Министерство образования и науки Российской Федерации
Алтайская государственная академия образования
им. В.М. Шукшина
Московский педагогический государственный университет
Томский государственный университет

Абелевы группы

Материалы Всероссийского симпозиума
(Бийск, 20-25 августа 2012 г.)

АГАО им. В.М. Шукшина
Бийск — 2012

ББК 22.14
А 14

А 14 **Абелевы группы** [Текст]: материалы Всероссийского симпозиума (Бийск. 20-25 августа 2012 г.)/ Отв. ред. В.Х. Фарукшин. — Бийск: ФБГОУ ВПО «АГАО», 2012. — 63 с.

Сборник содержит материалы участников Пятого Всероссийского симпозиума «Абелевы группы», состоявшегося в г. Бийске 20-25 августа 2012 г.

Адресован специалистам по теории абелевых групп, модулей, колец, алгебр и их приложений.

ISBN 978-5-85127-704-7

СОДЕРЖАНИЕ

Определяемость конечных абелевых групп группами своих умножений

Агафонов А. А., Камара Али, Себельдин А. М.
(Нижний Новгород)

В работе рассматривается вопрос определяемости конечной абелевой группы ее группой умножений.

Определение. Группа A *определяется группой своих умножений* $MultA$ в классе $\mathbf{X}$ если в $\mathbf{X}$ не существует B такой, что $MultA \cong Mult$B и $A \ncong B$.

Пусть A — конечная группа. Тогда A представима в виде

$$A = A_{\mathrm{p}_1} \oplus A_{\mathrm{p}_2} \oplus \cdots A_{\mathrm{p}_k},$$

где

$$A_{\mathrm{p}_1} = \oplus_{\alpha(p_1;A)} Z(p_1) \oplus_{\alpha(p_1^2;A)} Z(p_1^2) \cdots \oplus_{\alpha(p_1^n;A)} Z(p_1^n).$$

То есть А $= \oplus_{n(p_i)} \oplus_k \oplus_{\alpha(p_i;k;A)} Z(p_i^k)$, где $n(p_i)$ множество различных р из $Z(p^a)$ (а —любое) в разложении A.

Теорема 1. *Любая конечная группа A выделяется прямым слагаемым в* $MultA$.

Теорема 2. *Любая конечная группа определяется группой своих умножений в классе конечных групп.*

Доказательство. Пусть $A = A_{\mathrm{p}_1} \oplus A_{\mathrm{p}_2} \oplus \cdots A_{\mathrm{p}_k}$. Из теоремы 1 следует, что $MultA \cong A \oplus A$'. Значит $MultA$ содержит все $Z(p_i^k)$ из А и только их.

Пусть существует В такое, что $MultA \cong MultB$. Тогда $MultB$ — содержит все $Z(p_i^k)$ из A и только их.

Для любого р рассмотрим прямое слагаемое $A_{p_i} = \oplus_{1 \leq k \leq m} \oplus_{n(k)} Z(p_i^k)$, где m — максимальная степень $Z(p_i^k)$. Тогда $MultA \cong \oplus_{n^3(m)} Z(p_i^m) \cong MultA/Z(p_i^m) \cong MultB$. Таким образом, $B \cong \oplus_{n(m)} Z(p_i^m) \oplus B/Z(p_i^m)$.

То есть количество слагаемых с максимальной степенью при p_i в группах A и B равно. Аналогично докажем для степени $m-1$ и так далее. Получим $A \cong B$.

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*
1) $MultA \cong A$;
2) $\forall i, r(A_{p_i}) = 1$;
3) A *— циклическая;*
4) $Hom(A, A) = End(A) \cong A$.

О теореме Бэра—Капланского для класса жестких почти вполне разложимых абелевых групп

Благовещенская Е. А. (Санкт-Петербург)

Говорят, что Теорема Бэра—Капланского верна для некоторого класса модулей $\mathcal{M}$, если для любых M, $N \in \mathcal{M}$ из условия $End(M) \cong End(N)$ следует, что $M \cong N$. Будем называть такой класс модулей **BK**-классом.

В работе [1] показано, что класс $\mathcal{A}_O$ жестких (и даже блочно-жестких) почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором, рассматриваемых как $\mathbb{Z}$-модули, удовлетворяет Теореме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма (то есть является $\mathbf{BK}_{(nr)}$-классом), поскольку верна

Теорема 1. (Е. Благовещенская, Г. Иванов, Ф. Шультц, 2001) *Пусть* X, $Y \in \mathcal{A}_O$. *Тогда группы* X *и* Y *почти изоморфны (обозн.* $X \cong_{nr} Y$*), если и только если их кольца эндоморфизмов изоморфны (обозн.* $End(X) \cong End(Y)$*).*

Покажем, что отмена требования цикличности регуляторного фактора приводит к потере $\mathbf{BK}_{(nr)}$-свойства, то есть расширенный класс групп уже не удовлетворяет Теореме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма. Для этого рассмотрим класс $\mathcal{A}_I$, содержащий $\mathcal{A}_O$, состоящий из жестких почти вполне разложимых групп X ранга n ($n \geq 3$) с регулятором A и произвольным регуляторным фактором X/A, который является конечной группой.

Будем называть конечную абелеву группу C *гомоциклической*, если она является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка. Ранг произвольной абелевой группы F, равный мощности её максимальной линейно независимой системы, обозначается $rk\ F$.

По определению (см. [2]), регулятор $A = R(X)$ жесткой группы X является её вполне разложимой, вполне характеристической подгруппой наименьшего индекса. Ограничимся случаем, когда X/A — p-группа ранга $t < rk\ A$ и экспоненты $p^{\alpha} = exp\ X/A$, где

$$A = A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_2} \oplus \ldots \oplus A_{\tau_n} \quad (1)$$

— разложение группы A на τ_j-однородные компоненты, причем

$$T_{cr}(X) = T_{cr}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \quad (2)$$

является множеством попарно несравнимых идемпотентных типов, не делящихся на p (то есть $p\tau_j \neq \tau_j,\ \ j = 1, \ldots, n$).

Из [3] следует, что, в силу примарности X/A, группа X обладает единственным разложением на неразложимые прямые слагаемые с точностью до почти изоморфизма.

Теорема 2. *Пусть $X \in \mathcal{A}_I$. Существует единственная с точностью до почти изоморфизма группа $Y \in \mathcal{A}_I$, такая что Y/A — гомоциклическая p-группа, удовлетворяющая условиям:*

1) $exp\ Y/A = exp\ X/A$,

2) $rk\ Y/A = rk\ X/A$,

3) $X \subset_{nr} Y$

(последнее означает, что в Y существует подгруппа, почти изоморфная группе X, в частном случае $X = Y$).

Такую группу Y будем называть *обёрткой* группы X. Оказалось, что неразложимость обёртки влечет неразложимость самой группы. Обратное неверно.

Теорема 3. *Пусть $X \in \mathcal{A}_I$. Существует группа $X' \in \mathcal{A}_I$ с циклическим регуляторным фактором, такая что $End(X) \cong End(X')$, если и только если обёртка группы X является неразложимой группой.*

Литература

[1] *E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz.* The Baer—Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups / Contemporary Mathematics 273, P. 85–93, 2001.

[2] *A. Mader.* Almost Completely Decomposable Abelian Groups, Gordon and Breach / Algebra, Logic and Applications, Vol.13, Amsterdam, 2000.

[3] *T. Faticoni, P. Schultz.* Direct decompositions of ACD groups with primary regulating index / Abelian Groups and Modules (Lecture notes in pure and applied mathematics series/182) /P. 233–241, 1996.

Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп

Буданов А. В. (Томск)

В работе Р. Пирса [1] рассматривалась проблема описания элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной абелевой группы в терминах их действия на группе: были даны характеризации радикала Джекобсона колец эндоморфизмов прямых сумм циклических p-групп и периодически полных p-групп. В дальнейшем это направление было развито в работах М. Дугаса [2], Д. Хаузен и Д. А. Джонсона [3] и других алгебраистов.

Задачами изучения радикала Джекобсона и ниль-радикала колец эндоморфизмов групп без кручения начал заниматься П. А. Крылов [4]. Им были получены результаты, характеризующие радикал Джекобсона и ниль-радикал колец эндоморфизмов групп без кручения конечного ранга, алгебраически компактных и вполне разложимых групп без кручения, а также некоторых классов смешанных групп ([4, 5]). В монографии [6] сформулированы открытые проблемы, связанные с радикалом Джекобсона колец эндоморфизмов абелевых групп. Ряд проблем характеризации некоторых известных радикалов колец эндоморфизмов абелевых групп из различных классов обозначен в [7].

В настоящей работе исследование ведется по следующим направлениям. Рассматривается ниль-радикал кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения. С помощью представления кольца эндоморфизмов такой группы кольцом матриц дана его характеризация и показано, что он совпадает с суммой всех нильпотентных идеалов кольца эндоморфизмов. Изучается радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной абелевой группы без кручения. Также в работе вводится понятие сильно необратимого эндоморфизма абелевой группы без кручения и с его помощью исследуются кольца эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения.

Определение. Пусть G — абелева группа без кручения. Будем говорить, что эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ *сильно необратим слева (справа)*, если равенство $\beta\alpha g = ng$ ($\alpha\beta g = ng$), где $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in N$, возможно лишь в случае, когда $g = 0$.

Напомним, что группа называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1. Группа называется сепарабельной, если каждое конечное множество ее элементов содержится в некотором ее вполне разложимом прямом слагаемом. Для данных классов групп без кручения оказывалось возможным описать сильно необратимые эндоморфизмы в терминах их действия на прямых слагаемых ранга 1.

Теорема 1. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения, $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ — ее разложение в прямую сумму групп ранга 1 и $\pi_i : G \to A_i$ — естественные проекции ($i \in I$). Эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ сильно необратим тогда и только тогда, когда для любых индексов $i, j \in I$ (не обязательно различных) $\pi_i \alpha A_j = 0$ или $t(A_i) > t(A_j)$.*

Следствие 2. *Эндоморфизм α сепарабельной группы G сильно необратим тогда и только тогда, когда для любых двух ее прямых слагаемых A, B ранга 1 неравенство $\pi\alpha A \neq 0$ ($\pi : G \to B$ — некоторая проекция) влечет $t(A) < t(B)$.*

Из данного описания следует, что множество всех сильно необратимых эндоморфизмов сепарабельной группы является идеалом ее кольца эндоморфизмов. Последний факт позволяет получить результаты о строении факторколец колец эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения G по идеалам всех сильно необратимых эндоморфизмов.

В следующей теореме сформулированы условия нильпотентности идеала $Q(G)$ всех сильно необратимых эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения G.

Теорема 3. *Следующие условия на сепарабельную группу без кручения G равносильны:*

1) $P(E(G))^m = 0$;

2) $L(E(G))^m = 0$;

3) $N(E(G))^m = 0$;

4) $Q(G)^m = 0$*;*

5) $\Omega(G)$ *удовлетворяет условию m-максимальности.*

Обратимся к задаче описания радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения. Нам потребуются обозначения и некоторые результаты из [5]. Через $H(G)$ обозначается множество тех эндоморфизмов $\alpha \in E(G)$, для которых $\alpha x = 0$ при всех $x \in D(G)$ ($D(G)$ — делимая часть группы G) и для любого $x \in G \setminus D(G)$ из того, что $h_p(x) < \infty$, следует $h_p(\alpha x) > h_p(x)$, где через $h_p(x)$ обозначена p-высота элемента x. Через $F(G)$ обозначается множество всех эндоморфизмов группы G, образ которых является подгруппой конечного ранга в G.

Из результатов [5] следует, что для однородной сепарабельной группы без кручения G справедливы включения $H(G) \cap F(G) \subseteq J(E(G)) \subseteq H(G)$. Приведем критерии совпадения радикала $J(E(G))$ кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения G с идеалами $H(G)$ и $H(G) \cap F(G)$.

Теорема 4. *Для однородной сепарабельной группы без кручения* G *следующие условия эквивалентны:*

1) $J(E(G)) = H(G)$*;*

2) для идеала $H(G)$ *выполняется условие* $(*)$*;*

3) радикал $J(E(G))$ *замкнут в конечной топологии кольца* $E(G)$.

Теорема 5. *Для однородной сепарабельной группы без кручения* G *следующие условия эквивалентны:*

1) $J(E(G)) = H(G) \cap F(G)$*;*

2) для любого $\alpha \in J(E(G))$ *существует такое разложение группы* G*,* $G = A \oplus B$*, где* A *— вполне разложимая группа такая, что* $\operatorname{Im} \alpha \subseteq A$.

С помощью представления кольца эндоморфизмов вполне разложимой группы кольцом матриц можно охарактеризовать его ниль-радикал и показать, что он совпадает с суммой всех его нильпотентных идеалов.

Пусть G — вполне разложимая группа без кручения. В дальнейшем, если разложение $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ группы G в прямую сумму групп ранга 1 зафиксировано, мы будем отождествлять кольцо $E(G)$ с соответствующим кольцом матриц (см. например [6]). С целью сократить и упростить дальнейшие записи примем следующее соглашение: для элементов $i, j \in I$ будем писать $i \leq j$ $(i < j)$, если $t(A_i) \leq t(A_j)$ (соотв. $t(A_i) < t(A_j)$).

Определим подмножество $\nu(E(G))$ кольца $E(G)$. Пусть $\alpha = [\alpha_{ij}] \in E(G)$. Положим $\alpha \in \nu(E(G))$, если выполняются следующие два условия:

1) из $\alpha_{ij} \neq 0$ следует $j < i$;

2) существует такое натуральное число $n = n(\alpha)$, что среди любых таких n элементов $\alpha_{i_1 j_1}, \alpha_{i_2 j_2}, \ldots, \alpha_{i_n j_n}$ матрицы α, что $i_1 \leq j_2, i_2 \leq j_3, \ldots, i_{n-1} \leq j_n$, хотя бы один равен нулю.

Пусть $N_0(K)$ обозначает сумму всех нильпотентных идеалов некоторого кольца K, $P(K)$ обозначает его первичный радикал, $L(K)$ — его радикал Левицкого и $N(K)$ — его ниль-радикал.

Теорема 6. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения, пусть выбрано ее разложение $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ в прямую сумму групп ранга 1, с помощью которого определено множество $\nu(E(G))$. Тогда $\nu(E(G)) = N_0(E(G)) = P(E(G)) = L(E(G)) = N(E(G))$.*

Литература

[1] Pierce R. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois. — 1963. — P. 215–310.

[2] Dugas M. On the Jacobson Radical of Some Endomorphism Ring // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1988. — Vol.102. — No.4. — P. 823-826.

[3] Hausen J. Ideals and radicals of some endomorphism ring / J. Hausen, J. A. Johnson // Pacific Journal of Mathematic. — 1978. — Vol.74. — No. 2. — P. 365-372.

[4] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Матем. сборник. — 1974. — Т.95(137). — № 2(10)/ — С. 214–228.

[5] Крылов П. А. Радикал Джекобсонона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004г. — Т.43. — № 1. — С. 60-76.

[6] Крылов П. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев. — М.: Факториал Пресс, 2006. — 512 с.

[7] Мисяков В. М. Некоторые вопросы теории абелевых групп // Всероссийская конференция по математике и механике: тез. докл. 22–25 сентября 2008. — Томск: Томский государственный университет. — 2008. С.55.

Изоморфизмы групп автоморфизмов абелевых групп без кручения

Вильданов В. К. (Нижний Новгород)

Известно, что всякая вполне разложимая абелева группа без кручения A представима в виде $A \cong \bigoplus_{\tau\in\Omega_A} A^{(\tau)}$, где $A^{(\tau)}$ — однородная группа типа τ. Группа автоморфизмов однородной вполне разложимой абелевой группы без кручения изоморфна полной линейной группе над некоторым целостным кольцом. Изоморфизмы таких линейных групп хорошо изучены (см. [1]). В этой связи возникает следующий вопрос: при каких условиях изоморфизм групп автоморфизмов двух вполне разложимых абелевых групп влечет изомофизм групп автоморфизмов их однородных компонент.

Обозначим $\mathbf{F_{cd}}$— класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Теорема 1. *Пусть $A, B \in \mathbf{F_{cd}}, 2A = A$ и Ω_A конечное множество. Тогда из $Aut(A) \cong Aut(B)$ следует, что для любого $\tau \in \Omega_A$ найдется $\tau' \in \Omega_B$ такой, что $Aut(A^{(\tau)}) \cong Aut(B^{(\tau')})$*

Теорема 2. *Пусть $A, B \in \mathbf{F_{cd}}, 2A = A$, Ω_A конечное множество и $\forall\tau \in \Omega_A$, $r(A^{\tau}) > 1$. Тогда из $Aut(A) \cong Aut(B)$ следует, что $E^{+}(A) \cong E^{+}(B)$.*

Заметим, если группы A и B идемпотентные или одна из групп почти делимая, то верно и обратное.

Литература

[1] Автоморфизмы классических групп / Под ред. Ю.И. Мерзлякова — М.: Мир,1976. 262 с.

Нормальная определяемость абелевых групп своими голоморфами

Гриншпон С. Я., Гриншпон И. Э. (Томск)

При исследовании свойств группы G и ее группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ удобно рассматривать такую алгебраическую систему, в которую изоморфно вкладываются как сама группа G, так и группа ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Одной из таких систем является голоморф группы G — полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Структурные свойства голоморфа, поведение групп G и $\mathrm{Aut}(G)$ в голоморфе дают информацию о свойствах группы и ее группы автоморфизмов.

Среди вопросов, связанных с голоморфами абелевых групп, важное место занимает вопрос об определяемости групп своим голоморфом. Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа A *определяется своим голоморфом* в некотором классе групп $\mathfrak{A}$, если любая группа B из этого класса, голоморфно изоморфная группе A, изоморфна группе A. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [1]. Однако ситуация меняется при переходе к абелевым группам. В [2] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [3]–[7].

Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является понятие почти голоморфного изоморфизма. Группы A и B называются *почти голоморфно изоморфными*, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Понятно, что если две группы являются голоморфно изоморфными, то они почти голоморфно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно.

Будем говорить, что группа A *нормально определяется своим голоморфом в некотором классе групп* $\mathfrak{A}$, если любая группа B из этого класса, почти голоморфно изоморфная группе A, изоморфна группе A.

В. Миллс установил, что всякая конечно порожденная абелева группа нормально определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп [2].

Так как всякая вполне характеристическая подгруппа группы G является нормальной подгруппой голоморфа $\Gamma(G)$, то задача об изоморфизме почти голоморфно изоморфных групп является обобщением задачи об изоморфизме групп, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам. Напомним, что две группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы, обладающей этим свойством.

Задача об изоморфизме почти изоморфных абелевых групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [8] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счетных редуцированных p-групп эта проблема имеет положительное решение [8]. Однако в работе П. Кроули [9] приведен пример неизоморфных p-групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы. Для групп без кручения примеры такого рода были построены А. Корнером [10] и Е. Сонсядой [11]. Изоморфизм абелевых групп, почти изоморфных по сервантным и вполне характеристическим подгруппам, исследуется в работах де Гроота [12], И. А. Приходько [13], С. К. Росошека [14], С. Я. Гриншпона [15], [16], А. И. Шерстневой [17], [18].

Будем говорить, что абелева группа A f.i.-корректна в классе групп $\mathfrak{A}$, если для любой группы B из этого класса, для которой $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A' и B' — вполне характеристические подгруппы групп A и B соответственно, следует изоморфизм групп A и B.

Из сказанного выше следует, что если абелева группа A нормально определяется своим голоморфом в некотором классе групп $\mathfrak{A}$, то A определяется своим голоморфом в этом классе групп и является f.i.-корректной группой в классе $\mathfrak{A}$.

Авторами настоящего сообщения получены следующие результаты о нормальной определяемости абелевых групп своими голоморфами.

Теорема 1. *Делимая p-группа нормально определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Теорема 2. *Нередуцированная p-группа ($p \neq 2$) с ограниченной редуцированной частью нормально определяется своим голоморфом в клас-*

се всех абелевых p-групп.

Теорема 3. *Ограниченная группа нормально определяется своим голоморфом в классе всех периодических групп.*

Теорема 4. *Периодически полная p-группа с неубывающими инвариантами Ульма-Капланского нормально определяется своим голоморфом в классе всех периодически полных p-групп.*

Теорема 5. *Делимая группа без кручения нормально определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Теорема 6. *Однородная вполне разложимая группа без кручения нормально определяется своим голоморфом в классе всех однородных вполне разложимых групп.*

Теорема 7. *Вполне разложимая группа с конечной группой автоморфизмов нормально определяется своим голоморфом в классе всех вполне разложимых групп с конечными группами автоморфизмов.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс групп, состоящий из всех прямых произведений однородных групп с попарно несравнимыми типами, каждая однородная компонента которых является вполне разложимой.

Теорема 8. *Всякая группа из класса $\mathfrak{A}$ нормально определяется своим голоморфом в этом классе.*

Теорема 9. *Существует группа без кручения конечного ранга, которая нормально не определяется своим голоморфом в классе всех групп без кручения.*

Литература

[1] *Miller G.A.* On the multiple holomorph of a group / G. A. Miller // Math. Ann. — 1908. — V.66. — P. 133-142.

[2] *Mills W.H.* Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups / W. H. Mills // Trans. Amer. Math. Soc. — 1950. — V.71. — N3. — P. 379-392.

[3] *Беккер И.Х.* О голоморфах абелевых групп / И. Х. Беккер // Сиб. матем. ж. — 1964. — Т.5. — N6. — С. 1228–1238.

[4] *Беккер И.Х.* О голоморфах нередуцированных абелевых групп / И. Х. Беккер // Изв. Вузов. — 1968. — N8. — С. 3–8.

[5] *Беккер И.Х.* О голоморфах абелевых групп без кручения / И. Х. Беккер // Изв. вузов. Математика. — 1974. — N3. — С. 3–13.

[6] *Беккер И.Х.* Абелевы группы с изоморфными голоморфами / И. Х. Беккер // Изв. вузов. Математика. — 1975. — N3. — С. 97–99.

[7] *Беккер И.Х.* Абелевы голоморфные группы / И. Х. Беккер // Межд. конф. Всесибирские чтения по матем. и мех. Избранные доклады. Т. 1. Математика. — Томск: Изд-во ТГУ. — 1997. — С. 43–47.

[8] *Kaplansky I.* Infinite abelian groups. / I. Kaplansky — Michigan: Univ. of Michigan Press. Ann. arbor. 1954. — 91 p.

[9] *Crawly P.* Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups / P. Crawly // J. Algebra. — 1965. — N4. — P. 413–431.

[10] *Corner A.L.* Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring / A. L. Corner // Proc. London Math. Soc. — 1963. — V.52. — P. 687–710.

[11] *Sasiada E.* Negative solution of I. Kaplansky first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups / E. Sasiada // Bull. Acad. Sci. Math. Aston. Phys. — 1961. — N5. — P. 331–334.

[12] *de Groot J.* Equivalent abelian groups / J. de Groot // Canad. J. Math. — 1957. — N9. — P. 291–297.

[13] *Приходько И.А.* E-корректные абелевы группы / И. А. Приходько // Абелевы группы и модули. — 1984. — С. 90–100.

[14] *Росошек С.К.* Строго чисто корректные абелевы группы без кручения / С. К. Росошек // Абелевы группы и модули. — 1979. — С. 143–150.

[15] *Гриншпон С.Я.* Примарные абелевы группы, эквивалентные по вполне характеристическим подгруппам / С. Я. Гриншпон // Абелевы группы и модули. — 1979. — С. 29–36.

[16] *Гриншпон С.Я.* f.i.-корректные абелевы группы / С. Я. Гриншпон // Успехи матем. наук. — 1999. — N6. — С. 155–156.

[17] *Шерстнева (Ботыгина) А.И., Гриншпон С.Я.* Абелевы p-группы с конечными инвариантами Ульма-Капланского, почти изоморфные по вполне характеристическим подгруппам / А. И. Шерстнева (Ботыгина), С. Я. Гриншпон // Вестник Томского ун-та. — N269. — 2000. — С. 51–55.

[18] *Шерстнева (Ботыгина) А.И.* U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристическим подгруппам / А. И. Шерстнева (Ботыгина) // Изв. ВУЗов. Матем. — 2001. — N5. — С. 72–80.

s-гомоморфно устойчивые абелевы группы

Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А. (Томск)

При изучении групп гомоморфизмов абелевых групп, гомоморфных образов и при исследовании вполне характеристических подгрупп интерес представляет следующий вопрос: в каких случаях объединение (теоретико-множественное) гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B.

Абелева группа A называется *гомоморфно устойчивой относительно абелевой группы* B, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, то есть если $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ — подгруппа группы B.

Гомоморфная устойчивость абелевых групп исследовалась в цикле работ [1-5] авторов данного сообщения. В частности в этих работах показано, что прямая сумма гомоморфно устойчивых относительно группы B групп является группой гомоморфно устойчивой относительно группы B. Также показано, что гомоморфная устойчивость группы A относительно группы B, наследуется любым прямым слагаемым группы B. Доказана гомоморфная устойчивость относительно любой группы сепарабельных, делимых, периодических и однородных вполне транзитивных групп. Установлено, что для всякого натурального числа n отличного от единицы, существует абелева группа без кручения ранга n, не являющаяся гомоморфно устойчивой относительно некоторой абелевой группы, но всякая ее подгруппа меньшего ранга является гомоморфно устойчивой относительно любой абелевой группы. Показано также, что если B — узкая группа и $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство групп без кручения, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы B, причем множество I неизмеримо. Тогда группа $\prod\limits_{i\in I} A_i$ также гомоморфно устойчива относительно группы B.

Понятно, что вместо всей группы гомоморфизмов группы A в группу B можно рассматривать различные подгруппы группы $\mathrm{Hom}(A,\, B)$ и исследовать гомоморфную устойчивость, связанную с такими подгруппами.

Важную роль при исследовании гомоморфизмов p-групп играют малые гомоморфизмы, введенные Пирсом в [6].

Напомним, что гомоморфизм $\phi : A \to B$ называется малым, если его ядро содержит широкую подгруппу. Все малые гомоморфизмы группы A в группу B образуют подгруппу группы $\mathrm{Hom}(A,\, B)$, обозначим эту подгруппу через $\mathbf{H}(A,\, B)$.

Введем следующее определение.

Определение. Абелева группа A называется *s-гомоморфно устойчивой относительно абелевой группы B*, если $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbf{H}(A,\,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ есть подгруппа группы B.

Получен следующий результат.

Теорема 1. *Всякая редуцированная p-группа s-гомоморфно устойчива относительно любой ограниченной p-группы.*

Литература

[1] *Гриншпон С.Я.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы / С. Я. Гриншпон, Т. А. Ельцова // Вестн. Том. ун-та. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. — Томск, 2003. — № 280. — С. 31–33.

[2] *Ельцова Т.А.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Вестн. Том. ун-та. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. — Томск, 2006. — № 290. — С. 30–32.

[3] *Grinshpon S. Ya.* Homomorphic images of Abelian groups / S. Ya. Grinshpon, T. A. Yeltsova // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 154., № 3.— P. 290–294.

[4] *Гриншпон С.Я.* Связь делимых и редуцированных групп с гомоморфной устойчивостью / С. Я. Гриншпон, Т. А. Ельцова // Вестн. Том. ун-та. Сер. Математика и механика. — Томск. — 2009. — № 2(6). — С. 14–19.

[5] *Grinshpon S. Ya.* Homomorphic stability of Abelian groups / S. Ya. Grinshpon, T. A. Yeltsova // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 163., № 6.— P. 670–676.

[6] *Pierce R.S.* Homomorphisms of primary abelian groups //Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois. — 1963. — P. 215—310.

[7] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М. : Мир, 1974. — Т. 1. —335 с.

Сервантные подкольца конечного ранга колец $\mathbb{Z}_\chi$

Гусева О. С., Царев А. В.[1] (Москва)

Всюду ниже для кольца мы не требуем существования единицы. Групповая терминология, используемая для колец, относится к их аддитивным группам. Под рангом всегда подразумевается ранг без кручения.

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Построим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p\in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ при $m_p \neq \infty$ и $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел — в противном случае. Кольца $\mathbb{Z}_\chi$ естественным образом возникают при рассмотрении факторколец кольца *полиадических* (*целых универсальных*) *чисел* $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Лемма 1. *Если R — кольцо конечного ранга, все p-ранги которого не превосходят 1, то его первая ульмовская подгруппа — делимая группа без кручения конечного ранга.*

Таким образом сервантные подкольца конечного ранга колец $\mathbb{Z}_\chi$ можно охарактеризовать как редуцированные кольца конечного ранга, все p-ранги которых не превосходят 1.

Определение 1. Элемент r кольца R будем называть *квазинильпотентным*, если $mr^n = 0$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. Кольцо, все элементы которого квазинильпотентны, будем называть *квазинильпотентным кольцом*.

Нетрудно видеть, что кольцо R квазинильпотентно тогда и только тогда, когда $R/t(R)$ — нильпотентное кольцо.

Определение 2. Кольцо с единицей R называется *E-кольцом*, если канонический гомоморфизм из кольца R в кольцо эндоморфизмов его аддитивной группы $\mathsf{E}(R^+)$, отображающий элемент $r \in K$ в эндоморфизм левого умножения на r, является изоморфизмом.

[1]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

Теорема 2. *Пусть R — сервантное подкольцо конечного ранга кольца $\mathbb{Z}_\chi$, тогда*

$$R = R_0 \oplus R_1,$$

где R_0 — квазинильпотентное кольцо, а R_1 — E-кольцо.

Заметим, что кольца R_0, R_1 из теоремы 2 являются идеалами кольца R. Если $r(R_0) \neq 0$, то R_0 — кольцо без единицы. Кроме того, R_0 является модулем над кольцом псевдорациональных чисел, который конечно порожден тогда и только тогда, когда $|R_0| < \infty$.

Теорема 3. *Пусть R — сервантное подкольцо в $\mathbb{Z}_\chi$ и $0 < r(R) < \infty$. Кольцо R является кольцом с единицей тогда и только тогда, когда R^+ — факторно делимая группа.*

Гомоморфизмы факторно делимых групп ранга 1

Давыдова О. И. (Москва)

В [1] А. А. Фомин и У. Уиклесс определили смешанные факторно делимые группы конечного ранга без кручения и доказали, что категории смешанных факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга, с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов, двойственны.

Определение 1. Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа.

Определение 2. Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число такое, что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A.

Если такого числа не существует, то будем считать $m_p = \infty$. Последовательность $(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots)$ называется *кохарактеристикой* элемента a в группы A и обозначается $cochar(a)$.

Независимую систему порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ группы F из определения 1 будем называть *базисом* факторно делимой группы A, а ранг группы F — рангом факторно делимой группы A.

Определение 3. *Кохарактеристикой* факторно делимой группы A ранга 1 будем называть кохарактеристику любого ее базисного элемента и обозначать $cochar(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисным элементом x, B — произвольная факторно делимая группа и $y \in B$. Если $cochar_A(x) \geqslant cochar_B(y)$, то существует единственный такой гомоморфизм $f\colon A \to B$, что $f(x) = y$.*

Теорема 2. *Пусть R^χ и R^κ — факторно делимые группы ранга 1, $\chi = (m_p)$ и $\kappa = (k_p)$.*

1) *Если неравенство $[\chi] \geqslant [\kappa]$ не имеет места, то группа $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa)$ периодическая, все p-примарные компоненты которой являются циклическими группами. Если для некоторого простого числа p выполняется $k_p = 0$ или $k_p = \infty$, то p-примарная компонента группы $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa)$ равна 0. Если для некоторого простого числа p выполняется $0 < k_p < \infty$, то p-примарная компонента группы $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa)$ имеет порядок $p^{min(m_p,k_p)}$.*

2) *Если выполняется $[\chi] \geqslant [\kappa]$,то $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa) \cong R^{\chi\wedge\kappa}$. В частности, если $\chi \geqslant \kappa$, то $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa) \cong R^\kappa$.*

Пусть A и G — произвольные группы. Обозначим через $G^* = \mathrm{Hom}\,(G, A)$ и определим отображение $\delta_G : G \longrightarrow G^{**}$ таким образом, что выполняется $\delta_G(g)(\alpha) = \alpha(g)$. Группа G называется A-рефлексивной, если отображение $\delta_G(g)$ является изоморфизмом.

Теорема 3. *Пусть A и G — факторно делимые группы ранга 1. Группа G является A-рефлексивной тогда и только тогда, когда кохарактеристики групп A и G равны.*

Литература

[1] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — P. 45-52.

Теория групп на первом курсе технического ВУЗа

Ельцов А.А., Ельцова Т.А. (Томск)

В [1] мы уже затрагивали некоторые проблемы изложения теории групп в техническом вузе. В том числе отмечали резкое изменение наполнения содержания понятия прикладная математика и всё большее проникновение абстрактных разделов математики, таких как теория множеств, теория групп и других в различные области инженерного дела, например в цифровую обработку сигналов, кристаллогафию, криптографию и др. В силу высокого уровня абстракции указанные разделы математики трудны для восприятия, особенно в первом семестре 1-го курса. С другой стороны, в силу важности этих разделов для некоторых инженерных специальностей, отказаться от их изложения, естественно, невозможно.

В связи с изменением учебных планов, вызванным переходом на планы третьего поколения произошло сокращение часов, отводимых на изучение математики. Например, курс алгебры для направления "Прикладная математика и информатика"сократился более чем в два раза (было 158 часов, стало 68). Так как составной частью курса алгебры является линейная алгебра, на основе которой мы строим здание всего курса математики [2], то естественно, что изучение алгебры предусмотрено в первом семестре. В результате раздел абстрактной алгебры с изложением теории групп колец и полей пришлось изучать именно в первом семестре. Удалось отвести на изложение абстрактной алгебры примерно 20 часов. Предвидя, что элементы абстрактной алгебры для направления "Прикладная математика и информатика"придётся излагать в первом семестре, мы, в другом потоке, в виде эксперимента, включили теорию групп, колец, полей в тему основные математические структуры в объёме 8 часов (2 лекции, два практических занятия) .

При изучении элементов общей алгебры в объёме 8 часов несмотря на всю сложность и абстрактность этого раздела, следует отметить и некоторые положительные моменты. Например, при изучении линейных пространств можно отметить, что линейное пространство есть абелева группа по сложению. При изучении в объёме 20 часов к вышесказанному следует добавить, что линейные пространства можно изучать над полями отличными от полей действительных или комплексных чисел, в том числе и над конечными полями. Рассказать немного о системах линейных уравнений над конечными полями или кольцами. Данные системы возникают при анализе криптосистем. В частности, системы линейных уравнений над кольцами классов вычетов рассмотрены В. П. Елизаровым в цикле работ [3-5].

Есть и отрицательные моменты. Самым главным является то, что вчерашний школьник в массе своей с трудом воспринимает абстракции. Это объясняется хотя бы тем, что математическая подготовка в школе далека от желаемой и является в некоторых случаях откровенно слабой.

В свете вышесказанного, для смягчения отрицательных моментов, удалось добиться изменения учебного плана для направления "Прикладная математика и информатика"и разделить курс алгебры на два семестра. В первом излагать линейную алгебру, а второй семестр посвятить изложению абстрактной алгебры. При таком разделении на теорию групп, колец, полей мы отвели 36 часов. Перенос абстрактной алгебры на второй семестр полезен, на наш взгляд, хотя бы потому, что студент во втором семестре уже больше чем в первом подготовлен к восприятию абстракций.

В заключение хотелось бы отметить, что включение абстрактной алгебры в курс математики для некоторых направлений подготовки инженеров, кроме всего прочего, повышает математическую культуру будущего инженера. Последнее является очень важным в свете того, что, по разным причинам, инженеру приходится изучать некоторые разделы математики самостоятельно. Без достаточной математической культуры это сделать зачастую очень трудно, а иногда и не возможно.

Литература

[1] *Ельцов А.А.* Теория групп в техническом ВУЗе /Ельцов А.А., Ельцова Т.А.// В кн. Абелевы группы: материалы Всероссийского симпозиума посвящённого 95-летию Л.Я. Куликова (Бийск, 19-25 августа 2010 г.) /Бийск: РИО АГАО им. В.М. Шукшина, 2010, с. 33-35.

[2] *Ельцов А.А.* Об организующей роли линейной алгебры в курсе математики втуза /Ельцов А.А., Ельцова Г.А., Магазинников Л.И.// Известия Томского политехнического университета, 2005, т.308, №1, с. 227-229.

[3] *В. П. Елизаров* О классах разрешимых колец /В. П. Елизаров //Матем. вопр. криптогр., 1:3 (2010), 19-26

[4] *В. П. Елизаров* Об алгоритме последовательного решения системы линейных уравнений над кольцом вычетов /В. П. Елизаров //Тр. по дискр. матем., 11:2 (2008), 31-42

[5] *В. П. Елизаров* Системы линейных уравнений над конечными кольцами /В. П. Елизаров //Тр. по дискр. матем., 6 (2002), 31-47 10.

О некоторых классах хопфовых абелевых групп

Кайгородов Е. В. (Томск)

В 1932 году швейцарский математик Х. Хопф поставил вопрос о существовании конечно порожденной группы, изоморфной некоторой своей собственной факторгруппе. Группы, не обладающие таким свойством, получили название хопфовых.

Определение 1. Группа G называется *хопфовой*, если она не имеет собственных изоморфных себе факторгрупп.

Используется также и другое определение хопфовой группы.

Определение 2. Группа G называется *хопфовой*, если всякий эпиморфизм группы G на себя является автоморфизмом.

Понятие хопфовости можно ввести для различных алгебраических систем: модулей, колец, решеток, упорядоченных множеств, топологических и функциональных пространств. Изучение хопфовых алгебраических систем представляется важной и интересной задачей современной алгебры. В настоящей работе описываются хопфовы группы в некоторых классах абелевых групп.

Получены следующие результаты:

Теорема 1.([1]) *Делимая группа будет хопфовой группой тогда и только тогда, когда она является прямой суммой конечного числа копий группы* $\mathbb{Q}$.

Следствие.([1]) *Абелева группа является хопфовой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть есть хопфова группа, а делимая часть, если она ненулевая, есть конечная прямая сумма копий рациональной группы* $\mathbb{Q}$.

Таким образом, проблема изучения хопфовых абелевых групп сводится к изучению и описанию хопфовых редуцированных абелевых групп.

Теорема 2.([1]) *Пусть A — прямая сумма циклических групп:*

$$A = \bigoplus A_{p_i} \bigoplus A_0,$$

где A_{p_i} — прямая сумма циклических p_i-групп, A_0 — прямая сумма циклических групп бесконечного порядка. Тогда группа A хопфова, если и только если все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг.

Интересные примеры хопфовых абелевых групп появляются при изучении аддитивных групп отдельных колец. Для удобства чтения напомним необходимые определения.

Определение 3.([2]) Пусть R — коммутативное кольцо. Правый R-модуль A называется $E(R)$-*модулем* или просто E-*модулем*, если

$$\mathrm{Hom}_R(R, A) \cong \mathrm{Hom}(R, A).$$

Определение 4.([2]) Кольцо R (не обязательно коммутативное) называется E-*кольцом*, если R_R есть $E(R)$-модуль.

Определение 5.([3]) Кольцо R называется *артиновым слева (справа)*, если любая последовательность $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ левых (соответственно, правых) идеалов, где $I_m \neq I_n$ при $m \neq n$, конечна. Говорят также, что R — кольцо с условием обрыва убывающих цепей левых (соответственно, правых) идеалов.

Автором доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.([4]) *Аддитивная группа любого E-кольца хопфова.*

Известно, что кольцо эндоморфизмов группы J_p целых p-адических чисел естественным образом изоморфно кольцу $\mathbb{Q}_p^*$ целых p-адических чисел [2], т.е., другими словами, кольцо $\mathbb{Q}_p^*$ является E-кольцом. Отсюда сразу вытекает, что группа целых p-адических чисел хопфова.

Теорема 4.([4]) *Для того чтобы аддитивная группа A артинова кольца была хопфовой, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид:*

$$A = \left(\bigoplus_r \mathbb{Q}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{s_i} \mathbb{Z}\left(p_i^{k_i}\right)\right),$$

где $p_i^{k_i}$ — *делители фиксированного целого числа* m, r *и* s_i — *фиксированные натуральные числа.*

Литература

[1] *Кайгородов Е.В.* Хопфовы абелевы группы / Е. В. Кайгородов// Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2(18). – С. 92-99.

[2] *Крылов П.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 512 с.

[3] *Крылов П.А.* Упражнения по группам, кольцам и полям: Учеб. пособие / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев, А. Р. Чехлов. – Томск: Томский государственный университет, 2008. – 482 с.

[4] *Кайгородов Е.В.* О хопфовости аддитивных групп некоторых колец / Е. В. Кайгородов// Современные проблемы математики и механики. III Всероссийская молодежная научная конференция: Сборник трудов конференции (Томск, 23 – 25 апреля 2012 г.) – Томск: Томский государственный университет, 2012. – 473 с.

Обобщения E-групп

Карпов О. А.[2] (Москва)

Абелева группа A называется *E-группой*, если $A \cong End\, A$ и кольцо эндоморфизмов группы A коммутативно. Соответственно, возникают два возможных обобщения E-групп: группы, изоморфные группе своих эндоморфизмов (так называемые $\mathcal{E}$-замкнутые группы) и группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

$\mathcal{E}$-замкнутым группам посвящена работа [3], в частности, доказано, что в классе групп не более, чем счетной мощности всякая $\mathcal{E}$-замкнутая группа является E-группой. Группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов подробно изучены в работе [5] Селе и Сендрея.

В данной работе основное внимание уделено возможным обобщениям понятия E-группы, опирающимся на некоторые свойства, присущие

[2]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

всем умножениям на группе A. Напомним, что умножением на группе A называется билинейное отображение $f\colon A \times A \to A$. Все умножения на группе A образуют группу, обозначаемую $\mathrm{Mult}\ A$. Умножение $\mu \in \mathrm{Mult}\ A$ называется *коммутативным*, если для любых x, y из A $\mu(x, y) = \mu(y, x)$, и называется *ассоциативным*, если для любых x, y, z из группы A $\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$. Если на группе A задана структура кольца (т.е. зафиксировано некоторое стандартное умножение «$\cdot$»), то для всякого элемента a группы A определим умножение μ_a, заданное следующим образом: $\mu_a(x, y) = a \cdot (x \cdot y)$ для любых x, y из A, и будем называть такие умножения *каноническими*.

Теорема 1. *Пусть A — группа, допускающая структуру кольца с единицей. Тогда следующие условия равносильны:*

1) A — E-группа;

2) всякое умножение на A является каноническим;

3) все умножения на A коммутативны;

4) все умножения на A ассоциативны.

Имеются два основных направления исследований:

Первое связано с изучением групп, обладающих одним из свойств 2–4 (из теоремы 1). На данный момент изучены группы, допускающие только коммутативные или только ассоциативные умножения в классах делимых групп и периодических групп:

Предложение 1. *Пусть A — делимая группа. Тогда следующие условия равносильны:*

1) все умножения на A коммутативны;

2) все умножения на A ассоциативны;

3) ранг без кручения группы A не превосходит единицы.

Предложение 2. *Пусть A — периодическая группа. Тогда следующие условия равносильны:*

1) все умножения на A коммутативны;

2) все умножения на A ассоциативны;

3) p-ранг группы A не превосходит единицы для любого простого числа p.

Отметим, что и в классе периодических, и в классе делимых групп, интересующими нас свойствами (все умножения коммутативны/ассоциативны) обладают только группы, которые можно представить в виде прямой суммы E-группы и ниль-группы (группы, допускающей только нулевые умножения). Следующий пример показывает, что группы, в которых все умножения коммутативны/ассоциативны такими суммами не исчерпываются:

Пример. Пусть n — произвольное натуральное число. Рассмотрим кольцо $A = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{p^n}$ (умножение покомпонентное), элемент $x = (p\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{P}}$, где ε_p — единица кольца $\mathbb{Z}_{p^n}$, и группу B, сервантно порожденную множеством всех натуральных степеней элемента x. Тогда B — смешанная группа ранга без кручения $n-1$, допускающая только коммутативные и ассоциативные умножения, но не являющаяся E-группой. Причем, в группе B при любом выборе стандартного умножения существует умножение не являющееся каноническим.

Второе направление исследований связано с изучением взаимосвязей между различными обобщениями E-групп. Поскольку в $\mathcal{E}$-замкнутых группах изоморфизм $A \cong End\ A$ индуцирует на A структуру кольца с единицей, наличие любого другого интересующего нас условия, по теореме 1, означает, что A —E-группа. Рассмотрим далее умножения в группах с коммутативным кольцом эндоморфизмов. Следующее предложение показывает, что условие коммутативности кольца эндоморфизмов группы A сильно влияет на группу умножений.

Предложение 3. *Пусть A — абелева группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов. Тогда верны следующие свойства:*

1) все умножения на A ассоциативны.

2) в любом некоммутативном умножении на A любой ненулевой элемент группы A является делителем нуля.

Отметим, что утверждение, обратное к предложению 3, неверно, например группа $A = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ имеет некоммутативное кольцо эндоморфизмов (изоморфное кольцу матриц размера 2×2 над кольцом целых p-адических чисел), но допускает только нулевые умножения, а следовательно все умножения на A ассоциативны и коммутативны.

Остается открытым вопрос взаимосвязи между различными свойствами всех умножений на произвольно выбранной группе. Например, существует ли группа, на которой все умножения ассоциативны и допускающая некоммутативное умножение.

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1. — 1977. — Т.2.

[2] *Schultz P.* The endomorphism ring of the additive group of a ring / P. Schultz — J. Aust. Math. Soc. — 1973 - V.15 — P. 60–69.

[3] *Гришин А.В., Царёв А.В.* $\mathcal{E}$-замкнутые группы и модули / А.В. Гришин, Царев А.В. — М.: ФПМ, — 2011/2012 — т.17., вып.2 — стр. 97–106.

[4] *Крылов П.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев — М.: Факториал Пресс, 2006.

[5] *Szele T., Szendrei J.* On Abelian groups with commutative endomorphism ring / T. Szele, J. Szendrei// Acta Math. Acad. Sci. Hungar., — 1951. — V.2. — P. 309–324.

Абсолютный идеал алгебраически компактных абелевых групп

Компанцева Е. И.[3], **Фам Т. Т. Т.** (Москва)

Под *абсолютным идеалом* абелевой группы G понимается ее подгруппа, являющаяся идеалом в любом кольце, аддитивная группа которого изоморфна G. Минимальный абсолютный идеал абелевой группы G, содержащий элемент $g \in G$ называется *главным абсолютным идеалом, порожденным элементом* g и обозначается через $\langle g \rangle_{AI}$. Абсолютные идеалы изучаются, например, в [1,3].

В настоящей работе описаны главные абсолютные идеалы редуцированных алгебраически компактных абелевых групп. Все рассматриваемые группы — абелевы и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа».

Редуцированная алгебраически компактная группа G однозначно представляется в виде $G = \prod\limits_p G_p$, где для каждого простого числа p группа

[3]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

G_p является p-адической алгебраической компактной группой. Пусть G – редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Набор элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ группы G называется почти конечным, если не более, чем счетное число g_i $(i \in I)$ отлично от нуля и для любого натурального числа n почти все g_i делятся на p^n. Если $\{g_i\}_{i\in I}$ – почти конечный набор элементов группы G и $\{g_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ – все ненулевые элементы этого набора, то последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} g_{i_k}$ является последовательностью Коши в p-адической топологии на группе G. Эта последовательность имеет предел в группе G, который обозначается $\widetilde{\sum\limits_{i\in I}} g_i$. Известно, что редуцированная p-адическая алгебраическая компактная группа G является регулярной прямой суммой $\widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ циклических p-адических модулей, то есть подгруппой прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, состоящей из таких элементов $g = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} u_i e_i$, что $\{u_i e_i\}_{i\in I}$ — почти конечный набор элементов в группе $\prod\limits_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$ [2].

Теорема 1. *Пусть $G = A \oplus C$ — p-адическая алгебраически компактная группа, где A — p-адическая алгебраически компактная группа без кручения, C — урегулированная p-адическая алгебраически компактная группа. Пусть $g = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} u_i e_i \in G$, $H_g = \{\widetilde{\sum\limits_{i\in J}} u_i h_i \mid o(h_i) \le o(e_i)\}$, и $\bar{H}_g = \{\widetilde{\sum\limits_{i\in J}} (u_i v_i) h_i \mid (v_i)_{i\in J}$ – почти конечный набор p-адических целых чисел, $o(h_i) \le o(e_i)\}$. Тогда*
1) если $A \neq 0$, то $\langle g\rangle_{AI} = H_g$;
2) если $A = 0$ и $g \in G$, то $\langle g\rangle_{AI} = \langle g\rangle + \bar{H}_g$.

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2.

[2] *Компанцева Е.И.* Кольца без кручения / Е.И. Компанцева // Фундаментальная и прикладная математика — 2009 — Т.15 — № 8 — С.95–143.

[3] *Fried E.* On the subgroups of abelian group that are ideals in every ring / E. Fried // Proc. Colloq. Abelian Groups — Budapest, 1964 — P.51–55.

Матрицы Мальцева группы двойственной факторно делимой группе

Костромина Ю. В. (Москва)

Одной из первых работ полностью посвященных абелевым группам без кручения является статья А. И. Мальцева [1]. В ней он установил взаимно однозначное соответствие между системами p-матриц и группами без кручения конечного ранга, при котором каждой совокупности изоморфных между собой групп соответствует класс эквивалентных между собой систем совершенных p-матриц.

В 2007 г. в [2] А. А. Фомин ввел категорию матриц специального вида и доказал, что она эквивалентна категории факторно делимых групп и двойственна категории групп без кручения. А. А. Фомин матрицы данной категории называл редуцированными матрицами. Заметим, что это фактически те матрицы, которые А. И. Мальцев называл совершенными, а функторы двойственности категории матриц и категории групп без кручения можно рассматривать как новую версию описания Мальцева [1].

Мы рассматриваем факторно делимые группы без кручения конечного ранга, введенные в 1961 г. Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [4]. В данной работе решается задача нахождения матриц Мальцева группы, двойственной факторно делимой группе в смысле Арнольда, то есть перевода двойственности Арнольда на язык матриц Мальцева.

Пусть G — факторно делимая группа с базисом $x_1, x_2, ..., x_r$, $G/\langle x_1, x_2, ..., x_r\rangle$ — делимая и периодическая. Группа G относительно данного базиса определена набором p-матриц по всем простым числам p:

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & \ldots & \alpha_{1r}^{(p)} \\ \alpha_{21}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & \ldots & \alpha_{2r}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r1}^{(p)} & \alpha_{r2}^{(p)} & \ldots & \alpha_{rr}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{\chi_1} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_2} \\ \ldots & \ldots \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_r} \end{matrix},$$

где $r = r(G)$ — ранг группы G. Для характеристик $\chi = (m_p)$ положим $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $m_p < \infty$, и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$, если $m_p = \infty$, тогда кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_p K_p$. Обозначим через $n = r_p(G)$ — p-ранг группы G. И пусть

$m = r - n$. Тогда из определения факторно делимой группы следует, что

$$(\chi_1)_p = (\chi_2)_p = ... = (\chi_m)_p = \infty, \ (\chi_{m+1})_p = ... = (\chi_r)_p = 0.$$

Отсюда следует, что последние n строк в матрице $A^{(p)}$ состоят из одних нулей, поэтому мы их можем опустить.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & x_2 & ... & x_r & & \\
y_1 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & ... & \alpha_{1r}^{(p)} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_m & \alpha_{m1}^{(p)} & \alpha_{m2}^{(p)} & ... & \alpha_{mr}^{(p)} & = & 0 \\
 & \| & \| & ... & \| & & \\
 & x_1^* & x_2^* & ... & x_r^* & &
\end{array}$$

А. А. Фомин в [2] доказал, что эта диаграмма однозначно определяет группу G и двойственную ей группу G^* вместе с их базисами $x_1, x_2, ..., x_r \in$ $\in G$ и $x_1^*, x_2^*, ..., x_r^* \in G^*$. Данная диаграмма одновременно определяет две системы равенств:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1^* & = & \alpha_{11}^{(p)} y_1 & + & \alpha_{21}^{(p)} y_2 & + & ... & + & \alpha_{m1}^{(p)} y_m, \\
x_2^* & = & \alpha_{12}^{(p)} y_1 & + & \alpha_{22}^{(p)} y_2 & + & ... & + & \alpha_{m2}^{(p)} y_m, \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
x_r^* & = & \alpha_{1r}^{(p)} y_1 & + & \alpha_{2r}^{(p)} y_2 & + & ... & + & \alpha_{mr}^{(p)} y_m.
\end{array} \qquad (1)$$

и

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_{11}^{(p)} x_1 & + & \alpha_{12}^{(p)} x_2 & + & ... & + & \alpha_{1r}^{(p)} x_r & = & 0, \\
\alpha_{21}^{(p)} x_1 & + & \alpha_{22}^{(p)} x_2 & + & ... & + & \alpha_{2r}^{(p)} x_r & = & 0, \ 2 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
\alpha_{m1}^{(p)} x_1 & + & \alpha_{m2}^{(p)} x_2 & + & ... & + & \alpha_{mr}^{(p)} x_r & = & 0.
\end{array} \qquad (2)$$

Из (1) следует, что $x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$ принадлежат конечно представимому $\widehat{\mathbb{Z}}$-модулю $M = y_1\mathbb{Z}_{\chi_1} \bigoplus y_2\mathbb{Z}_{\chi_2} \bigoplus ... \bigoplus y_m\mathbb{Z}_{\chi_m}$. Тогда сервантная оболочка $\langle x_1^*, x_2^*, ..., x_r^* \rangle_*$ — группа, двойственная группе G, с базисом $x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$.

Теперь мы можем сформулировать теорему, позволяющую перевести двойственность Арнольда на язык матриц Мальцева.

Теорема 1. *Пусть G — факторно делимая группа ранга r с базисом $x_1, x_2, ..., x_r$, относительно которого она определена набором p-матриц Мальцева по всем простым числам p:*

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & ... & \alpha_{1n}^{(p)} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \alpha_{21}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & ... & \alpha_{2n}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_{m1}^{(p)} & \alpha_{m2}^{(p)} & ... & \alpha_{mn}^{(p)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \in & \mathbb{Z}_{\chi_1} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_2} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_m} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_{m+1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_{m+2}} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_r} \end{array},$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & ... & i_r^{(p)} \end{pmatrix}$. *И пусть G^* — группа двойственная группе G в смысле Арнольда, тогда группа G^* определяется следующим набором p-матриц Мальцева:*

$$A^{*(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{21}^{(p)} & ... & \alpha_{m1}^{(p)} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \alpha_{12}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & ... & \alpha_{m2}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_{1n}^{(p)} & \alpha_{2n}^{(p)} & ... & \alpha_{mn}^{(p)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \in & \mathbb{Z}_{\kappa_{m+1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_{m+2}} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_r} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_1} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_2} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_m} \end{array}$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_r^{(p)} & i_{r-1}^{(p)} & ... & i_1^{(p)} \end{pmatrix}$.

Используя язык матриц Мальцева легко можно доказать следующие факты для взаимодвойственных по Арнольду групп [3].

Теорема 2.([3]) *Для двойственности категорий факторно делимых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов на себя справедливы следующие утверждения:*

1) $r(G) = r(G^*)$;

2) $r_p(G^*) = r(G) - r_p(G)$.

Литература

[1] *А.И. Мальцев* Абелевы группы конечного ранга без кручения, Матем. сб., 4, 1938, 45–68.

[2] *А. А. Фомин* Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп, Фундаментальная и прикладная математика, 13 (3), 2007, 223–244.

[3] *D. Arnold* A duality for quotient divisible abelian groups of finite rank, Pacific J. of Math., 42 (1), 1972, 11–15.

[4] *R. Beaumont, R. Pierse* Torsion-free rings, Illinois J. Math., 5, 1961, 61–98.

О базисах прямых сумм рациональных групп

Курманова Е. Н. (Нижний Новгород)

Пусть F — свободная абелева группа конечного ранга n и $\varphi \in E(F)$ инъективный эндоморфизм группы F. Определим $D(\varphi, F) = \bigcup_{n\geq 0}\varphi^{-n}(F)$. В работе [1] показано, что, если матрица φ в базисе $e = \{e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n\}$ диагонализируема и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ее различные собственные значения, являющиеся целыми числами, то $D(\varphi, F) = A + B$, где A — вполне разложимая группа ранга k конечного кольцевого типа и существует целое m такое, что $mB \subset F$.

Теорема 1. *Для группы $D(\varphi, F)$ следующие условия эквивалентны:*

1) m — минимальное натуральное такое, что $mB \subset F$;

2) $\{e_i\}$ — G–базис группы F;

3) $me_i \in \oplus E_i$, где $E_i = F \cap E(\lambda_i)$ и $E(\lambda_i)$ —собственное подпространство $\mathbb{Q}F$, относящееся к собственному значению λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Литература

[1] *M. Dugas* Torsion-Free Abelian Groups Defined by an Integral Matrix / M. Dugas // Int. J. of Algebra. — 2012. — V.6. — n. 2. — P. 85–99.

[2] *Курманова Е.Н., Себельдин А.М.* Базисы прямых сумм рациональных групп / Е.Н. Курманова, А.М. Себельдин // Исследования по математическому анализу и алгебре / Под ред. И.А. Александрова и др. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. - С. 179-184

Об определяемости прямых сумм рациональных групп H–представлениями своих колец эндоморфизмов с точностью до равенства

Курманова Е. Н., Себельдин А. М. (Нижний Новгород)

В работе [1] решен вопрос об определяемости абелевых групп своими кольцами эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. В данной работе этот вопрос рассматривается для класса конечных прямых сумм рациональных групп.

Под рациональной группой будем понимать аддитивную подгруппу группы всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, под P — множество всех простых чисел. Для рациональной группы A через a обозначим минимальное натуральное число группы A. Для рациональных групп A и B положим $H_{(A,B)} = \{\frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbb{Q} : \varphi \in Hom(A,B)\}$. Группу $H_{(A,B)}$ назовем H–представлением группы гомоморфизмов $Hom(A,B)$.

Пусть $\Im_n$ — класс всех абелевых групп A ранга n, являющихся прямыми суммами рациональных групп A_i, a_i — минимальное натуральное число группы A_i. Рассмотрим множество всех рациональных матриц

$$E_A = (H_{(A_i,A_j)}) = \{(\frac{\varphi_{ji}(a_i)}{a_i}) : \ \frac{\varphi_{ji}(a_i)}{a_i} \in H_{(A_i,A_j)}\}.$$

Ясно, что $E_A \cong E(A)$. Кольцо рациональных матриц E_A назовем H–представлением кольца эндоморфизмов группы A.

Пусть $A, C \in \Im_n$, $A = \oplus_{i=1}^n A_i$, $C = \oplus_{i=1}^n C_i$. Равенство $A = C$, означает, что $A_i = C_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. И, соответственно, равенство $E_A = E_C$ эквивалентно равенствам $H_{(A_i,A_j)} = H_{(C_i,C_j)}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

Определение. Будем говорить, что группа $A \in \Im_n$ в классе $\Im_n$ *определяется с точностью до равенства*, если для любой группы $C \in \Im_n$ всякий раз из равенства $E_A = E_C$ следует равенство $A = C$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фиксированные целые положительные числа. Рассмотрим множество $\Im_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ всех групп $A = \oplus_{i=1}^n A_i$ таких, что $A_i \in \Im_1(a_i)$, где $\Im_1(a_i)$– все рациональные группы для которых a_i — минимальное натуральное число, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через Ω — множество всех (различных)типов прямых слагаемых группы

A. Рассмотрим разбиение множества Ω на связанные множества Ω_s, и пусть A^s – соответствующие им прямые суммы рациональных групп, $s \in J, J = \{1, 2, \ldots, k\}$. Получаем прямую сумму вполне характеристических прямых слагаемых $A = \oplus_{s \in J} A^s$. Обозначим через $P^*(A^s)$ множество всех простых чисел, входящих в разложение минимальных натуральных чисел рациональных слагаемых группы A^s.

Теорема 1. *Группа A определяется в классе $\Im_n$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда она делимая.*

Теорема 2. *Если группа A определяется в классе $\Im_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с точностью до равенства, тогда для любого $s = 1, 2, \ldots, k$ имеем равенство $P(A^s) \cup P^*(A^s) = P$.*

Условие определяемости группы A в классе $\Im_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с точностью до равенства несложно сформулировать на языке конечных упорядоченных множеств и теорема 2 дает некоторое необходимое условие, которое достаточным не является.

Пусть Ω — частично упорядоченное множество типов слагаемых группы A, содержащее наибольший элемент τ^*, $P(\tau^*)$ — множество всех простых чисел $p \in P$, соответствующих бесконечным p–высотам в типе τ^*, $\Omega \setminus \{\tau^*\} = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ — объединение не связанных между собой линейно упорядоченных множеств. Положим $I(\tau) = \{i \in J : \tau(A_i) = \tau\}$.

Теорема 3. *Группа A определяется в классе $\Im_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) для любого $s \in J$ имеем равенство $P(A^s) \cup P^*(A^s) = P$;

2) для любых $j, m \in J$, если $p \in P^*(A^j) \setminus P^*(A^m)$ и $p \in P(\tau^*)$, то $p \in P(A^k)$ для любого $k \in I(\tau)$ и для любого $\tau \in \Omega_m$.

Литература

[1] *Себельдин А.М.* Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А.М. Себельдин // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11. — Вып. 4. – С. 403–408.

Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов

Любимцев О. В., Чистяков Д. С.[4] (Нижний Новгород)

Известная теорема Бэра—Капланского определила целое направление в теории абелевых групп, занимающееся проблемой изоморфизма и реализации (другое название — проблема определяемости). Основной результат данной работы находится в русле именно этого направления. Прежде, чем его сформулировать приведем используемые обозначения: $E^{\bullet}(G)$ — полугруппа эндоморфизмов абелевой группы G; $T(G)$ — периодическая часть группы G; если A — периодическая группа, то $supp(A) = \{p|A_p \neq 0\}$.

Теорема 1. *Пусть G и H — абелевы группы. Следующие условия равносильны:*

1) $E^{\bullet}(G) \cong E^{\bullet}(H)$ и $T(G) \ncong T(H)$;

2) $G = A \oplus B$ и $H = C \oplus D$, где

1. *A — нетривиальная делимая периодическая группа, B — редуцированная периодическая группа и $supp(A) \cap supp(B) = \varnothing$;*
2. *C — группа без кручения и $E^{\bullet}(C) \cong E^{\bullet}(A)$;*
3. *$T(D) \cong B$ и $E^{\bullet}(D) \cong E^{\bullet}(B)$.*

Отметим, что данная теорема является прямым аналогом известного результата Мэя и Тубасси ([1]), доказанного ими для колец эндоморфизмов.

На некоторых этапах доказательства существенную роль играет свойство однозначности сложения в кольце эндоморфизмов.

Литература

[1] *W. May, E. Toubassi* Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky// Journal of algebra. 1976. V. 43. P. 1-13.

[4]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

k-вполне транзитивные абелевы группы без кручения

Рогозинский М.И. (Томск)

Одним из ключевых понятий теории абелевых групп является понятие вполне транзитивности. Впервые это понятие было рассмотрено Капланским в [1] для p-групп: p-группа G называется *вполне транзитивной*, если для любых элементов $a, b \in G$ группы G из выполнения неравенства $H(a) \leq H(b)$ следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ группы G, такого что $\theta(a) = b$ (здесь $H(a), H(b)$ - индикаторы элементов a и b соответственно).

Вполне транзитивные группы без кручения появляются в работе П.А. Крылова ([2]): группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых элементов $a, b \in G$ из $\chi(a) \leq \chi(b)$, где $\chi(a), \chi(b)$ — характеристики элементов a и b, следует существование $\theta \in E(G)$ со свойством $\theta(a) = b$. Следует отметить, что в [2] группы с указанным свойством названы транзитивными.

В [3] рассматривается понятие «вполне транзитивность» для произвольной абелевой группы. Затем это понятие уточняется в [4]. При этом введенное понятие вполне транзитивной абелевой группы согласуется с рассматриваемыми ранее определениями вполне транзитивной p-группы и вполне транзитивной группы без кручения.

Интерес к изучению вполне транзитивных абелевых групп продиктован следующими соображениями. Вполне транзитивными группами являются группы, мало связанные между собой, однако имеющие фундаментальное значение в теории p-групп и групп без кручения. К вполне транзитивным группам относятся, например, p-группы без элементов бесконечной высоты, p–адические алгебраически компактные группы и однородно сепарабельные группы, которым посвящены работы Р. Бэра, Ю.Л. Ершова, Л.Я. Куликова, А.П. Мишиной, Л. Фукса и других алгебраистов, квазисервантно инъективные группы без кручения, сильно однородные группы, интенсивно изучаемые в последнее время. Также, понятие вполне транзитивной группы тесно связано с изучением вполне характеристических подгрупп абелевых групп ([4]).

В [5] Кэрролл вводит понятие k–вполне транзитивной p–группы, тем самым обобщая понятие вполне транзитивности для p–групп. Пусть G — p–группа и $k \in \mathbb{N}$. Группа G называется k*–вполне транзитивной*, если из выполнения условий для кортежей $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ элементов группы G:

1) $H(x_i) \leq H(y_i)$ $i = \overline{1,k}$;

2) кортеж X высотно независим, в том смысле, что при $i \neq j$ $h_G(rx_i) \neq h_G(sx_j)$ для любых $r, s \in \mathbb{Z}$, кроме случая $rx_i = sx_j = 0$

следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ группы G со свойством $\theta(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$.

Далее под словом "группа"будем понимать абелеву группу без кручения.

Прежде чем определять k-вполне транзитивную абелеву группу без кручения, рассмотрим следующее понятие.

Пусть G — группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Кортеж элементов $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ группы G назовем t*–независимым*, если при $i \neq j$ типы $t(x_i)$ и $t(x_j)$ несравнимы. Наибольшую длину t–независимого кортежа группы G назовем t*-длиной группы* G и будем обозначать $k_t(G)$. Если в группе G для любого $k \in \mathbb{N}$ существует t-независимый кортеж, будем считать, что $k_t(G) = \infty$. К примеру, t–длина всякой однородной группы (в том числе делимой и ранга 1) равна 1.

Укажем некоторые свойства t-длины прямой суммы групп без кручения.

Пусть $G = A \bigoplus B$. Тогда:
1) $k_t(G) \geq k_t(A)$, $k_t(G) \geq k_t(B)$;
2) Если для любых элементов $a \in A$, $b \in B$ типы $t(a)$ и $t(b)$ несравнимы, то $k_t(G) \geq k_t(A) + k_t(B)$;
3) Если для любых элементов $a \in A$, $b \in B$ типы $t(a)$ и $t(b)$ сравнимы, то $k_t(G) = max(k_t(A); k_t(B))$.

Также, имеет место следующая оценка верхней границы t-длины для вполне разложимых групп конечного ранга.

Лемма 1. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$ *— вполне разложимая группа ранга* n*,*

$r(A_i) = 1$. *Тогда* $k_t(G) \leq C_n^m$, *где* $m = [\frac{n}{2}]$.

Замечание. Верхняя оценка достигается, например, для групп вида $G = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \cong \mathbb{Q}_{p_i}$.

Учитывая введенное понятие, определим k-вполне транзитивность для групп без кручения следующим образом.

Определение 1. Пусть G — группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Группа G называется *k-вполне транзитивной*, если для любых кортежей $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ элементов группы G из выполнения условий:

1) $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$ для всех $i = \overline{1,k}$;
2) кортеж X является t-независимым;
следует существование $\theta \in E(G)$, такого что $\theta(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$.

Отметим, что при $k = 1$ получаем понятие вполне транзитивности. Также ясно, что при $k > k_t(G)$ группа G является k-вполне транзитивной по определению. Тогда, в силу леммы 1 заключаем, что вполне разложимые группы ранга n являются k-вполне транзитивными при всех $k > C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

В [4] получено необходимое и достаточное условие вполне транзитивности однородно разложимых групп, которое связано со следующим понятием.

Определение 2.([4]) Будем говорить, что однородно разложимая редуцированная группа $G = \bigoplus\limits_{t \in T} G_t$, где G_t — однородная компонента типа t, *удовлетворяет условию контрастности для типов*, если для всяких двух типов $t_1, t_2 \in T$ и любого простого числа p, такого что $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$ имеет место $pG_{t_2} = G_{t_2}$.

Рассмотрим вполне разложимые группы со следующей структурой.

Пусть $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ — вполне разложимая группа, $r(Ai) = 1$, причем при $i \neq j$ типы $t(A_i)$ и $t(A_j)$ несравнимы. Другими словами, семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему групп. Для рассмотрения групп с такой структурой введем следующие обозначения.

Для произвольной группы G обозначим $\pi(G) = \{p \in \Pi; pG \neq G\}$.

Пусть $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i, r(Ai) = 1$ — вполне разложимая группа. Для любого подмножества $J \in I$ обозначим $t_J = inf_{j \in J}(t(A_j))$. В частности, если $J = i$, то $t_J = t_i = t(A_i)$. Для любого элемента $g \in G$ обозначим $I(g) = \{i \in I; \pi_i(g) \neq 0\}$. Здесь π_i — проекция G на слагаемое A_i.

С учетом введенных обозначений, получаем ряд результатов для групп с указанной выше структурой.

Теорема 2. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ *— вполне разложимая группа ранга* n, $r(A_i) = 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ *образует жесткую систему. Если группа* G *является* k*–вполне транзитивной для некоторого* $k \in \mathbb{N}$, *то для любых подмножеств* $J_1, J_2, ..., J_k \in I$, *таких что типы* t_{J_m} *и* t_{J_m} *несравнимы при* $m \neq n$, *справедливо* $J_m \bigcap J_n = \varnothing$.

Предложение 3. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ *— вполне разложимая группа ранга* n, $r(A_i) = 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ *образует жесткую систему. Если группа* G *вполне транзитивна, то для любых элементов* $a, b \in G$, *таких что* $\chi(a) \leq \chi(b)$, *выполнено* $I(b) \subset I(a)$.

Теорема 4. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ *— вполне разложимая группа ранга* n, $r(A_i) = 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ *образует жесткую систему. Группа* G *является* k*-вполне транзитивной для всех* $k \in \mathbb{N}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) группа G *удовлетворяет условию контрастности для типов;*

2) для любых двух элементов $a, b \in G$ *с несравнимыми типами выполнено* $I(a) \bigcap I(b) = \varnothing$.

Теорема 5. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ *— вполне разложимая группа ранга* n, $r(A_i) = 1$, $\{A_i\}_{i \in I}$ *образует жесткую систему. Группа* G *является* k*-вполне транзитивной для некоторого* $k \in \mathbb{N}$ *тогда и только тогда, когда для любых множеств* $J_1, J_2, ..., J_k \subset I$, *таких что типы* t_{J_m} *и* t_{J_n} *несравнимы при* $m \neq n$, *выполнены условия:*
1) $J_m \bigcap J_n = \varnothing$;
2) группы $G_m = \bigoplus\limits_{j \in J_m} A_j$ *удовлетворяют условию контрастности для*

типов;
3) если для некоторых $J \subset I$ *и* $m = \overline{1,k}$ *справедливо* $\pi(\bigoplus_{j\in J} A_j) \subset \pi(G_m)$, *то* $J \subset J_m$.

Литература

[1] *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups / I. Kaplansky — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1974.

[2] *Крылов П. А.* О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник асп. работ по матем. — Томск, 1973. — С. 15–20.

[3] *Гриншпон С.Я., Мисяков В.М.* О вполне транзитивных абелевых группах / С. Я. Гриншпон, В. М. Мисяков // Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 12–27.

[4] *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т.8. — С. 407–473.

[5] *Carroll D.* Multiple transitivity in abelian groups // Arch. Math. — 1994. — Vol.63. — P. 9–16.

[6] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — 1977. — Т.2.

[7] *Рогозинский М. И.* k-вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Современные проблемы математики и механики: Материалы II Всерос. мол. науч. конф. — Томск, 2011. — С. 41–44.

SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

Сорокин К.С. (Томск)

Пусть R — кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется *чистым*, если $r = u + e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется *чистым*, если всякий его элемент является чистым. Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году (см. [1]) как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала. Класс чистых колец является довольно широким и содержит, например, полусовершенные кольца (следовательно и все конечные кольца), кольца линейных операторов векторных пространств, кольца эндоморфизмов проективных модулей над правым совершенным кольцом. В свою очередь класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

В случае, когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R. В частности, если f — чистый элемент кольца эндоморфизмов модуля M, это означает, что существует такой идемпотентный эндоморфизм e модуля M, что f совпадает на $\mathrm{Ker}(e)$ с некоторым автоморфизмом модуля M. Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов(см. [2], [3]).

Поскольку абелевы группы являются $\mathbb{Z}$-модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп. В данной работе рассматривается вопрос чистоты колец эндоморфизмов самомалых SP–групп конечного ранга без кручения.

Определение 1. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p–компонент называется SP *– группой*, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \longrightarrow A$ продолжается до сервантного вложения $A \longrightarrow \prod\limits_p A_p$.

Определение 2. Группа A называется *самомалой*, если образ каждого гомоморфизма $A \longrightarrow \bigoplus\limits_{\Re} A$ ($\Re$ — произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A.

Введём обозначения. Пусть A — SP-группа.

$E(A)$ обозначим через R, $E(A_p)$ через R_p, $\mathrm{Hom}(A, T(A))$ через R_t, R/R_t через S.

Множество всех простых чисел, соответствующих группе A, через $\mathbb{P}$.

Лемма 1. *Пусть A – SP–группа, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $A = A_p \bigoplus B_p$ для всякого простого p, причём $pB_p = B_p$.

2) если A — группа конечного ранга, то S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра.

Теорема 2. *Пусть A — самомалая SP-группа конечного ранга, тогда кольцо R является чистым.*

Доказательство. Пусть α — произвольный эндоморфизм группы A. Рассмотрим $\bar{\alpha} \in S$. Так как A — SP-группа конечного ранга, то по лемме 1 S — конченомерная $\mathbb{Q}$-алгебра. Поэтому S — чистое кольцо и $\bar{\alpha} = \bar{e} + \bar{u}$, где $\bar{e}$ — идемпотентый, а $\bar{u}$ — обратимый элементы кольца S. Это значит, что найдутся такие r_i $(i = \overline{1,4})$ и $v \in R$, что

$$\alpha = e + u + r_1,$$
$$e^2 - e = r_2,$$
$$uv = vu + r_3 = 1 + r_4,$$

где $\bar{v}$ — обратный к $\bar{u}$.

Так как A — самомалая SP–группа конечного ранга, то $R_t = \bigoplus\limits_p R_p$ (см. [4]). Значит, существует такое конечное подмножество простых чисел $\pi \subset \mathbb{P}$, что $r_i A \subseteq \bigoplus\limits_{p\in\pi} A_p$. В силу того, что A — SP–группа, по лемме 1 получаем, что $A = \mathrm{C} \bigoplus B$, где $C = (\bigoplus\limits_{p\in\pi} A_p)$, а B — p–делимая группа $(p \in \pi)$, причём $r_i C \subseteq C$ и $r_i B = 0$ $(i = \overline{1,4})$. Следует также отметить, что C и B — вполне характеристические подгруппы.

Рассмотрим теперь $\alpha\,|_B = e\,|_B + u\,|_B$. Имеют место равенства:

$$e\,|_B{}^2 - e\,|_B = 0,$$
$$u\,|_B\, v\,|_B = v\,|_B\, u\,|_B = 1\,|_B\,.$$

Следовательно, $\alpha\,|_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$.
По условию теоремы группа A — самомалая SP-группа конечного ранга, поэтому R_p — конечные кольца (см. [4]), а следовательно, чистые. Тогда и $E(C) = \prod\limits_{p\in\pi} R_p$ — чистое кольцо.

Таким образом мы показали, что $\alpha\,|_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$ и $\alpha\,|_C$ — чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \bigoplus B$ и то, что C и B — вполне характеристические подгруппы группы A, получим, что α — чистый элемент кольца R.

Литература

[1] *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977.– №229. – p. 269-278.

[2] *Nicholson W.K.* Clean endomorphism rings / W.K. Nicholson, K. Varadarajan, Y. Zhou // Arch. Math. – 2004. – №–83. – p. 340-343.

[3] *Camillo V.P.* Continuous modules are clean / V.P. Camillo, D. Khurana, T.Y. Lam, W.K. Nicholson, Y. Zhou// J. Algebra. – 2006. – №304. – p. 94–111.

[4] *Крылов П.А.* Об одном классе смеашанных абелевых групп // Вестник ТГУ. – 2000. – т.269. – с. 29–34.

О количестве почти вполне разложимых групп

Тверетин А.С. (Сургут)

Абелева группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой (пвр-группа), если она содержит разложимую в прямую сумму подгруппу такую, что фактор-группа по ней конечна. В противном случае группа называется сильно неразложимой. Любая пвр-группа G конечного ранга обладает такими подгруппами $\oplus_{i=1}^{n} A_i = A$, что каждая подгруппа A_i сильно неразложима и сервантна в G, а фактор-группа $G/A = T$ — конечная группа. Всякая такая подгруппа A называется полным квазиразложением группы G. Если A_i образуют жёсткую систему, то группа A будет единственным полным квазиразложением группы G. Следовательно, фактор-группа также определяется однозначно [1]. Все обозначения и терминология стандартны и взяты из [2], [3], а также [4].

В работе определяется количество (A, T)-групп при условиях, что A является единственным (с точностью до изоморфизма) полным квазиразложением. Данная работа дополняет ранее опубликованные работы автора [5], [6], где группы рассматривались с точностью до равенства. Показана эквивалентность задачи "с точностью до равенства"и "с точностью до изоморфизма если A_i образуют жёсткую систему, а T элементарна.

В настоящей работе A считается блочно-жёсткой, то есть квазислагаемых A_i попарно несравнимы, хотя могут повторяться. Фактор-группа T считается элементарной, то есть для фиксированного простого числа p $T \cong \oplus_k Z(p)$. Для расчёта написана программа (на языке Си).

Алгоритм учитывает сервантность каждого квазислагаемого в G.

Литература

[1] *Кожухов С.Ф.* Конечные группы автоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга / С.Ф. Кожухов // Известия АН СССР, серия математическая. — 1988. — Т.52. — №3. — С. 501–521

[2] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1. — С. 335

[3] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т.2. — С. 416

[4] *Arnold D.* Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings / D. Arnold // Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. — 1982.

[5] *Кожухов С.Ф., Тверетин А.С.* Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с циклическим фактором /С.Ф. Кожухов, А.С Тверетин // Фундаментальная и прикладная математика. Т.13 вып.3. – М.: ЦНИТ МГУ, 2007. — С. 61–67.

[6] *Тверетин А.С.* Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с элементарным фактором / А.С. Тверетин // Вестник ТГУ N 305 (декабрь 2007) — С. 185–187

Базовые поля csp-колец

Тимошенко Е.А. (Томск)

В статье [1] автором начато систематическое изучение базовых полей csp-колец. Приведём основные определения и обозначения.

Через P, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ будем обозначать соответственно множества всех простых, натуральных, целых и рациональных чисел. Под *характеристикой* в [1] понималась любая последовательность вида $\chi = (m_p)_{p \in P}$, где $m_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ (термин «характеристика поля» используем в его обычном смысле). Через P_χ обозначим множество всех простых p, для которых $m_p \neq 0$. Если $m_p = \infty$, то будем считать, что K_p есть кольцо целых p-адических чисел; в противном случае полагаем $K_p = \mathbf{Z}/p^{m_p}\mathbf{Z}$. Пусть множество $L = P_\chi$ бесконечно. Обозначим

$$K_\chi = \prod_{p\in L} K_p, \qquad T_\chi = \bigoplus_{p\in L} K_p \subset K_\chi \tag{1}$$

(ясно, что T_χ является идеалом кольца K_χ).

Говоря о подкольце кольца с единицей, мы всегда подразумеваем, что подкольцо содержит единичный элемент этого кольца. Будем называть csp-*кольцом* всякое подкольцо $R \subset K_\chi$ такое, что $T_\chi \subset R$ и кольцо R/T_χ является полем. Поле R/T_χ, а также всякое изоморфное ему поле мы назовём *базовым полем* csp-кольца R. Наша основная цель — выяснить, какие поля могут служить базовыми полями csp-колец. Легко видеть, что всякое такое поле (т. е. поле, вкладывающееся в K_χ/T_χ в качестве подкольца) имеет характеристику нуль и мощность не выше мощности континуума $\mathfrak{c}$. Содержащееся в K_χ/T_χ простое поле характеристики 0 будем отождествлять с полем $\mathbb{Q}$.

Напомним основные результаты, полученные в [1].

Факт 1. Если для характеристик χ и φ выполнено $P_\chi = P_\varphi$, то для всякого поля F вложение $F \to K_\chi/T_\chi$ существует в том и только в том случае, когда существует вложение $F \to K_\varphi/T_\varphi$ [1, теорема 1.3].

Ввиду этого свойства вместо общей ситуации (1) можно ограничиться случаем

$$K = \prod_{p\in L} \mathbf{Z}_p, \qquad T = \bigoplus_{p\in L} \mathbf{Z}_p \subset K, \tag{2}$$

где L есть бесконечное множество простых чисел и $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Факт 2. Для всякого бесконечного множества $L \subset P$ кольцо K/T содержит чисто трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}$, имеющее степень трансцендентности $\aleph_1$, в качестве подкольца [1, теорема 2.2].

Заметим, что всякий многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ почти для всех $p \in P$ можно рассматривать как элемент кольца многочленов $\mathbb{Z}_p[x]$.

Факт 3. Существует подмножество $L \subset P$ такое, что

$$|L| = \aleph_0 \text{ и всякий многочлен из } \mathbb{Q}[x], \text{отличный от константы, почти для всех } p \in L \text{ разлагается в } \mathbb{Z}_p[x] \text{ в произведение многочленов степени 1} \tag{3}$$

(см. [1, теорема 3.2]).

Замечание. Таких подмножеств существует довольно много. Точнее говоря, можно построить континуальное почти дизъюнктное семейство подмножеств множества P, каждое из которых обладает свойством (3): достаточно взять континуальное почти дизъюнктное семейство счётных подмножеств множества $L \subset P$, обладающего данным свойством.

Факт 4. Если подмножество $L \subset P$ удовлетворяет условию (3), то K/T содержит алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$ в качестве подкольца [1, теорема 3.3].

Введём отношение порядка $\prec$ на множестве $\mathbb{N}^{\mathbf{N}}$ всех отображений $\mathbb{N} \to \mathbf{N}$: будем считать, что $z' \prec z$ в том и только в том случае, когда почти для всех $i \in \mathbf{N}$ справедливо $z'(i) < z(i)$. Подмножество $B \subset \mathbb{N}^{\mathbf{N}}$ назовём *ограниченным*, если существует отображение $z \in \mathbb{N}^{\mathbf{N}}$ такое, что $z' \prec z$ при всех $z' \in B$. Через $\mathfrak{b}$ обозначается наименьшая возможная мощность неограниченного подмножества множества $\mathbb{N}^{\mathbf{N}}$; нетрудно проверить, что $\mathfrak{b}$ — регулярный кардинал и $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$. Известно [2, 3], что каждая из возможностей $\aleph_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, $\aleph_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\aleph_1 < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ совместима с системой аксиом ZFC.

В конце работы [1] была сформулирована такая проблема: всякое ли счётное поле характеристики нуль является базовым полем некоторого csp-кольца? Оказалось, что ответ положителен даже для всякого поля мощности $\leqslant \mathfrak{b}$ и нулевой характеристики. Если мы принимаем аксиому Мартина (в этом случае $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, см. [2, 3]), то отсюда вытекает следующее утверждение: F является базовым полем некоторого csp-кольца тогда и только тогда, когда характеристика поля F равна нулю и $|F| \leqslant \mathfrak{c}$.

Теорема 1. *Пусть K/T содержит подкольцо F, являющееся алгебраически замкнутым полем и такое, что $|F| < \mathfrak{b}$. Тогда естественное вложение $F \to K/T$ можно продолжить до вложения $\overline{F(x)} \to K/T$, где $\overline{F(x)}$ — это алгебраическое замыкание простого трансцендентного расширения $F(x)$ поля F.*

Теорема 1 позволяет доказать, что всякое поле характеристики нуль и мощности, не превышающей кардинального числа $\mathfrak{b}$, служит базовым полем некоторого csp-кольца. В следующей теореме считаем, что K и T заданы равенствами (2), причём под L понимается множество простых чисел, обладающее свойством (3).

Теорема 2. *Всякое поле характеристики* 0, *мощность которого не превышает* $\mathfrak{b}$, *вкладывается в кольцо* K/T *в качестве подкольца.*

Замечание. Применяя рассуждения, аналогичные использованным в доказательствах теорем 1 и 2, можно усилить факт 2, заменив в его формулировке $\aleph_1$ кардинальным числом $\mathfrak{b}$.

Следующий результат показывает, что существует достаточно много попарно неизоморфных csp-колец, имеющих одно и то же базовое поле. По-прежнему считаем, что K и T заданы равенствами (2), где L есть множество простых чисел, удовлетворяющее условию (3).

Теорема 3. *Пусть* F *— счётное поле характеристики* 0 *и* $F \ncong \mathbb{Q}$. *Тогда множество неизоморфных* csp-*колец* $R \subset K$, *для которых* R/T *изоморфно полю* F, *имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Литература

[1] *Тимошенко Е.А.* О базовых полях csp-колец / Е.А. Тимошенко // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49. — № 4. — С. 555–565.

[2] *Van Douwen E.K.* The integers and topology / E.K. van Douwen // Handbook of set-theoretic topology. — Amsterdam et al.: North-Holland, 1984. — P. 111–167.

[3] *Blass A.R.* Combinatorial cardinal characteristics of the continuum / A.R. Blass // Handbook of set theory. — Dordrecht et al.: Springer, 2010. — V. 1. — P. 395–489.

Критерий выделения сервантной подгруппы прямым слагаемым в редуцированной p-локальной группе без кручения

Фарукшин В.Х.[5] (Москва)

Абелева группа A называется *p-локальной* (обобщенно p-примарной по Л. Я. Куликову или $\mathbb{Z}_p$-группой), если $A \cong A \otimes \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо дискретного нормирования, локализация кольца целых чисел относительно простого p.

Группа называется *вполне редуцированной*, если не имеет делимых и свободных $\mathbb{Z}_p$-групп в качестве прямых слагаемых.

Группу назовем *связкой* групп B и C по свободной $\mathbb{Z}_p$-группе F, если существуют сервантные мономорфизмы

$$\varphi\colon B \to \bigoplus_J \widehat{\mathbb{Z}}_p \qquad \text{и} \qquad \psi\colon C \to \bigoplus_J \widehat{\mathbb{Z}}_p$$

такие, что

$$\varphi B \cap \psi C = F \qquad \text{и} \qquad A = \langle \varphi B, \psi C \rangle_* \subset \bigoplus_J \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

$\mathbb{Z}_p$ — p-адическое пополнение $\mathbb{Z}_p$.

Лемма 1. *Для всякой сервантной подгруппы B_0 $\mathbb{Z}_p$-группы без кручения A конечного ранга найдутся однозначно определенные с точностью до изоморфизма $\mathbb{Z}_p$-группы без кручения B и C, сервантные мономорфизмы*

$$\varphi\colon B \to \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_p \qquad \text{и} \qquad \psi\colon C \to \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

свободная $\mathbb{Z}_p$-группа F, такие что группа A является связкой групп B и C, и B содержит p-адически плотную подгруппу, изоморфную B_0.

Теорема 2. *Сервантная подгруппа B_0 $\mathbb{Z}_p$-группы без кручения A конечного ранга выделяется прямым слагаемым в группе A в том и только в том случае, если для соответствующей связки групп B и C, задающей группу A существует хотя бы один гомоморфизм*

$$\alpha\colon B \to C \qquad \text{или} \qquad \beta\colon C \to B$$

[5]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

такой, что

$$\varphi = \psi\alpha \qquad \text{\textit{или}} \qquad \psi = \varphi\beta,$$

делающий соответствующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \\
& \bigoplus\limits_J \widehat{\mathbb{Z}}_p &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[ll, "\beta"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
& \bigoplus\limits_J \widehat{\mathbb{Z}}_p &
\end{tikzcd}$$

Следствие 3. Если p-локальная группа без кручения A конечного ранга является связкой двух неразложимых групп B и C с определяющими мономорфизмами φ и ψ, то A разложима в прямую сумму подгрупп в том и только в том случае, если существует хотя бы один гомоморфизм

$$\alpha\colon B \to C \qquad \text{или} \qquad \beta\colon C \to B$$

такой, что

$$\varphi = \psi\alpha \qquad \text{или} \qquad \psi = \varphi\beta$$

соответственно.

Замечание 1. Достаточно рассматривать вполне редуцированные группы.

Замечание 2. Утверждения верны и для групп счетного ранга.

Замечание 3. Двойственным образом можно определить склейку групп B и C, для которой утверждения теоремы 2 верны.

Гомоморфизмы K-расщепляемых p-локальных редуцированных групп без кручения

Фарукшин В. Х.[6] (Москва)

Если p-простое число, то группа G называется *p-локальной*, если умножение на любое целое ненулевое число $k \neq p$ является автоморфизмом группы G.

[6]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

Редуцированную p-локальную группу без кручения G назовем *K-расщепляемой*, K — конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, если

$$G \otimes R \cong D \oplus M,$$

где D — делимая группа, M — свободный модуль над кольцом $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — p-адическое пополнение целых чисел $\mathbb{Z}$.

Категорию K-расщепляемых p-локальных групп без кручения с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов обозначим через $\mathscr{L}_p(K)$.

Теорема 1. *Любая группа G конечного ранга категории $\mathscr{L}_p(K)$, где K — конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел с группой Галуа $G(K/\mathbb{Q})$, имеет прямое разложение*

$$G = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n, \tag{$*$}$$

где число слагаемых n равно числу подгрупп G_i группы $G(K/\mathbb{Q})$, каждое прямое слагаемое A_i является K_i-расщепляемой группой и не имеет прямых слагаемых с полем расщепления $K_j \neq K_i$, K_i — поле инвариантов подгруппы G_i группы Галуа $G(K/\mathbb{Q})$ в поле K.

Определение. Прямое разложение $(*)$ из теоремы 1 назовем *каноническим разложением группы G.*

Следствие 2. *Если подполя K_i и K_j поля расщепления K группы G линейно разделены над $\mathbb{Q}$, то группы гомоморфизмов* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)$ *и* $\mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ *являются нулевыми для соответствующих прямых слагаемых канонического разложения группы G.*

Следствие 3. *Если группа Галуа $G(K/\mathbb{Q})$ поля K является прямым произведением подгрупп G_1 и G_2, то прямые слагаемые A_1 и A_2 в каноническом разложении любой группы G категории $\mathscr{L}_p(K)$ соответствующие полям инвариантов K_1 и K_2 подгрупп G_1 и G_2 имеют нулевые группы гомоморфизмов:*

$$\mathrm{Hom}(A_1, A_2) = 0 \qquad \textit{и} \qquad \mathrm{Hom}(A_2, A_1) = 0.$$

Двойственности и эквивалентности в теории абелевых групп

Фомин А.А.[7] (Москва)

Категории двойственности и эквивалентности играют в теории абелевых групп важную роль.

А.Г. Курош описал p-примитивные группы при помощи p-адических матриц в 1937 году. Е.Ли Лэйди обобщил его теорему на модули без кручения конечного ранга над произвольным кольцом дискретного нормирования в 1990–х годах. При этом он заметил, что теорема Куроша устанавливает эквивалентность двух категорий.

В 1938 году одновременно и независимо А.И. Мальцев и Дуглас Дерри получили описание абелевых групп без кручения конечного ранге при помощи матриц. Теорема Дерри существенно опиралась на результат Куроша. Позднее она была включена в монографии Куроша по теории групп и Л. Фукса по теории абелевых групп и получила название «Описание Куроша—Мальцева—Дерри». Это название нельзя считать правильным, так как несмотря на внешнюю схожесть, теорема Мальцева принципиально отличается от теоремы Дерри.

В [1], [2] показано, что описание Мальцева является двойственностью двух категорий. Объектами одной категории являются абелевы группы без кручения конечного ранга, объекты другой категории — специального вида матрицы, введенные Мальцевым (совершенные матрицы в его терминологии).

Заметим, что p-примитивные группы Куроша являются также и факторно делимыми. В [2] показано, что теорема Куроша допускает естественное обощение на класс всех смешанных факторно делимых групп. При этом получается эквивалентность двух категорий. Объектами одной категории являются смешанные факторно делимые группы, объекты другой категории — это в точности упомянутые выше матрицы Мальцева.

Замечательным образом композиция двойственности Мальцева и эквивалентности Куроша совпала с двойственностью, введенной в [3].

[7]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

Литература

[1] *Fomim A.A.* A category of matrices representing two categories of abelian groups / A. A. Fomin // Fundam. Prikl. Mat — 2007. — V.13(3) — P. 223–244.

[2] *Alexander Fomin* Invariants for abelian groups and dual exact sequences / A. Fomin // Journal of Algebra — 2009. — V.322 P. 2544–2565.

[3] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible abelian groups / A. A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — P. 45–52.

Развитие метода Мальцева описания абелевых групп без кручения

Фомин А. А.[8] (Москва)

Пусть $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod\limits_p \widehat{Z}_p$ — произведение колец целых p-адических чисел по всем простым p. Согласно [1-3], каждая конечная последовательность $m_1, \ldots, m_n$ элементов конечно представимого $\widehat{\mathbf{Z}}$-модуля M определяет соответственно две абелевых группы с выделенными базисами: группу без кручения A с базисом $a_1, \ldots, a_n$ и факторно делимую смешанную группу A^* с базисом $a_1^*, \ldots, a_n^*$. Группы A и A^* дуальны в смысле [4], при этом выделенные базисы также взаимно дуальны.

Указанное соответствие между такими последовательностями элементов и группами без кручения является развитием классического матричного описания абелевых групп без кручения конечного ранга, данное А.И. Мальцевым.

В качестве применения указанного выше соответствия исследуются группы Корнера [3], представляющие примеры групп без кручения конечного ранга с аномальным прямым разложением. В частности, построен $\widehat{\mathbf{Z}}$-модуль M, соответствующий группе Корнера G, так что выделенная последовательность элементов $m_1, \ldots, m_n \in M$ из M определяет группу без кручения G и дуальную ей факторно делимую смешанную группу G^*. В новых терминах доказана теорема Корнера.

[8]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

Литература

[1] *Fomin A.A.* A category of matrices representing two categories of abelian groups / A.A. Fomin // Journal of Math. Sciences —2008. — V.154, n.3 — P. 430–445.

[2] *Alexander Fomin* Invariants for abelian groups and dual exact sequences / A. Fomin // Journal of Algebra — 2009. — V.322. — P. 2544–2565.

[3] *Fomin A.A.* Quotient divisible and almost completely decomposable groups, in: Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A.L.S. Corner, de Gruyter / A.A. Fomin // Berlin/New York — 2008. — P. 147-168.

[4] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible abelian groups / A. A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — P. 45–52.

О кольцах квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с ненулевым радикалом Джекобсона

Чередникова А.В. (Кострома)

В работе рассматриваются только абелевы группы без кручения конечного ранга. Все используемые термины являются общепринятыми в теории абелевых групп и могут быть найдены в [1].

Через $\mathbb{Q}$ обозначается поле рациональных чисел. Для групп G и H запись $G \doteq H$ означает, что G квазиравна H. Если группы R_i и R_j ранга 1 имеют соответственно несравнимые типы $t(R_i) = \tau_i$ и $t(R_j) = \tau_j$, то будем писать $\tau_i \xi \tau_j$.

Далее, введем следующие обозначения для подалгебр полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 над полем рациональных чисел:

$$\mathbf{A_7} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \right) \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_8} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{array} \right) \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_9} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \right) \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_{10}} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{array} \right) \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Здесь индекс в обозначении подалгебры означает ее размерность над $\mathbb{Q}$.

Кольца квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения рангов 2 и 3 были описаны, соответственно, в [2] и [3]. Описание колец квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, типы квазислагаемых которых попарно сравнимы представлено в [4]. В работе получено описание колец квазиэндоморфизмов с ненулевым радикалом Джекобсона почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, среди типов квазислагаемых которых два равны и хотя бы два несравнимы. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют четыре подалгебры полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 над полем рациональных чисел, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов с ненулевым радикалом Джекобсона почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, среди типов квазислагаемых которых два равны и хотя бы два несравнимы.

Теорема. *Пусть G почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и*

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4,$$

где $rank(R_k) = 1$, причем среди типов квазислагаемых $t(R_k) = \tau_k$ ($k = 1,2,3,4$) два равны и хотя бы два несравнимы. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ с ненулевым радикалом Джекобсона группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно или антиизоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A_7}, \mathbf{A_8}, \mathbf{A_9}, \mathbf{A_{10}}.$$

При этом для произвольной перестановки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \tau_{i_4}$ множества типов $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

1. $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_7} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2}, \tau_{i_1}\xi\tau_{i_3}, \tau_{i_1}\xi\tau_{i_4}, \tau_{i_3} < \tau_{i_4}$*;*
2. $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_8} \Leftrightarrow \tau_{i_3} < \tau_{i_1} = \tau_{i_2}, \tau_{i_1}\xi\tau_{i_4}, \tau_{i_3}\xi\tau_{i_4}$*;*
3. $\mathbf{K}$ *антиизоморфно* $\mathbf{A_8} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1}\xi\tau_{i_4}, \tau_{i_3}\xi\tau_{i_4}$*;*
4. $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_9} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} > \tau_{i_3}, \tau_{i_1}\xi\tau_{i_4}, \tau_{i_4} > \tau_{i_3}$*;*
5. $\mathbf{K}$ *антиизоморфно* $\mathbf{A_9} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1}\xi\tau_{i_4}, \tau_{i_4} < \tau_{i_3}$*;*
6. $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_{10}} \Leftrightarrow \tau_{i_3} < \tau_{i_1} = \tau_{i_2}, \tau_{i_4} < \tau_{i_1}, \tau_{i_3}\xi\tau_{i_4}$*;*
7. $\mathbf{K}$ *антиизоморфно* $\mathbf{A_{10}} \Leftrightarrow \tau_{i_1} = \tau_{i_2} < \tau_{i_3}, \tau_{i_1} < \tau_{i_4}, \tau_{i_3}\xi\tau_{i_4}$.

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы, М.: Мир, 1977. — Т.2.

[2] *Reid J.D.* On the rings of quasi-endomorphism of tortion-free Abelian groups, Topics in Abelian Groups. 1963. P. 51–68.

[3] *Чередникова А.В.* Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3, Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. Вып. 13, 14. С. 237–242.

[4] *Чередникова А.В.* О кольцах квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, Математика, информатика и методика их преподавания: Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ. Москва: МПГУ, 2011. С. 94–96.

Вполне транзитивные абелевы E-нильгруппы

Чехлов А. Р. (Томск)

Напомним, что кольцо R называется *энгелевым*, если для любых $b, a \in R$ найдется такое натуральное n, что $[b, \underbrace{a, \ldots, a}_{n}] = 0$. Здесь $[a, b] = ab - ba$ — *коммутатор* элементов $a, b \in R$, а $[a_1, \ldots, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n]$. Говорят, что элемент $a \in R$ является *энгелевым* элементом (или *ниль-элементом*), если существует наименьшее натуральное число n такое, что $[b, \underbrace{a, \ldots, a}_{n}] = 0$ для каждого $b \in R$. Кольцо, все элементы которого энгелевы, будем называть *лиевым нилькольцом* (для краткости просто *нилькольцом*).

Абелеву группу A с энгелевым кольцом $E(A)$ будем называть Е-*энгелевой*, а с нилькольцом $E(A)$ — Е-*нильгруппой*.

В Е-энгелевых группах все прямые слагаемые вполне инвариантны.

Приведем несколько простых свойств.

1. Для элементов a, b кольца R равносильны условия:

а) $[b, a, a] = 0$;

б) $[b, a^m, a^n] = 0$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$;

в) $2a^n b a^n = a^{2n} b + b a^{2n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

2. Пусть для элементов $a, b \neq 0$ кольца с 1 для некоторого n выполняется равенство $[b, \underbrace{a, \ldots, a}_{n}] = 0$. Тогда

а) условие $ab = 1$ (соответственно $ba = 1$) влечет $ba = 1$ (соответственно $ab = 1$);

б) правая регулярность элемента a влечет $ba \neq 0$, а левая регулярность элемента a влечет $ab \neq 0$.

3. Пусть R — энгелево кольцо и M — левый модуль над R. Тогда периодическая часть $T(M)$ модуля M является его сингулярным подмодулем.

4. Пусть A — энгелева группа без кручения и $\alpha \in \mathrm{Aut} A$. Тогда если $\alpha^k \in Z(E(A))$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $\alpha \in Z(E(A))$.

Напомним, что группа без кручения A называется *слабо транзитивной* (соответственно, *вполне транзитивной*), если для любых ее элементов a, b со свойством $\chi(a) = \chi(b)$ (соответственно, $\chi(a) \leqslant \chi(b)$) существует такой $\alpha \in E(A)$, что $\alpha a = b$.

Предложение 1. *Если A — редуцированная слабо транзитивная группа без кручения, то каково бы ни было $n \in \mathbb{N}$ для любого $0 \neq \alpha \in E(A)$ найдется такой $\beta \in E(A)$, что $\alpha(\beta\alpha)^n \neq 0$. В частности, $\alpha\beta\alpha \neq 0$ и, значит, кольцо $E(A)$ полупервично.*

Будем говорить, что Е-энгелева группа A обладает свойством $(*)$, если для $\beta, \alpha \in E(A)$ из $[\beta, n\alpha] = 0$, где $n \geqslant 2$, следует, что $[[\beta, (n-2)\alpha]^2, \alpha, \alpha] = 0$ (здесь $[\beta, 0] = \beta$).

Теорема.

1) *Пусть A — Е-энгелева группа без кручения со свойством $(*)$. Тогда если группа $\mathrm{Aut}\, A$ периодична, то кольцо $E(A)$ коммутативно.*

2) *Всякая слабо транзитивная* Е-*нильгруппа без кручения имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов.*

Предложение 2. *Если A — квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения с коммутативным кольцом $E(A)$, то все ненулевые эндоморфизмы группы A являются мономорфизмами.* Обозначим через $Z(A) = \{a \in A \,|\, [\alpha, \beta]a = 0 \text{ для любых } \alpha, \beta \in E(A)\}$ — Е-*центр* группы A.

Предложение 3. *Для квазиоднородной вполне транзитивной группы без кручения A следующие условия эквивалентны:*
1) $Z(A) \neq 0$;
2) $Z(A) = A$, т.е. кольцо $E(A)$ коммутативно.

Обобщение свойства вполне транзитивности абелевых групп без кручения

Чистяков Д.С.[9] (Нижний Новгород)

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, G — унитарный левый R-модуль. Множество $M_R(G) = \{f : G \to G | rf(x) = f(rx), r \in R\}$ является почтикольцом относительно операций сложения и композиции отображений.

В работе изучаются абелевы группы без кручения G конечного ранга, обладающие следующим свойством: для любых $a, b \in G$ таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ существует $f \in M_{E(G)}(G)$ со свойством $f(a) = b$. Группы с таким свойством будем называть M_E-вполне транзитивными.

Теорема 1. Однородная M_E-вполне транзитивная группа G является циклическим модулем над центром $CE(G)$ своего кольца эндоморфизмов.

Теорема 2. Группа без кручения с сильно однородным кольцом эндоморфизмов M_E-вполне транзитивна.

Следствие 3. Неоднородная вполне транзитивная группа конечного ранга, кольцо квазиэндоморфизмов которой является телом, M_E-вполне транзитивна.

[9]Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

Предложение 4. Прямые слагаемые M_E-вполне транзитивной группы M_E-вполне транзитивны.

Предложение 5. Пусть $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ — группа без кручения, удовлетворяющая условиям: 1) все слагаемые G_i M_E-вполне транзитивны,

2) все слагаемые G_i вполне инвариантны и сильно $E(G)$-сервантны,

3) $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тогда M_E-вполне транзитивна группа G.

Литература

[1] *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.— М.: Факториал пресс, 2006.

Эндопримальные абелевы группы и модули

Чистяков Д.С.[10] (Нижний Новгород)

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, G — унитарный левый R-модуль, $E = E_R(G)$ - кольцо эндоморфизмов модуля G. Рассмотрим множества

$M_R(G^n, G) = \{f : G^n \to G | rf(x_1, \ldots, x_n) = f(rx_1, \ldots, rx_n), r \in R\}$,
$M_E(G^n, G) = \{f : G^n \to G | \varphi f(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n), \varphi \in E\}$,
$PR(G^n, G) = \{f \in M_R(G^n, G) | f = \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n, \varphi_i \in E, x_i \in G\}$,
$PE(G^n, G) = \{f \in M_E(G^n, G) | f = r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n, r_i \in R, x_i \in G\}$.

Если $M_E(G^n, G) = PE(G^n, G)$ ($M_R(G^n, G) = PR(G^n, G)$), то модуль G будем называть *n-эндопримальным* (обобщенно n-эндопримальным). n-эндопримальный (обобщенно n-эндопримальный) для всех натуральных чисел n модуль будем называть эндопримальным (обобщенно эндопримальным). В частности, абелева группа называется *обобщенно эндопримальной*, если она является обобщенно эндопримальным модулем над своим кольцом эндоморфизмов ([1]).

Предложение 1. *Обобщенно 2-эндопримальная EE-группа имеет UA-кольцо эндоморфизмов.*

[10] Грант ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы". Протокол №1/23/3 от 13.07.2012. Заявка 2012-1.2.1-12-000-1001-051.

Предложение 2. *Пусть R — кольцо такое, что существует модульный эпиморфизм $R \to R^2$. Тогда каждый R-модуль обобщенно эндопримален и R — UA-кольцо.*

Предложение 3. *Пусть R — кольцо, обладающее системой попарно ортогональных идемпотентов $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и пусть для каждого $e_i \in E$ найдется $e_j \in E \setminus \{e_i\}$ такой, что левые R-модули Re_i и Re_j изоморфны. Тогда R — UA-кольцо.*

Хорошо известно ([2, теорема 7.3.]), что абелева группа без кручения G конечного ранга, совпадающая со своим псевдоцоколем, квазиравна группе $\mathrm{A} = \oplus A_i$, $i = 1, \ldots, n$, где все слагаемые A_i вполне характеристичны в группе A, при этом $\mathrm{A}_i = \oplus A_{ij}$, $j = 1, \ldots, n(i)$, группы A_{ij} попарно квазиизоморфны и $\mathcal{E}(\mathrm{A}_{ij})$ — тело. В обозначениях принятых выше имеет место

Следствие 4. *Если $G = SocG$ — абелева группа без кручения конечного ранга и $n(i) > 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то группа G обобщенно эндопримальна и имеет UA-кольцо эндоморфизмов.*

Обозначим через $\mathcal{R}$ — класс колец, над которыми каждый модуль обобщенно эндопримален. Класс $\mathcal{R}$ не пуст. Непосредственно проверяется, что рассматриваемый класс содержит не тривиальные (размерность больше двух) полные матричные кольца.

Теорема 5. *Пусть $S \in \mathcal{R}$ и $\psi : S \to R$ — гомоморфизм колец. Тогда $R \in \mathcal{R}$.*

Следствие 6. *Если $S \in \mathcal{R}$ может быть вложено в кольцо R вместе с единицей, то $R \in \mathcal{R}$.*

Следствие 7. *Если подпрямое произведение некоторого семейства колец принадлежит $\mathcal{R}$, то каждый множитель этого подпрямого произведения принадлежит $\mathcal{R}$.*

Следствие 8. *Если rad — это некоторый радикал в категории колец и $R \in \mathcal{R}$, то $R/rad(R) \in \mathcal{R}$.*

Следствие 9. *Пусть S — область целостности и $\psi : R \to S$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда $R \notin \mathcal{R}$.*

Следствие 10. *Пусть S — коммутативное кольцо и $\psi : R \to S$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда $R \notin \mathcal{R}$.*

Следствие 11. *Каждое кольцо класса $\mathcal{R}$ имеет ненулевые нильпотентные элементы.*

Литература

[1] *Albrecht U., Breaz S., Wickless W.* Generalized endoprimal abelian groups / Albrecht U., Breaz S., Wickless W. // Jour. of Alg. and Its Appl. — 2006. — V.5. — P. 1–17.

[2] *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.— М.: Факториал пресс, 2006.

Automorphism group of Abelian group and its application in the information theory

Camara Aly (Guinea)

The problem of determination of Abelian group by its automorphism group and its application in the information theory is considered. In this work we have deal with abelian p-groups and there automorphism groups. In particular for $p = 2$. One class of Abelian groups is called *Aut*-class if any 2 groups from this class with isomorphic automorphism groups are isomorphic. We investigated some *Aut*-classes of Abelian where the class of p-groups is one part. The application of these results not only in the information theory is possible, for example in the Biology.

Абелевы группы

Материалы Всероссийского симпозиума
(Бийск, 20-25 августа 2012 г.)

ISBN 978-5-85127-704-7

Ответственный редактор В.Х. Фарукшин

Сдано в набор 01.07.2012. Подписано к печати 06.08.2012. Формат $60\times90/16$.
Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. $3,9$. Тираж 100 экз.

Заказ 772, с. (сп.) 2860

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВПО
«АГАО» — 659333, г. Бийск, ул. Короленко, 53.

Типография «Деловые услуги»

И.п. Греков И.В. — 659333, г. Бийск, ул. Красноармейская, 71.