A. Прямые слагаемые E-разрешимой группы являются E-разрешимыми группами.

E-разрешимые группы класса $\leqslant n$ являются подклассом класса BL_n групп — групп A со свойством $[\varphi, \psi]^n = 0$ для всех $\varphi, \psi \in E(A)$. Внимание автора на класс BL_2 обратил профессор П.А. Крылов. Группы из класса BL_2 изучались в [1, 3] и в др. работах автора.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

Доказано, что для каждого n существуют E-разрешимые группы класса n, не являющиеся E-нильпотентными. Показано, что всякая E-энгелева группа класса $\leqslant 2$ является E-нильпотентной класса $\leqslant 2$. Будем говорить, что группа A принадлежит классу BL, если $[\alpha, \beta]^n = 0$ для любых $\alpha, \beta \in E(A)$ при некотором n, зависящим, вообще говоря, от этих элементов. Класс BL содержит класс всех E-разрешимых групп. Доказано, что эти классы различны.

Лемма 1. *Для группы A следующие условия эквивалентны*:

1) A — *E-разрешимая группа класса* $\leqslant n$;

2) $[\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \dots [\alpha_1, \alpha_2] = 0$ *для любых* $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in E(A)$;

3) $A^{(n-1)} \subseteq Z(A)$.

Из определения также следует, что если A — E-разрешимая группа, то $Z(A) \neq 0$; кроме того, если $0 \neq H \leqslant ki\, A$, то $H \cap Z(A) \neq 0$.

Если $H \leqslant ki\, A$ и $R = E(A)$, то положим

$$Z_R(A/H) = \{\overline{a} \in A/H \mid [\alpha, \beta]\overline{a} = 0 \text{ для всех } \alpha, \beta \in R\}.$$

Если $H \subseteq A$, то через $N_R(H) = \{a \in A \mid [\alpha, \beta]a \in H$ для всех $\alpha, \beta \in R\}$ обозначим *E-нормализатор* подмножества H в группе A. Индекс R иногда будем опускать. Инвариантность подгруппы H влечет инвариантность $N(H)$. Ясно, что $H = N(H)$ для $H \leqslant A$ в точности тогда, когда $H \leqslant ki\, A$ и A/H — *коммутаторно точная* факторгруппа, т.е. для любого $0 \neq \overline{a} \in A/H$ найдутся $\varphi, \psi \in E(A)$ со свойством $[\varphi, \psi]\overline{a} \neq 0$.

Ряд $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots \subseteq A_{i+n} \subseteq \dots$ подгрупп A_i ($i \in I$) группы A назовем *E-центральным*, если $A_i \leqslant ki\, A$ и $A_{i+1}/A_i \subseteq Z_R(A/A_i)$ (эквивалентно, $A_{i+1} \subseteq N_R(A_i)$) для всех $i \in I$. Если же $A_i \leqslant ki\, A$ для всех $i \in I$, то ряд назовем *E-нормальным*.

Если A — группа, $R = E(A)$, то положим по индукции

$$Z_0(A) = 0,\ Z_1(A) = Z(A),\ \dots, Z_i(A)/Z_{i-1}(A) = Z_R(A/Z_{i-1}(A))$$
$$\text{и } Z_\alpha(A) = \bigcup_{\rho<\alpha} Z_\rho(A) \text{ при предельном ординале } \alpha.$$

Обозначим для краткости $Z_\alpha = Z_\alpha(A)$. Ряд $0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_\alpha \subseteq \dots$ назовем *верхним E-центральным* рядом группы A. Подгруппы Z_α назовем *E-гиперцентрами* группы A. Все E-гиперцентры являются вполне инвариантными подгруппами. В группе без кручения все E-гиперцентры являются чистыми подгруппами, поэтому все факторы верхнего E-центрального ряда также группы без кручения.

Если $H \subseteq A$, то подгруппу $\langle [\varphi, \psi]h \mid h \in H, \varphi, \psi \in E(A) \rangle$ назовем *E-коммутантом* подмножества H в A и обозначим через $[H, A]$. Если $H \leqslant ki\, A$, то $[H, A] \leqslant ki\, A$, а если $H \leqslant fi\, A$, то $[H, A] \leqslant fi\, A$. Всегда $[B+C, A] = [B, A]+[C, A]$ для $B, C \leqslant A$. Обозначим $[H, A]_1 = \langle H \rangle + [H, A]$ и $[H, A]_{n+1} = [H, A]_n + [[H, A]_n, A]$ при $n \geqslant 1$. Тогда $\overline{H} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [H, A]_n$ — наименьшая ki-подгруппа, содержащая H. Действительно, $\overline{H} \leqslant ki\, A$ и всякая ki-подгруппа, содержащая H, содержит и $\overline{H}$. Инвариантность H влечет инвариантность $\overline{H}$.

Положим по индукции $L_1(A) = A$, $L_{i+1}(A) = [L_i(A), A]$ и $L_\alpha = \bigcap\limits_{\rho<\alpha} L_\rho(A)$, если α — предельное порядковое число. Отметим, что $L_n(A) = A^{(n-1)}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $L_\alpha(A) \leqslant fi\, A$ для каждого ординала α.

Заметим, что

$$L_{n+1}(A) = \langle [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \ldots [\alpha_1, \alpha_2]a \mid a \in A, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(A) \rangle,$$

а $Z_n(A) = \{a \in A \mid [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \ldots [\alpha_1, \alpha_2]a = 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(A)\}$.

Если $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = A$ — E-центральный ряд, то получаем включения $A_i \subseteq Z_i$ и $L_i \subseteq A_{n-i+1}$, где $L_i = L_i(A)$. Ряд $L_1(A) \supseteq L_2(A) \supseteq \ldots$ назовем *нижним E-центральным* рядом группы A. Из вышеприведенных включений следует, что в E-разрешимой группе верхний и нижний E-центральные ряды обрываются, причем их длины равны классу E-разрешимости группы. В частности, в E-разрешимой группе все ее E-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает с классом E-разрешимости группы.

Хотя верхний и нижний E-центральные ряды E-разрешимой группы имеют одинаковую длину, они сами не обязаны совпадать.

Лемма 2. *Для группы A равносильны условия*:

1) *A — E-разрешимая группа класса n*;

2) *$Z_n(A) = A$ и $Z_{n-1}(A) \neq A$*;

3) *$L_{n+1}(A) = 0$, но $L_n(A) \neq 0$.*

Предложение 1. *Если A — E-разрешимая группа класса n, то для любой ее подгруппы H ряд последовательных E-нормализаторов достигает A не позже чем через n шагов. В частности, всякая ki-подгруппа E-разрешимой группы входит в некоторый E-центральный ряд.*

ki-подгруппу H группы A назовем *E-малой*, если из $A = H + S$, где S — некоторая ki-подгруппа, следует, что $S = A$.

Элемент $x \in A$ назовем *E-необразующим*, группы A, если $\overline{\langle x \rangle}$ — E-малая подгруппа. Очевидно, что любая ki-подгруппа, содержащаяся в E-малой подгруппе, является E-малой; сумма конечного числа E-малых подгрупп является E-малой подгруппой. В силу сказанного сумма всех E-малых подгрупп совпадает с множеством E-необразующих элементов группы A.

Обозначим через $C(A)$ пересечение всех максимальных ki-подгрупп группы A, если они существуют, и $C(A) = A$ в противном случае. Доказано, что множество S всех E-необразующих элементов группы A совпадает с подгруппой $C(A)$.

Предложение 2. *Если A — E-разрешимая группа и H — ее ki-подгруппа с условием $H + A' = A$, то $H = A$. В частности, $A' \subseteq C(A)$.*

ki-подгруппу P группы A назовем *E-полупервичной*, если для любой подгруппы B группы A из включения $[B, A] \subseteq P$ следует, что $B \subseteq P$. Отметим, что включение $[B, A] \subseteq P$ эквивалентно включению $[\overline{B}, A] \subseteq P$. Пересечение всех E-полупервичных подгрупп группы A обозначим через $P(A)$. Из определения следует, что $Z_n(A) \subseteq P(A)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, в частности, $A = P(A)$ для E-разрешимой группы A.

Элемент a группы A назовем *строго E-нильпотентным*, если любой последовательности $\{\alpha_n \in E(A) \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдется такой номер m, что $[\alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}] \ldots [\alpha_1, \alpha_2]a = 0$. Следующий результат является аналогом характеризации Левицкого первичного радикала кольца.

Предложение 3. *$P(A)$ состоит из строго E-нильпотентных элементов.*

Поскольку $Z(A) \subseteq P(A)$, то условие $P(A) = 0$ влечет $Z(A) = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть $a_0 = a \neq 0$. По условию найдутся такие $\alpha_n, \beta_n \in E(A)$, что $a_{n+1} = [\alpha_n, \beta_n]a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, т.е. элемент a не является строго E-нильпотентным. Из предложения 3 следует также, что если $P(A) = 0$, то 0 — единственная среди подгрупп H группы A со свойством $L_n(H) = 0$ для некоторого n, где $L_n(H) = [L_{n-1}(H), A]$ при $n \geqslant 2$, а $L_1(H) = H$.

Всякая E-разрешимая группа не содержит прямые слагаемые, разложимые в прямые суммы изоморфных групп. Поэтому делимая группа D является E-разрешимой тогда и только тогда, когда все ее ненулевые p-компоненты имеют ранг 1, а часть без кручения либо нулевая, либо также имеет ранг 1 (такая группа $D \in BL_2$).

Предложение 4. *Если* A — E*-разрешимая группа класса* $\leqslant 2$, *то каждая ее ненулевая* p*-компонента* A_p *есть либо циклическая группа, либо прямая сумма циклической группы* B_p *и группы* Z_{p^∞}, *причем в последнем случае, если* $B_p \neq 0$, *то* $A/A_p = p(A/A_p)$.

Предложение 5. *Если* A — *периодическая группа, то следующие условия эквивалентны*:

1) A — E*-разрешимая группа класса* $\leqslant 2$;

2) $A \in BL_2$;

3) *каждая ненулевая* p*-компонента группы* A *есть либо циклическая группа, либо прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической группы и группы* Z_{p^∞}. *В частности, если* A *редуцированна, то ее кольцо эндоморфизмов коммутативно.*

Теорема 1. *Если* $0 \neq D$ — *делимая часть группы* A, $A = B \oplus D$, *то* A — E*-разрешимая группа класса* $\leqslant 2$ *тогда и только тогда, когда*

1) *каждая группа* B, D *является* E*-разрешимой класса* $\leqslant 2$;

2) E*-коммутант* B' *группы* B *периодичен*;

3) *если* $D_p, B_p \neq 0$, *то* $B/B_p = p(B/B_p)$;

4) $0 \neq t(D) \neq D$ *влечет периодичность* B, *в этом случае* A *имеет строение* $A = (\bigoplus\limits_{p\in\Pi} A_p) \oplus D_0$, *где* Π — *некоторое множество простых чисел, каждая* A_p *есть или циклическая группа, или прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической* p*-группы и группы* Z_{p^∞}, *а* $D_0 \cong \mathbb{Q}$.

Теорема 2. *Пусть* $A = t(A) \oplus R$ — *расщепляющаяся смешанная группа с ненулевой делимой частью* $D = t(D) \oplus D_0$. *Запишем* A *в виде* $A = T \oplus B \oplus t(D) \oplus D_0$, *где* $t(A) = T \oplus t(D)$. *Группа* A E*-разрешима класса* $\leqslant 2$ *в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия*:

1) $t(D) \cong \bigoplus\limits_{p\in\Pi} Z_{p^\infty}$, *а* $r(D_0) \leqslant 1$;

2) $T = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} T_p$, *где каждая* T_p — *некоторая ненулевая циклическая* p*-группа*;

3) *кольцо* $E(B)$ *коммутативно и* $pB = B$ *при* $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$;

4) *если* $B, D_0 \neq 0$, *то* $t(D) = 0$.

Получен ряд других результатов, так показано, что если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ — группа без кручения, то A — E-разрешимая группа класса 2 в том и только в том случае, когда $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца; описаны E-разрешимые сепарабельные, векторные группы без кручения класса $\leqslant 2$ и др.

Литература

[1] *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томск. ун-та. Математика и механика, № 2(6) (2009), 78–84.

[2] *Чехлов А.Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томск. ун-та. Математика и механика, № 2(6) (2009), 85–99.

[3] *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика, 48:4 (2009), 520–539.

[4] *Чехлов А.Р.* E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томск. ун-та. Математика и механика, № 1(9) (2010), 59–71.

Generalized congruence subgroups of the Chevalley groups[1]

Zyubin S. (Tomsk)

It is well known that a principal congruence subgroup of the Chevalley group modulo quasiregular ideal is decomposed into product of diagonal and two opposite unipotent subgroups. It follows that all relations in a such congruence subgroup are standard. (We say that a relation is standard if it is consequence of relations in a base ring, the diagonal subgroup, the root subgroups, Chevalley's commutator formula, and the formula for commutator of root and diagonal elements.) Here we establish similar factorizations and defining relations for elementary carpet subgroups.

Let K be a commutative ring. A system $\sigma = \{\sigma_r \mid r \in \Phi\}$ of additive subgroups of K is called an elementary carpet of type Φ if the following is held

$$C_{ijrs}(\sigma_r)^i(\sigma_s)^j \subseteq \sigma_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi, \quad i, j > 0,$$

[1]This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 09-01-00717 and by the Russian Federal Target Program "Scientific, Academic, and Teaching Staff of Innovative Russia" for 2009-13.

where $(\sigma_r)^i = \{a^i \mid a \in \sigma_r\}$ and C_{ijrs} are constants from Chevalley's commutator formula [1]. Note that if for an elementary carpet σ one changes σ_r by trivial additive subgroups for all $r \in \Phi^+$ (or all $r \in \Phi^-$) then one gets also an elementary carpet. We denote it by σ^+ (respectively by σ^-).

An elementary carpet subgroup is a subgroup $E(\Phi, \sigma) = \langle x_r(\sigma_r) | r \in \Phi\rangle$ of the Chevalley group $\Phi(K)$ of normal type Φ.

An elementary carpet σ of type Φ over K is called Φ-*radical*, if for every $r \in \Phi$:

(i) $1-\sigma_r\sigma_{-r}$ belongs to the group K^*, generating multiplicative subgroup Δ_r such that $\Delta_r\sigma_r \subseteq \sigma_r$;

(ii) ${\Delta_r}^{(h_r,s)}\sigma_s \subseteq \sigma_s$ for all $s \in \Phi$ and co-root $h_r = 2r/(r,r)$.

Theorem 1. *Let $\Phi(K)$ be the Chevalley group of type Φ over commutative ring K and σ Φ-radical elementary carpet of type Φ over K. Denote $H(\Phi, \sigma) = \langle h_r(\Delta_r) \mid r \in G\rangle$. Then*

$$E(\Phi, \sigma) = E(\Phi, \sigma^+)H(\Phi, \sigma)E(\Phi, \sigma^-).$$

The factorization above doesn't hold for principal congruence subgroups over not quasiregular ideal, but it is still possible to find defining relations for wider class of principal congruence subgroups.

Theorem 2. *Let I be an ideal of a commutative ring K with a unit, $\operatorname{rad} I$ the Jacobson radical of I as a ring, and the factor ring $I/\operatorname{rad} I$ be isomorphic to direct product of fields. Then any relation in a congruence subgroup $\Phi(K, I)$ of the Chevalley group $\Phi(K)$ of normal type Φ is standard.*

Analogous results hold for the twisted Chevalley groups with slightly more lengthy conditions.

Bibliography

[1] *Carter R.* Simple groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972.

Абелевы группы

Материалы Всероссийского симпозиума,
посвященного 95-летию Л.Я. Куликова
(Бийск, 19–25 августа 2010 г.)

ISBN 5-85127-359-3

Ответственный редактор В.Х. Фарукшин

Сдано в набор 01.08.2010. Подписано к печати 14.08.2010. Формат $60 \times 90/16$.
Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. $4,25$. Тираж 100 экз.
Заказ 1808, с. (сп.) 1129

Редакционно-издательский отдел Алтайской государственной академии образования им. В.М. Шукшина — 659333, г. Бийск, ул. Короленко, 53.

Типография Алтайской государственной академии
образования им. В.М. Шукшина — 659333, г. Бийск, ул. Короленко, 55/1.