Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский педагогический государственный университет»

Абелевы группы

*Материалы Международного симпозиума,
посвященного 100-летию со дня рождения Л.Я. Куликова
(Москва, 2–6 ноября 2014 г.)*

Москва – 2014

УДК 512.541
ББК 22.144.12
А 143

А 143 **Абелевы группы** [Текст]: Материалы Международного симпозиума, посвященного 100-летию со дня рождения Л.Я. Куликова (Москва. 2–6 ноября 2014 г.)/ Отв. ред. А.В. Царев. — Москва: МПГУ, 2014. — 94 с.

Сборник содержит материалы участников Шестого Международного симпозиума «Абелевы группы», посвященного 100-летию со дня рождения Л.Я. Куликова, прошедшего в г. Москва 2–6 ноября 2014 г.

Адресован специалистам по теории абелевых групп, модулей, колец, алгебр и их приложений.

Симпозиум проведен при поддержке РФФИ, грант № 14-01-20467 г.

ISBN 978-5-4263-0193-1

СОДЕРЖАНИЕ

Л.Я. Куликов (1914–2001)

Леонид Яковлевич Куликов родился 2 ноября 1914 года в г. Никитовка Донецкой области. Окончив школу, он поступил в химический техникум. По окончании техникума он некоторое время работал библиотекарем в г. Славянске.

В 1934 году Л.Я. Куликов поступил на физико-математический факультет Московского государственного педагогического института (ныне МПГУ — Московский педагогический государственный университет). После окончания института в 1938 году он поступил в аспирантуру на кафедре алгебры. Его научным руководителем был Г.М. Шапиро. Аспирант Куликов принимал активное участие в работе алгебраического семинара под руководством О.Ю. Шмидта, которого считал своим учителем. С монографией О.Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» (1916) Л.Я. Куликов познакомился в юности, еще до поступления в институт. Именно тогда и возник у него интерес к алгебре.

В мае 1941 года Леонид Яковлевич защитил кандидатскую диссертацию на тему «К теории абелевых групп произвольной мощности». Эта работа сразу же получила самую высокую оценку математической общественности и принесла ее автору широкую международную известность. Окончив аспирантуру, Леонид Яковлевич в 1941 году приступил к работе преподавателем кафедры алгебры МГПИ им. В.И. Ленина.

Во время Великой отечественной войны (с 1942 по 1946 гг.) Л.Я. Куликов преподавал в должности доцента кафедры высшей математики Ивановского текстильного института.

С 1946 по 1949 гг. Леонид Яковлевич работал в должности доцента кафедры алгебры ЛГПИ им. А.И. Герцена и одновременно проходил докторантуру при Ленинградском отделении Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Его научным консультантом был выдающийся советский математик А.А. Марков.

В 1951 году Л.Я. Куликов защитил докторскую диссертацию на тему «Обобщенные примарные группы» на математико-механического факультете ЛГУ им. А.А. Жданова. Крупнейшие советские алгебраисты А.Г. Курош и А.И. Мальцев были его официальными оппонентами.

С 1950 по 1955 гг. Леонид Яковлевич работал в должности заведующего кафедрой высшей математики Ленинградского института авиационного приборостроения, а с 1955 года был переведен в Москву на должность старшего научного сотрудника математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

В МГПИ им. В.И. Ленина Л.Я. Куликов начал работать с 1962 года в должности профессора кафедры алгебры, а с 1963 по 1989 гг. заведовал этой кафедрой. В течение многих лет Л.Я. Куликов являлся председателем Совета по присуждению ученых степеней математического факультета МГПИ им. В.И. Ленина.

Леонид Яковлевич продолжал работать на кафедре алгебры в должности профессора до 1996 года, когда был вынужден оставить работу по состоянию здоровья. После тяжелой продолжительной болезни Л.Я. Куликов ушел из жизни 11 февраля 2001 года.

Л.Я. Куликов более 50 лет вел активную научную работу. Регулярно получая новые научные результаты, он не стремился к большому числу публикаций, часто лишь излагал их на научных семинарах, всесоюзных и международных конференциях. Математические работы Леонида Яковлевича отличаются исключительной глубиной, все они в настоящее время являются классическими и входят в золотой фонд алгебраической науки. Идеи и методы, разработанные в них, лежат в основе современной теории абелевых групп.

Основные публикации Л.Я. Куликова

[1] К теории абелевых групп произвольной мощности // Математический сборник. 1941. 9 (51). С. 165–182.

[2] К теории абелевых групп произвольной мощности // Математический сборник. 1945. 16 (58). С. 129–162.

[3] Обобщенные примарные группы, I // Труды Московского математического общества. 1952. 1. С. 247–326.

[4] О прямых разложениях групп // Украинский математический журнал. 1952. 4. С. 230–275; С. 347–372.

[5] Обобщенные примарные группы, II // Труды Московского математического общества. 1953. 2. С. 85–167.

[6] О прямых разложениях одной смешанной абелевой группы // Publicationes mathematicae. Debrecen (Hungaria). 1956. P. 512–516.

[7] Условия расщепляемости смешанной абелевой группы // Успехи математических наук. 1958. Т. 13, № 3(81). С. 247.

[8] Группы расширений абелевых групп // Труды IV Всесоюзного математического съезда. 1964. Т. 2. (Ленинград) С. 9–11.

[9] Универсально полные абелевы группы // Труды III Всесоюзного математического съезда. 1965. Т. 1. (Москва) С. 26–28.

[10] Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой // Ученые записки МГПИ им. В.И. Ленина. 1971. Т. 375. С. 41–55.

Subgroups which admit extensions of homomorphisms

Simion Breaz (Cluj-Napoca, Romania)

In the middle of 20-th century L. Ya. Kulikov proved that every primary abelian group G has some important pure subgroups called basic subgroups. These subgroups induce some direct decompositions which can be used to compute various invariants associated to elements of the group G (the p-height or the p-indicator associated to an element). We classify by these numerical invariants the finite subgroups H of a primary abelian group G for which every homomorphism or monomorphism of H into G, or every endomorphism of H, extends to an endomorphism of G. We apply these results to show that for finitely generated subgroups of general abelian groups, the extendibility of monomorphisms implies the extendibility of all homomorphisms. This is a joint work with Grigore Calugareanu and Phill Schultz.

Problems on structure of finite quasifields

Levchuk V.M. (Krasnoyarsk)

It is well-known that the generalization of fields with loss of commutativity gives the construction of the quaternion algebra and G. Frobenius's theorem on finite-dimensional real algebras. Weakening of associativity gives also a transfer of the theorem on alternative algebras,the construction of Cayley–Dickson algebra and the subject of *a semifield* (or quasitelo, in terms of Kurosh [1, II.6.1]). Weakening also double-sided distributivity to one-sided one we obtain *a quasifield* [2], [3].

Closely related problems of the construction and classification of different classes of finite non-Desargues translation planes and quasifields are being studied since in first of the last century; researches use computer calculations from 1950-th. It is well-known that semifield planes are isomorphic if and only if their semifields are isotopic.

Unlike the finite fields, the structure of finite *proper* (or not being a field) semifields and quasifield, even of the small orders, has been little studied [4]. See also [5] and [6].

We introduce the orders of loop elements as a generalization of orders of group elements. The set of orders of all elements of a loop is called *a spectrum.* For any finite proper quasifield S with a loop $S^* = (S \setminus \{0\}, \circ)$ we consider the following questions.

(A) *Enumerate maximal subfields and their possible orders.*

(B) *Enumerate finite quasifields where the loop* S^* *is not singly-generated.*
Hypothesis: *for any semifield* $(S, +, \circ)$ *the loop* $S^* = (S \setminus \{0\}, \circ)$ *is one-generated.*

(C) *What loop spectrums* S^* *of finite semifields and quasifields are possible?*

The work is supported by Russian Foundation for Basic research, Grant 12-01-00968.

References

[1] *Kurosh A.G.* Lectures on general algebra / M.: Nauka. 1973.

[2] *Hughes D.R., Piper F.C.* Projective planes / Springer–Verlag. 1973.

[3] *Lüneburg H.* Translation planes / Springer–Verlag. 1980.

[4] *Johnson N.L., Jha V., Biliotti M.* Handbook of finite translation planes / London, New York. 2007.

[5] *Wene G.P.* On the multiplicative structure of finite division rings // Aequationes Math. 1991. V. 41. P. 791–803.

[6] *Rúa I.F.* Primitive and non primitive finite semifields // Communications in Algebra. 2004. V. 32, No. 2. P. 793–803.

On groups of period 12

Lytkina D.V., Mazurov V.D. (Novosibirsk)

We study groups of period 12, i.e. groups G in which $x^{12} = 1$ for all $x \in G$.

Theorem 1. *Let* G *be a group of period* 12.

1. *If* G *contains a subgroup* H *isomorphic to the alternating group of degree* 4 *and every two conjugate elements of order* 3 *in* G *generate a finite subgroup, then* $O_2(H) \leq O_2(G)$. *In particular,* G *is non-simple.*

2. *If every three conjugate elements of order* 3 *in* G *generate a finite subgroup, then* G *is locally finite.*

3. *If every two elements of order* 3 *in* G *generate a finite subgroup, then* G *is locally finite.*

As a consequence of Theorem 1 and [1], [2], [3] we obtain the following

Theorem 2. *Let* G *be a group of period* 12. *Suppose that every subgroup* K *of* G *generated by a pair of elements of order* 3 *satisfies one of the following conditions*:

(a) *K does not contain elements of order* 12;
(b) *the order of the product of any two involutions in K is distinct from* 6;
(c) *the order of the product of any two involutions in K is distinct from* 4.
Then G is locally finite.

The work of the first author was supported by Russian Foundation for Basic research, Grant 13-01-00505, and the SB RAS Program of Integration Projects of Fundamental Research for the years 2012–2014, Grant 14. The work of the second author was supported by Russian Science Foundation, Project 14-21-00065.

References

[1] *Мамонтов А.С.* Группы периода 12 без элементов порядка 12 // Сиб. матем. ж. 2013. Т. 54, № 1. С. 150–156.

[2] *Лыткина Д.В., Мазуров В.Д., Мамонтов А.С.* О локальной конечности некоторых групп периода 12 // Сиб. матем. ж. 2012. Т. 53, № 6. С. 1373–1378.

[3] *Мазуров В.Д., Мамонтов А.С.* Инволюции в группах периода 12 // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 92–98.

Variants of Transitivity for Abelian Groups

Lutz H. Strüngmann (Mannheim, Germany)

In this talk we discuss recent results about weak transitivity and an old problem by A.L.S. Corner. Weak transitivity was originally invented for Abelian groups in a joint work with Brendan Goldsmith. However, the definition has a very categorical nature and can certainly be translated to groups, modules and many other algebraic structures. An Abelian group G is called *weakly transitive* if whenever there are $x, y \in G$ and endomorphisms φ, ψ of G such that $\varphi(x) = y$ and $\psi(y) = x$, then there is an automorphism α of G mapping x onto y. Obviously, the notion was inspired by Kaplansky's traditional notions of transitivity and full-transitivity for Abelian p-groups. In this talk we will first clarify the connection between the three transitivity notions and give some examples — for p-groups in the torsion case and for completely decomposable groups in the torsion-free case. We then show the existence of an Abelian p-group M such that its square $M \oplus M$ is not weakly transitive. This violates a previous conjecture that the square of any Abelian p-group has to be weakly transitive, a claim that was inspired by the fact that an Abelian p-group G is fully transitive if and only if its square $G \oplus G$ is transitive.

As a second new concept we introduce the notion of A-except (full-) transitivity for Abelian p-groups. In analogy to Kaplansky's notion of transitivity and full transitivity we call an Abelian p-group G *A-except (fully-) transitive* if A is a subgroup of G and for any pair of elements $x, y \in G \setminus A$ such that $U_G(x) = U_G(y)$ ($U_G(x) \leq U_G(y)$) there is an automorphism (endomorphism) of G mapping x to y. The main result shows that any abelian p-group G is $p^\omega G$-except transitive and $p^\omega G$-except fully transitive provided the first Ulm subgroup $p^\omega G$ is finite.

Группа $Malt$ вполне разложимой абелевой группы без кручения конечного ранга

Агафонов А.А., Себельдин А.М., (Нижний Новгород)
Н'Фамара Камара (Конакри, Гвинея)

Обозначим через $\mathbf{B_n}$ класс всех вполне разложимых абелевых групп

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$$

без кручения ранга n. Рассматриваются вопросы, когда группа

$$Malt\, A = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,\, A),\, A)$$

равна нулю, изоморфна самой группе и другие. Получены в частности такие результаты:

Предложение 1. *Любая группа $A \in \mathbf{B_n}$ содержится в качестве прямого слагаемого в группе $Malt\, A$.*

Следствие. *$Malt\, A \neq 0$ для любой ненулевой группы $A \in \mathbf{B_n}$.*

Предложение 2. *Пусть $A \in \mathbf{B_n}$. Группа $Malt\, A$ изоморфна самой группе A тогда и только тогда, когда все типы групп A_i, $i = 1, \ldots, n$ попарно несравнимы по бесконечности.*

О системах образующих диагональных полигонов

Барков И.В., Кожухов И.Б. (Москва)

Правым диагональным полигоном над полугруппой S [1] называется декартово произведение $S \times S$, на котором действие полугруппы S определено правилом $(a, b)s = (as, bs)$, где $a, b, s \in S$. Правый диагональный полигон над S обозначается $(S \times S)_S$. Аналогично определяются левый диагональный полигон и диагональный биполигон над полугруппой S. *Правым диагональным рангом* полугруппы S (обозначатеся $\operatorname{rdr} S$) называется наименьшая мощность порождающего множества полигона $(S \times S)_S$. Аналогично определяются левый диагональный ранг $\operatorname{ldr} S$ и бидиагональный ранг $\operatorname{bdr} S$. Полугруппа S называется *эпигруппой* [2], если для любого $s \in S$ найдётся натуральное n такое, что $s^n \in \operatorname{Gr} S$, где $\operatorname{Gr} S$ — групповая часть полугруппы S (т.е. объединение всех подгрупп).

Предложение 1. *Не существует бесконечной эпигруппы S такой, что* $\operatorname{bdr} S = 1$.

Следствие 2. *Не существует бесконечной периодической полугруппы S такой, что* $\operatorname{bdr} S = 1$.

Теорема 3. *Не существует бесконечной полугруппы S такой, что любая пара (a, b) различных элементов из S является порождающим элементом правого диагонального полигона $(S \times S)_S$.*

Для диагональных биполигонов это неверно.

Теорема 4. *Для любой полугруппы S существует такая надполугруппа $T \supset S$, что $T^1(x, y)T^1 = T \times T$ при любых $x, y \in T$ таких, что $x \neq y$.*

Литература

[1] *Gallagher P., Ruškuc N.* Finite generation of diagonal acts of some infinite semigroups of transformations and relations // Bull. Austral. Math. Soc. 2005. V. 72. P. 139–146.

[2] *Шеврин Л.Н.* К теории эпигрупп // Матем. сборник. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160.

Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в крашеных подгруппах групп Артина экстрабольшого типа

Безверхний В.Н., Безверхняя Н.Б. (Тула)

Группа Артина G задается системой образующих $a_1, \ldots, a_n$ и системой определяющих соотношений $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j, $i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера:

$m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geqslant 2$, $i \neq j$. Добавляя к соотношениям группы G соотношения $a_i^2 = 1$, $i = \overline{1,n}$, получим копредставление группы Кокстера, соответствующей G.

Пусть G — группа Артина с образующими $\{a_i^2 = 1,\ i = \overline{1,n}\}$. Обозначим через $N_G = \langle \{a_i^2 = 1,\ i = \overline{1,n}\} \rangle$ нормальный делитель G, факторгруппа по которому $G/N_G = \overline{G}$ есть группа Кокстера.

Нормальный делитель N_G группы G будем называть по аналогии с нормальным делителем $N_{B_{n+1}}$ группы кос крашеной подгруппой группы G.

Группа Артина G называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера конечна.

Группа Артина G называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$. Будем рассматривать группы Артина экстрабольшого типа, для которых $m_{ij} < \infty$.

Определение 1. Будем говорить, что в группе G *разрешима проблема обобщенной сопряженности слов*, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств $\{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$, $\{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, элементов из G установить, существует ли $z \in G$ такое, что $\&_{i=1}^{n} z^{-1} w_i z = v_i$.

Для групп Артина конечного типа в [2] было доказано

Теорема 1 [2]. *В группе Артина конечного типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 2 [2]. *Пусть G — группа Артина конечного типа, N_G — крашеная подгруппа группы G, тогда в N_G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Основная теорема. *Пусть G — группа Артина экстрабольшого типа, N_G — крашеная подгруппа группы G, тогда в N_G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Для доказательства основной теоремы необходимы следующие утверждения.

Теорема 3 [3,4]. *В группах Артина экстрабольшого типа разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 4 [4]. *В группах Артина экстрабольшого типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 5 [4]. *В группах Артина экстрабольшого типа централизатор любого конечного множества слов конечно порожден, и существует алгоритм, выписывающий все его образующие.*

Определение 2. Будем говорить, что в G *разрешима проблема вхождения*, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ и любого элемента $w \in G$ установить, w принадлежит H или не принадлежит.

Теорема 6. *В группах Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема вхождения.*

Лемма 1. *Пусть* $\{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$, $\{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *— конечные множества элементов группы* G *Артина экстрабольшого типа и пусть существует* $z \in G$ *такое, что* $\&_{i=1}^{n} z^{-1} w_i z = v_i$. *Тогда множество всех решений данной системы уравнений в* G *имеет вид* $FC_G(\{w_i\}, i = \overline{1,n})$, *где* F *— какое-то решение системы* $\&_{i=1}^{n} z^{-1} w_i z = v_i$, $C_G(\{w_i\}, i = \overline{1,n})$ *— централизатор множества элементов* $\{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *в группе* G.

Лемма 2. *Пусть* $C_G(\{w_i\}, i = \overline{1,n})$ *— централизатор множества элементов* $\{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *в группе* G, G *— группа Артина экстрабольшого типа. Тогда существует алгоритм, выписывающий образующие подгруппы* $C_G(\{w_i\}, i = \overline{1,n})/N_G < G/N_G = \overline{G}$.

Литература

[1] *Брискорн Э., Сайто К.* Группы Артина и группы Кокстера. Математика. 1974. Т. 18, № 6. С. 56–79.

[2] *Безверхний В.Н., Гринблат В.А.* Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 653–661.

[3] *Appel K., Schupp P.* Artin groups and infinite Coxeter gruoups // Invent. Math. 2014. V. 72. P. 210–220.

[4] *Безверхний В.Н.* Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 1–39.

[5] *Безверхний В.Н., Гринблат В.А.* Решение проблемы сопряженности слов в крашеных подгруппах группп Артина с древесной структурой // Материалы XII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. С. 52–54.

О подгруппах в группах Артина с древесной структурой

Безверхний В.Н., Добрынина И.В. (Тула)

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \left\langle a_1, ..., a_n \mid \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}},\ i,j = \overline{1,n},\ i \neq j \right\rangle,$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geqslant 2,\ i \neq j$. Поставим в соответствие группе G конечный граф Γ такой, что вершинам всякого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j, а самому ребру e соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j$. Если данный граф является дерево-графом, то получаем группу Артина с древесной структурой [1].

Группу Артина G с древесной структурой можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих

$$G_{ij} = \left\langle a_i, a_j \mid \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j \right\rangle,$$

а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$.

Группы Артина с древесной структурой были введены В.Н. Безверхним, алгоритмические проблемы в них рассматривались В.Н. Безверхним и О.Ю. Платоновой (Карповой) (см. [1]).

Рассмотрим двупорожденные группы Артина G_{ij}. Пусть $m_{ij} = 2$, тогда G_{ij} абелева. Если $m_{ij} \geqslant 3$, то получаем группы Артина G_{ij} большого типа, изученные В.Н. Безверхним в работе [2]. Показано:

при $m_{ij} = 2k+1$ $\quad G_{ij} \simeq \langle x, y; x^{2k+1} = y^2 \rangle$,
при $m_{ij} = 2k$ $\quad G_{ij} \simeq \langle t, x; tx^k t^{-1} = x^k \rangle$.

В работе [3] авторами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $H \cap gG_{ij}g^{-1} = E$, тогда H является свободной.*

В данной работе рассмотрены алгоритмические свойства групп Артина с древесной структурой.

Теорема 2. *Существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы H и произвольного образующего $a_i, i = \overline{1,n}$, группы Артина G с древесной структурой найти пересечение H с циклической подгруппой $\langle a_i \rangle$. Существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G$, произвольного образующего $a_i, i = \overline{1,n}$, и любой конечно порожденной подгруппы H из группы Артина G с древесной структурой найти пересечение vH с циклической подгруппой $\langle a_i \rangle$.*

Следующая теорема является уточнением теоремы 3 из [4] ([5]).

Теорема 3. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i \rangle$, $i = \overline{1,n}$, есть единичная подгруппа E. Тогда можно эффективно выделить свободную часть подгруппы H, то есть существует алгоритм, выписывающий образующие свободной подгруппы в H.*

Литература

[1] *Безверхний В.Н., Карпова О.Ю.* Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 67–82.

[2] *Безверхний В.Н.* Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 5, № 1. С. 1–39.

[3] *Безверхний В.Н., Добрынина И.В.* О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, № 1. С. 32–42.

[4] *Добрынина И.В.* О свободных подгруппах в группах Кокстера и Артина с древесной структурой // Материалы XII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула, 2014. С. 72–73.

[5] *Dobrynina I.V.* On free subgroups in Coxeter and Artin groups with tree-structure // Proceedings XII International Conference Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application, dedicated to 80-th anniversary of Professor V.N. Latyshev. Tula, 2014. P. 46–48.

О прямых разложениях и кольцах эндоморфизмов абелевых групп без кручения

Благовещенская Е.А. (Санкт-Петербург)

Развитие теории почти вполне разложимых групп, которые по определению являются абелевыми группами без кручения конечного ранга, естественным образом привело к определению новых классов групп и вывело рассуждения за рамки групп конечного ранга. Для класса $\mathcal{C}^0$ так называемых *почти жестких* (almost rigid) групп X, содержащих вполне разложимые группы A счетного ранга в качестве вполне характеристических подгрупп с конечными циклическими примарными компонентами факторгрупп X/A, была построена комбинаторная теория прямых разложений [1]. Она базируется на расширении понятия почти изоморфизма на группы бесконечного ранга [1,2]:

Определение 1. Пусть X и Y — абелевы группы без кручения. Тогда X и Y называются *почти изоморфными*, $X \cong_{nr} Y$, если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon X \to Y$ и $\Psi_p\colon Y \to X$, такие что

1. группы $Y/X\Phi_p$ и $X/Y\Psi_p$ являются периодическими;
2. $(Y/X\Phi_p)_p = 0 = (X/Y\Psi_p)_p$;
3. для любых сервантных подгрупп конечного ранга $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$ факторгруппы $(X'\Phi_p)_*^Y/X'\Phi_p$ и $(Y'\Psi_p)_*^X/Y'\Psi_p$ являются конечными.

Далее, рассмотрение определенных эпиморфных образов почти жестких групп позволило обобщить полученные результаты и сформулировать их для $\mathfrak{B}^{(1)}$alr-групп счетного ранга, построенных в [3] и содержащих бесконечные прямые суммы сильно неразложимых групп Батлера специального вида в качестве вполне характеристических подгрупп с перечисленными ограничениями на соответствующие факторгруппы:

Определение 2. Пусть группа X из класса $\mathcal{C}^0$ и некоторый набор целых чисел $(\alpha_\tau :\ \tau \in T_{cr}(R(X)))$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $R(X) = \bigoplus_{i\in\omega} A_i^{l_i}$ $(l_i \in N)$, где $T_{cr}(R(X)) = \bigcup_{i\in\omega} T_i$ — объединение попарно дизъюнктных множеств $T_{cr}(A_i) = T_i$ и $rkA_i = |T_i| \neq 2$ для любых $i \in \omega$;

(2) для любых $i \in \omega$ и $\tau \in T_i$ существует простое число p, такое что $\tau(p) = \infty$ и $\sigma(p) \neq \infty$, если $\sigma \neq \tau$, $\sigma \in T_i$;

(3) если $i \in \omega$ и $|T_i| \neq 1$, то $\bigcap_{\tau\neq\sigma,\tau\in T_i} \tau = \mathbb{Z}$ для любых $\sigma \in T_i$;

(4) если $i \in \omega$ и $|T_i| \neq 1$, то все α_τ $(\tau \in T_i)$ не делятся на p при условии $\sigma(p) = \infty$ для некоторого $\sigma \in T_i$; если $|T_i| = 1$, то $\alpha_\tau = 0$, где $T_i = \{\tau\}$;

(5) если $i \in \omega$ и $|T_i| \neq 1$, то $gcd(\{\alpha_\tau | \, \tau \neq \sigma, \tau \in T_i\}) = 1$ для всех $\sigma \in T_i$;

(6) $|[T_p^X] \cap T_i| \leqslant 1$ для любых $p \in P_X$ и $i \in \lambda$;

(7) если $i \in \lambda$ и $|[T_p^X] \cap T_i| = 1$ для некоторого $p \in P_X$, то $gcd(p, \alpha_\tau) = 1$ для всех $\tau \in T_i$;

(8) если $i \in \lambda$ и $|[T_p^X] \cap T_i| = 1$, то $\tau(p) \neq \infty$ для всех $\tau \in T_i$.

Пусть $K = \bigoplus_{i\in\omega} K^{l_i}(A_i)$ — подгруппа в X, определенная с помощью равенства $K(A_i) = \langle \sum_{\tau\in T_i} \alpha_\tau a_\tau \rangle \subset A_i = \bigoplus_{\tau\in T_i} \tau a_\tau$. Будем называть $B = X/K$ *правильной* $\mathfrak{B}^{(1)}$*alr-группой*. Кольца эндоморфизмов этих групп изоморфны некоторым подкольцам колец целочисленных матриц. Для них справедлива

Теорема. *Если* $\mathfrak{B}^{(1)}$*alr-группы* X *и* Y *почти изоморфны, то их кольца эндоморфизмов изоморфны.*

Комбинаторная теория неизоморфных прямых разложений $\mathfrak{B}^{(1)}$alr-групп приводит к анализу колец целочисленных матриц определенного вида и к возможности установления изоморфизма между ними комбинаторными методами на основе этой теоремы. Отметим, что в отличие от класса почти жестких групп кольцевого типа, которые определяются своими кольцами эндоморфизмов с точностью до почти изоморфизма, для $\mathfrak{B}^{(1)}$alr-групп не существует аналога этого результата ввиду представления их эндоморфизмов целочисленными матрицами, скрывающими структуру их *регулятора* $R(X)/K$.

Литература

[1] *Blagoveshchenskaya E., Göbel R.* Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank // Comm. in Algebra. 2002. V. 30, No. 7. P. 3403–3427.

[2] *Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L.* Near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free abelian groups // Comm. in Algebra. 2007. No. 35. P. 1–18.

[3] *Blagoveshchenskaya E., Göbel R., Strüngmann L.* Classification of some Butler groups of infinite rank // Journal of Algebra. 2013. V. 380. P. 1–17.

Конечные группы с холловыми подгруппами Шмидта

Ведерников В.А., Бажанова (Демина) Е.Н. (Москва)

Рассматриваются лишь конечные группы. Применяем следующие обозначения и определения: Z_n — цикличечкая группа порядка n; G_p — силовская p-подгруппа группы G; $F(G)$ и $\Phi(G)$ — соответственно подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G; $Soc(G)$ — цоколь группы G; $Z(G)$ — центр группы G; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G; $\pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа n. Последний член верхнего центрального ряда группы G называется *гиперцентром* группы G и обозначается через $H(G)$. Подгруппа H группы G называется *холловой* в G, если $(|H|, |G : H|) = 1$. Группа называется *разложимой*, если она представима в виде прямого произведения своих собственных подгрупп.

Определение 1. Неразложимую группу G назовем $F_{\langle n,d\rangle}$*-группой*, если $G = [M]H$, $M = Soc(G) = M_{p_1} \times M_{p_2} \times \cdots \times M_{p_s}$ является холловой подгруппой группы G порядка n, H — циклическая подгруппа в G порядка d, $M_{p_i}H_q$ либо нильпотентна, либо $Z_q \le H_q$ и $M_{p_i}Z_q$ является группой Шмидта для любого $i = 1, 2, \dots, s$ и любого $q \in \pi(d)$.

О.Ю. Шмидт в [1] исследовал строение ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Такие группы впоследствии стали называть группами Шмидта. В работе [1] установлено, что группа Шмидта G бипримарна, то есть $\pi(G) = \{p, q\}$, силовская p-подгруппа G_p нормальна в G, $G_q = \langle x\rangle$ — циклическая группа, $\langle x^q\rangle = O_q(G) \le Z(G)$, $|G_p/\Phi(G_p)| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q и $G_p/\Phi(G_p)$ является главным фактором группы G. Группы Шмидта нашли многочисленные применения в теории групп (см., например, [2–6]).

В работе [6] изучены свойства ненильпотентной группы G, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова. В частности, в работе [6] доказано, что G содержит нормальную нильпотентную холлову подгруппу H и фактор-группа G/H является циклической группой. В теореме 1 получено полное описание строения таких групп.

Приведем полученные результаты.

Теорема 1. *В ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда группа $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_t \times N$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \dots A_t, N$ — нормальные холловы подгруппы группы G, $1 \le N \le F(G)$, $Z(A_i) = \Phi(A_i)$ и $A_i/Z(A_i)$ является $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группой, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \dots, t$.*

Теорема 2. *Если в группе G каждая ненормальная подгруппа Шмидта холлова, то группа G дисперсивна.*

Литература

[1] *Шмидт О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.

[2] *Чунихин С.А.* Подгруппы конечных групп / Минск: Наука и техника, 1964.

[3] *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп / М.: Наука, 1978.

[4] *Монахов В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / Тр. Укр. мат. конгресса. 2001. Киев, 2002. Секция 1. С. 81–90.

[5] *Ведерников В.А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46. С. 669–687.

[6] *Kniahina V.N., Monakhov V.S.* Finite groups with hall Schmidt subgroups // Publ. Math. Debrecen. 2012. 81/3–4. P. 341–350.

Конечные группы с неинвариантными ненильпотентными максимальными подгруппами

Ведерников В.А., Чиж А.Н. (Москва)

Рассматриваются лишь конечные группы. Группы (подгруппы) называются *изоордными*, если их порядки равны. Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое множество всех ненормальных ненильпотентных максимальных подгрупп группы G. Применяем следующие обозначения: $\Delta_1(G)$ — пересечение всех подгрупп группы G, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}$; G_p — силовская p-подгруппа группы G; $O(G)$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G нечетного порядка; $O^2(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой является 2-группой. Бинарным отношением изоордности множество $\mathfrak{M}$ разбивается на непересекающиеся классы, которые называются классами изоордных ненормальных ненильпотентных максимальных подгрупп группы G. Неприведенные обозначения и определения можно найти в монографии [1].

В работе [2] С.В. Путилов установил разрешимость группы, содержащей точно один класс изоордных ненормальных ненильпотентных максимальных подгрупп. В этом случае индекс каждой ненормальной ненильпотентной максимальной подгруппы в группе G делится на некоторое простое число p. Однако этому условию уже удовлетворяют некоторые неабелевы простые группы. В теореме 1 получено полное описание всех неразрешимых групп с этим свойством.

Теорема 1. *В неразрешимой группе G индекс каждой ненормальной ненильпотентной максимальной подгруппы делится на простое число p в том и только том случае, когда $p = 2$, $O(G)G_2$ нильпотентна, $O(G) \leq \Delta_1(G)$ и $T/F(G) = O^2(G/F(G))$ является минимальной нормальной подгруппой группы $G/F(G)$, изоморфной прямому произведению групп $PSL(2,q)$, $q = 2^n \pm 1 > 5$, кроме того при $q = 7$ или $q = 9$ имеем $T/F(G) < G/F(G)$ и нормализаторы в $G/F(G)$ прямых факторов из $T/F(G)$ индуцируют на них нееденичные внешние автоморфизмы.*

Следствие ([2, теорема 1], [3]). *Если группа G содержит не более одного класса изоордных ненормальных ненильпотентных максимальных подгрупп, то группа G разрешима.*

Замечание 1. В силу теоремы 8.11 [1] в неразрешимой группе G существуют ненормальные ненильпотентные максимальные подгруппы, а их пересечение $\Delta_1(G)$ является нильпотентной характеристической подгруппой группы G.

Теорема 2. *Неразрешимая группа G имеет точно два класса изоордных ненормальных ненильпотентных максимальных подгрупп тогда и только тогда, когда факторгруппа $G/\Delta_1(G)$ изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $PSL(2,\, 7)$; (2) $PGL(2,\, 7)$.

Замечание 2. Теорема 2 доказана с применением классификации конечных простых групп. В работе [4] В.А. Белоноговым получено полное описание групп, которые имеют точно три класса сопряженных максимальных подгрупп. Отметим, что группа $PGL(2,\, 7)$ содержит четыре класса сопряженных максимальных подгрупп.

Литература

[1] *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп / М.: Наука, 1978.

[2] *Путилов С.В.* Разрешимость конечных групп с заданными абнормальными максимальными подгруппами // Матем. заметки. 1984. Т. 35. С. 3–8.

[3] *Беркович Я.Г.* О разрешимых группах конечного порядка // Матем. сб. 1967. Т. 74. С. 75–92.

[4] *Белоногов В.А.* Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп // Матем. сб. 1986. Т. 131. С. 226–239.

Сильно неразложимые p-локальные группы без кручения с кубическим полем расщепления

Вершина С.В. (Москва)

Рассматривается категория $\mathcal{L}_p(K)$ квазигомоморфизмов p-локальных групп без кручения с полем расщепления $K \subset \widehat{\mathbb{Q}}_p$ таким, что $[K : \mathbb{Q}] = 3$, где $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ — поле p-адических чисел. Кольцо $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$ называется кольцом расщепления для группы A из категории $\mathcal{L}_p(K)$ [1], если $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ является прямой суммой свободного и делимого R-модулей, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Через * обозначим функтор двойственности Арнольда.

Теорема 1. *Неразложимые объекты категории $\mathcal{L}_p(K)$, где K — кубическое расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, изоморфны следующим группам и только им:*

1) $\mathbb{Z}_p$ *— локализации кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p;*

2) $\mathbb{Q}$ *— аддитивной группе рациональных чисел;*

3) R *— аддитивной группе кольца расщепления;*

4) $P = R^*$ *— группе двойственной по Арнольду группе R;*

5) $P/\mathbb{Z}_p^*$ *— факторгруппе группы $P = R^*$ по двойственной подгруппе $\mathbb{Z}_p^*$.*

Заметим, что в случаях 1), 2), 3) и 5) изоморфизм в категории $\mathcal{L}_p(K)$ является изоморфизмом абелевых групп, а в случае 4) изоморфизм в категории $\mathcal{L}_p(K)$ является квазиизоморфизмом абелевых групп. Неразложимые объекты категории $\mathcal{L}_p(K)$, где K — квадратичное расширение $\mathbb{Q}$, изучались в [1] и [2].

Следствие 2. *Всякая группа A конечного p-ранга $r_p(A)$ категории $\mathcal{L}_p(K)$, где K — кубическое расширение $\mathbb{Q}$, является разложимой в прямую сумму подгрупп, если ранг $r(A) > 3r_p(A)$.*

Следствие 3. *Для групп A и B из категории $\mathcal{L}_p(K)$ изоморфизм их колец эндоморфизмов влечет изоморфизм групп A и B в том и только том случае, если они не имеют прямых слагаемых изоморфных группе двойственной по Арнольду аддитивной группе кольца расщепления R.*

Литература

[1] *Lady E.L.* Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, I // Journal of Algebra. 1977. V.49(1). P. 261–275.

[2] *Вершина С.В.* К теореме Бэра–Капланского для квадратично-разложимых групп без кручения // Чебышевский сб. 2014. Т. 15:1. С. 77–88.

О многообразиях мультипликативно идемпотентных полуколец

Вечтомов Е.М., Петров А.А. (Киров)

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Если в полукольце S существует элемент 0, такой, что $x + 0 = x$ и $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ для всех $x \in S$, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Наконец, если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Полукольцо с тождеством $xx = x$ ($x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, называется *идемпотентным*. Полукольцо с тождеством $x+y = xy$ называется *моно-полукольцом*. Будем говорить, что полукольцо S обладает *константным сложением*, если существует элемент $t \in S$, такой, что $x+y = t$ для всех $x, y \in S$ (равносильно, S удовлетворяет тождеству $x + y = u + v$.)

Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие всех мультипликативно идемпотентных полуколец. Для полуколец $S_1, \ldots, S_n$ через $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ будем обозначать многообразие полуколец, порожденное этими полукольцами. Это означает, что многообразие $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ задается множеством всевозможных тождеств, выполняемых на каждом из полуколец $S_1, \ldots, S_n$. Для многообразия $\mathfrak{V}$ через $L(\mathfrak{V})$ обозначим решетку всех его подмногообразий.

С точностью до изоморфизма существует ровно шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец: двухэлементная цепь $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, двухэлементное поле $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, двухэлементное идемпотентное моно-полукольцо $\mathbb{D} = \{1, \infty\}$ с единицей 1, двухэлементное полукольцо $\mathbb{T} = \{1, \infty\}$ с единицей 1 и константным сложением, двухэлементное полукольцо $\mathbb{L}$ с тождеством $xy = x$, двухэлементное полукольцо $\mathbb{R}$ с тождеством $xy = y$.

Обозначим $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{R})$.

В силу [1, теорема 1.1] получаем

Предложение 1. *Решетка* $L(\mathfrak{M})$ *атомна и имеет ровно* 6 *атомов:* $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$,$\mathfrak{M}(T)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{L})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$.

Предложение 2. *Решетка* $L(\mathfrak{M})$ 0*-дистрибутивна, то есть для любых многообразий* $A, B, C \in L(\mathfrak{M})$ *выполняется условие:*

$$A \cap C = 0 = B \cap C \Rightarrow (A \vee B) \cap C = 0.$$

Из предложений 1, 2 и работы [2] выводится

Предложение 3. *Решетка* $L(\mathfrak{N})$ *является* 64*-элементной булевой решеткой.*

Замечание. В статье [3] изучено многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})$. Показано, что решетка его подмногообразий является 16-элементной булевой решеткой, что вытекает также из предложения 3. Кроме того, установлено, что в классе полуколец с коммутативным идемпотентным умножением многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})$ задается одним тождеством

$$x + 2xy + yz = x + 2xz + yz.$$

Вопрос. Определяется ли многообразие $\mathfrak{N}$ в классе $\mathfrak{M}$ следующим тождеством

$$x + 2xyx + yz = x + 2xzx + yz?$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект №1.1375.2014/К.

Литература

[1] *Полин С.В.* Минимальные многообразия полуколец // Матем. заметки. 1980. Т. 27, № 4. С. 527–537.

[2] *Верников Б.М., Волков М.В.* Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий // Изв. вузов. Мат. 1982. № 11. С. 17–20.

[3] *Вечтомов Е.М., Петров А.А.* Мультипликативно идемпотентные полукольца // Фунд. и прикл. матем. 2013. Т. 18, № 4. С. 41–70.

Определяемость факторно делимой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов

Вильданов В.К. (Нижний Новгород)

Рассматривается вопрос определяемости абелевой группы своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1.

Определение. Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Известно, что p-группы ($p \geqslant 3$) определяются своей группой автоморфизмов в классе p-групп (см. [1]). Группы без кручения ранга 1 не определяются своими группами автоморфизмов, однако для прямых сумм групп ранга 1 найдены необходимые и достаточные условия определяемости группы своей группой автоморфизмов в некоторых классах [2, 3]. В работе [2] вопрос определяемости группы своей группой автоморфизмов рассматривается, в том числе и в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения, прямые слагаемые ранга 1 которых имеют идемпотентные типы. В частности показано, что группа A без кручения ранга 1 идемпотентного типа определяется своей группой автоморфизмов в классе всех таких групп тогда и только тогда, когда $A \cong Z$. Заметим, что класс групп без кручения ранга 1 идемпотентного типа совпадает с классом факторно делимых групп без кручения ранга 1. Подробнее о факторно делимых группах можно узнать в работах [4, 5]. Следующие примеры показывают, что существуют группы не изоморфные Z, которые определяются своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1.

Пример 1. Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 и имеет следующую кохарактеристику:

$$cochar(A) = (3,\, 1,\, \infty,\, \ldots,\, \infty,\, \ldots).$$

Тогда группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1.

Пример 2. Факторно делимая группа A ранга 1, заданная кохарактеристикой $cochar(A) = (\infty,\, \infty,\, 1,\, \infty,\, \ldots,\, \infty,\, \ldots)$, определяется своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1.

Пусть G, H — циклические группы и $|G| = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$, $|H| = p_1^{k_1} \ldots p_t^{k_t}$. Будем говорить, что циклическая группа G *слабо определяется своей группой автоморфизмов* в классе циклических групп, если из $Aut(G) \cong Aut(H)$, всякий раз следует, что $s \leqslant t$, причем равенство достигается только в случае $H \cong G$.

Пусть P — множество всех простых чисел, C — абелева группа без кручения ранга 1. Обозначим $P_\infty(C)$ множество простых чисел $p \in P$ для которых $pC = C$.

Теорема. *Пусть A — расщепляющаяся факторно делимая группа ранга 1. Тогда A определяется своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1, если и только если $A = A' \oplus t(A)$, где A' — факторно делимая группа без кручения ранга 1, $t(A)$ — конечная циклическая группа порядка $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, слабо определяющаяся своей группой автоморфизмов в классе циклических групп и $|P_\infty(A')| = s$.*

Литература

[1] *Liebert W.* Isomorphic automorphism groups of primary Abelian groups. II // Contemp. Math. 1989. Vol. 87. P. 51–59.

[2] *Вильданов В.К.* Определяемость вполне разложимой абелевой группы ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174–177.

[3] *Вильданов В.К.* Определяемость вполне разложимой блочно жёсткой абелевой группы без кручения её группой автоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, № 8. С. 13–19.

[4] *Фомин А.А.* К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, № 8. С. 153–167.

[5] *Давыдова О.И.* Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13, № 3. С. 25–33.

Подобные абелевы p-группы

Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э. (Томск)

В ряде классов абелевых групп удобно ввести понятие подобия групп. Такое понятие целесообразно вводить в тех классах групп, для которых имеется некоторая естественная система инвариантов (в общем случае не являющаяся полной). Задача о подобии почти изоморфных абелевых групп представляет самостоятельный интерес и позволяет решить задачу об изоморфизме почти изоморфных групп в тех подклассах исследуемых классов, где рассматриваемая система инвариантов является полной.

Известна важная роль инвариантов Ульма–Капланского в теории абелевых p-групп. В ряде классов абелевых p-групп они образуют полную и независимую систему инвариантов.

Абелевы p-группы A и B называются *подобными*, если для всякого целого неотрицательного числа n их инварианты Ульма–Капланского $f_A(n)$

и $f_B(n)$ равны. Понятно, что если две абелевы p-группы изоморфны, то они подобны. Обратное не всегда верно, однако существуют широкие классы абелевых p-групп, в которых подобие влечет изоморфизм. Одним из таких классов является класс периодически полных (замкнутых) групп, изучавшийся Л.Я. Куликовым [1].

Некоторые результаты о подобии абелевых p-групп изложены в [2] и [3].

При исследовании абелевых p-групп большое значение имеют широкие подгруппы, которые определяются следующим образом: подгруппа L абелевой p-группы A называется *широкой подгруппой*, если L — вполне характеристическая подгруппа группы A и $L + B = A$ для любой базисной подгруппы B группы A [4, с. 18].

Абелевы p-группы называются *почти подобными по широким подгруппам*, если каждая из них подобна широкой подгруппе другой группы.

Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ кардинальных чисел называется *сильно зависимой*, если существует возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$, отличная от последовательности всех целых неотрицательных чисел, расположенных в естественном порядке, такая что при $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ выполняются равенства: $a_k = \sum\limits_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} a_i$, причем, если $i_0 = 0$ и m — наименьшее натуральное число, не являющееся членом последовательности $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$, то при выполнении условия $a_m \geqslant \aleph_0$ в последовательности $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ должна существовать хотя бы одна пара не равных между собой чисел [5].

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих это определение.

1) последовательность кардинальных чисел

$$k,\ 0,\ 0,\ k',\ k'',\ 0, 0,\ k',\ k'',\ 0,\ 0,\ \ldots,$$

где $k = k' + k''$, является сильно зависимой;

2) всякая возрастающая последовательность кардинальных чисел не является сильно зависимой;

3) последовательность $\gamma, 2^\gamma, \gamma, \lambda, \gamma, \lambda, \ldots$, где γ и λ — бесконечные кардинальные числа, причем $\gamma > \lambda$, является сильно зависимой.

Получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G — абелева p-группа. Всякая абелева p-группа H, почти подобная группе G по широким подгруппам, подобна группе G тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет одному из трех условий:*

1) *редуцированная часть группы G ограничена;*

2) *существует такое бесконечное кардинальное число α, что $f_G(i) = \alpha$ для всякого целого неотрицательного числа i;*

3) *последовательность $f_G(0), f_G(1), \ldots, f_G(n), \ldots$ не является сильно зависимой.*

С помощью теоремы 1 устанавливаются такие результаты.

Следствие 2. *Пусть G — редуцированная сепарабельная p-группа. Всякая абелева группа H, почти изоморфная группе G по вполне характеристическим подгруппам, подобна группе G тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:*

1) *G — ограниченная группа;*

2) *существует такое бесконечное кардинальное число α, что $f_G(i) = \alpha$ для всякого целого неотрицательного числа i;*

3) *последовательность $f_G(0), f_G(1), \ldots, f_G(n), \ldots$ не является сильно зависимой.*

Следствие 3. *Пусть G — периодически полная p-группа или группа, разложимая в прямую сумму циклических p-групп. Всякая абелева группа H, почти изоморфная группе G по вполне характеристическим подгруппам, изоморфна группе G тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из трех условий* 1), 2), 3) *следствия* 2.

Литература

[1] *Куликов Л.Я.* К теории абелевых p-групп произвольной мощности // Матем. сб. 1945. № 9. С. 165–182.

[2] *Гриншпон И.Э., Гриншпон С.Я.* Подобные сепарабельные p-группы и почти изоморфизм // Междунар. конф. по математике и механике. Тезисы докладов. Томск. 2003. С. 39.

[3] *Гриншпон И.Э.* Подобие абелевых p-групп // Междунар. конф. по математике и механике. Избранные доклады. Томск. 2003. С. 13–18.

[4] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Т. 2. М.: Мир, 1977.

[5] *Гриншпон С.Я.* f.i.-корректные абелевы группы // Успехи матем. наук. 1999. № 6. С. 155–156.

Об аддитивных группах универсальных лиевски нильпотентных ассоциативных колец

Дерябина Г.С. (Москва), **Красильников А.Н.** (Бразилиа, Бразилия)

Пусть A — свободная ассоциативная алгебра над K. Положим $L_1 = A$, $L_{n+1} = [L_n, A]$ для $n > 0$. Тогда $L_1 > L_2 > L_3 > \ldots$ — нижний центральный ряд алгебры A, рассматриваемой как алгебра Ли.

Первые значительные результаты о факторах L_n/L_{n+1} при $K = \mathbb{C}$ были получены в [3]. Для $K = \mathbb{Z}$ факторы L_n/L_{n+1} и связанные с ними факторы M_n/M_{n+1}, где $M_n = AL_nA = AL_n$, впервые изучались в [1]. Отметим, что A/M_{n+1} является универсальным лиевски нильпотентным ассоциативным кольцом класса n.

В [1] было показано, что аддитивная группа факторкольца A/M_3 свободная абелева. В [2,4] доказывается, что для A/M_4 это не так.

Теорема ([2,4]). *При $K = \mathbb{Z}$ аддитивная группа факторкольца A/M_4 является прямой суммой $B \oplus C$ свободной абелевой группы B и элементарной абелевой 3-группы C.*

Более точно, пусть I — двусторонний идеал в A, порожденный L_4 и всеми элементами $[a_1, a_2]\big[[a_3, a_4], a_5\big]$ $(a_i \in A)$. Тогда $C = I/M_4$, а группа B изоморфна аддитивной группе факторкольца A/I.

Следствие. *Пусть $x_1, \ldots, x_5$ — различные свободные порождающие кольца A. Тогда $\big[x_1\big[[x_2, x_3], x_4\big], x_5\big] + L_4$ — элемент порядка 3 в L_3/L_4.*

Литература

[1] *Bhupatiraju S., Etingof P., Jordan D., Kuszmaul W. and Li J.* Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields // J. Algebra. 2012. V. 372. P. 251–274.

[2] *Deryabina G., Krasilnikov A.* The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3 // arXiv: `math.RA/1308.4172` (2013).

[3] *Feigin B., Shoikhet B.* On $[A, A]/[A, [A, A]]$ and on a W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras // Math. Research Lett. 2007. V. 14. P. 781–795.

[4] *Krasilnikov A.* The additive group of a Lie nilpotent associative ring // J. Algebra. 2013. V. 392. P. 10–22.

Решетка вполне характеристичестических подгрупп копериодической группы

Кемоклидзе Т.Г. (Кутаиси, Грузия)

Редуцированная копериодическая группа A представляется в виде $A = T^{\bullet} \oplus C$, где $T^{\bullet} = \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ копериодическая оболочка группы T — периодической части группы A, а C — алгебраически компактная группа без кручения. Изучение решетки вполне характеристических подгрупп группы $T^{\bullet}$ актуально так как эндоморфизмы группы $T^{\bullet}$ однозначно определяются эндоморфизмами группы T и известно что в смешанной группе A кольцо эндоморфизмов $E(A)$ изоморфно кольцу эндоморфизмов периодической части $E(tA)$ тогда и только тогда когда A вполне характеристичестическая подгруппа копериодической оболочки $(tA)^{\bullet}$.

Л.Я. Куликов ввел понятие периодически полной группы T. Её копериодическая оболочка $T^{\bullet}$ алгебраически компактная группа. В работе [1] А. Мадер доказал что $T^{\bullet}$ вполне транзитивно и с помощью индикаторов описал решетку вполне характеристичестических подгрупп группы $T^{\bullet}$. Если T прямая сумма циклических p-групп то как показала А.И. Москаленко (см. [2]) $T^{\bullet}$ опять вполне транзитивно и решетка фильтров индикаторов описывает решетку вполне характеристичестических подгрупп группы $T^{\bullet}$. Автором в статье [3] было показано что если T бесконечная прямая сумма периодически полных p-групп то копериодическая оболочка $T^{\bullet}$ не вполне транзитивно и полурешетку индикаторов нельзя применить для описания решетки вполне характеристичестических подгрупп группы. С этой целью вводится новая полурешетка Ω состоящая из матриц с помощью которой описывается решетка вполне характеристичестических подгрупп группы $T^{\bullet}$ (см. [4]). Рассматривается также вопрос о вполне характеристичестических подгруппах редуцированной копериодической группы.

Литература

[1] *Mader A.* The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups // Publ. Math. Debrecen. 1970. V. 17. P. 299–306.

[2] *Москаленко А.И.* О копериодической оболочке сепарабельной p-группы // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 2. С. 207–226; translation in Algebra and Logic. 1990. V. 28, No.2. P. 139–151.

[3] *Kemoklidze T.* On the full transitivity of a cotorsion hull // Georgian Math. J. 2006. V. 13. P. 79–84.

[4] *Kemoklidze T.* The lattice of fully invariant subgroups of the cotorsion hull // Adv. Pure Math. 2013. V. 3. P. 670–697.

О разрешимости конечной группы с заданными индексами 2-максимальных подгрупп

Княгина В.Н., Монахов В.С. (Гомель, Беларусь)

Рассматриваются только конечные группы. Через $\mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются множества всех простых чисел и натуральных чисел. Для фиксированного $t \in \mathbb{N}$ пусть $\mathbb{P}^t = \{p^i \mid \forall p \in \mathbb{P},\ \forall i \leqslant t,\ i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Напомним, что примарным называют натуральное число, которое является натуральной степенью некоторого простого числа. Единицу также удобно считать примарным числом. Множество всех примарных чисел обозначается $\mathbb{P}^\infty$. Условимся, что $\mathbb{T}$ — некоторое подмножество множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, удовлетворяющее требованию: если $t \in \mathbb{T}$, то $\mathbb{T}$ содержит все натуральные делители числа t.

Введем следующее определение. Подгруппа H называется $\mathbb{T}$-*субнормальной подгруппой* группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G \qquad (1)$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{T}$ для всех i.

Если $\mathbb{T}$ совпадает с $\mathbb{P}$, получаем понятие $\mathbb{P}$-субнормальности, впервые введенное в [1]. В работах [1–5] изучались группы с $\mathbb{P}$-субнормальными примарными подгруппами. В [6] без использования классификации конечных простых групп, установлена разрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что A и B разрешимы и $\mathbb{P}^2$-субнормальны в G.

Понятно, что максимальная подгруппа M $\mathbb{T}$-субнормальна в группе G в точности тогда, когда $|G : M| \in \mathbb{T}$. Если U — не максимальная $\mathbb{T}$-субнормальная подгруппа группы G и $U \leq V \leq G$, то подгруппа V может быть не $\mathbb{T}$-субнормальной. Например, в знакопеременной группе A_4 степени 4 единичная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, а подгруппа порядка 3 не $\mathbb{P}$-субнормальна, но $\mathbb{P}^2$-субнормальна.

По теореме Хупперта группа с $\mathbb{P}$-субнормальными максимальными подгруппами сверхразрешима. Пусть K — подгруппа группы G. Если существует максимальная в G подгруппа M такая, что K является максимальной подгруппой в M, то K называется 2-максимальной подгруппой группы G. Группа, у которой все 2-максимальные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, может быть несверхразрешимой. Такие группы изучены в [2], [4], где, в частности, доказано следующее утверждение.

В группе G тогда и только тогда любая 2-максимальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, когда $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = 1$ и каждая собственная в G подгруппа сверхразрешима.

Здесь $G^{\mathfrak{U}}$ — наименьшая нормальная в G подгруппа, факторгруппа по которой сверхразрешима, а $\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — ее подгруппа Фраттини.

Естественным развитием этой тематики будет изучение групп с $\mathbb{P}^{\infty}$-субнормальными 2-максимальными подгруппами. Используя теорему [7], доказательство которой основывается на классификации конечных простых групп, мы получили следующий результат.

Теорема. *Пусть в группе G все 2-максимальные подгруппы $\mathbb{T}$-субнормальны. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathbb{T} = \mathbb{P}^{\infty}$ и $\pi = \mathbb{P} \setminus \{2, 3, 7\}$, то G π-разрешима;*

2) *если $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{P}^{\infty}$ и $|\mathbb{T} \cap \{7, 8\}| < 2$, то G разрешима.*

Следствие. *Если в группе G каждая 2-максимальная подгруппа $\mathbb{P}^2$-субнормальна, то G разрешима.*

Литература

[1] *Васильев А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. матем. журнал. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

[2] *Kniahina V.N., Monakhov V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal 2-maximal subgroups // ArXiv. org e-Print archive, arXiv:1105.3663, 18 May 2011.

[3] *Kniahina V.N., Monakhov V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal primary cyclic subgroups // ArXiv. org e-Print archive, arXiv:1110.4720V2, 18 Nov 2011.

[4] *Monakhov V.S., Kniahina V.N.* Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche di Matematica. 2013. V. 62, No. 2. P. 307–323.

[5] *Murashka V.I.* One formation of finite groups // ArXiv. org e-Print archive, arXiv:1312.0213V1, 2 Dec 2013.

[6] *Княгина В.Н., Монахов В.С.* Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 77–85.

[7] *Guralnick R.M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81. P. 304–311.

Абелевы afi-группы

Компанцева Е.И. (Москва)

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Кольцом на группе G называется любое кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G. Под абсолютным идеалом группы G понимается ее подгруппа, являющаяся идеалом в любом кольце на G. Изучению абсолютных идеалов групп посвящены работы Л. Фукса, Е. Фрида, К. Маклина, А.Р. Чехлова и др. Поскольку вполне характеристические подгруппы являются абсолютными идеалами, в [1] сформулирована проблема описания групп, в которых нет других абсолютных идеалов, кроме вполне характеристических подгрупп. Такие группы называются afi-группами. В [2] описаны afi-группы в классе вполне транзитивных периодических групп.

В настоящей работе показано, что класс afi-групп не замкнут относительно взятия прямых сумм и прямых произведений. Однако при определенных условиях верно обратное утверждение.

Теорема 1. *Если afi-группа является прямой суммой своих вполне характеристических подгрупп, то каждое слагаемое является afi-группой.*

Следующая теорема показывает, что условие вполне характеристичности слагаемых в теореме 1 существенно.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Тогда группа $A \oplus \mathbb{Z}$ является afi-группой для любой группы A.*

Литература

[1] *Fried E.* On the subgroup of abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colleq. Abelian Groups. Budapest. 1964. P. 51–55.

[2] *McLean K.R.* p-rings whose only right ideals are the fully invariant subgroups // Proc. London. Math. Soc. 1975. V. 3. P. 445–458.

Распознаваемость по графу простых чисел группы ${}^2E_6(2)$

Кондратьев А.С. (Екатеринбург)

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т.е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга–Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга–Кегеля (см. [6]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [6] и автора [3]. Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга–Кегеля нашли большое применение в теории групп.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В.Д. Мазурова [5]) или по графу простых чисел.

Определение 1. Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* (соответственно *графу простых чисел*), если она определяется в классе конечных групп своим спектром (соответственно графом простых чисел) с точностью до изоморфизма.

Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или графу простых чисел заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в 2001 г.), более слабого, чем распознаваемость.

Определение 2. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой по спектру* (соответственно *графу простых чисел*), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

В недавней работе автора [4] было завершено доказательство распознаваемости спектру конечных простых групп, граф Грюнберга–Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности, за исключением группы A_6. Тем самым был дан положительный ответ на соответствующий вопрос В.Д. Мазурова из [5].

В работах А.В. Заварницина [1] и [2] была доказана распознаваемость конечных простых групп по графу простых чисел, который имеет по крайней мере пять компонент связности.

В данной работе мы делаем шаг в решении проблемы распознаваемости по графу простых чисел конечных простых групп G, для которых $s(G) = 4$. Доказана следующая

Теорема. *Простая группа* $^2E_6(2)$ *распознаваема по графу простых чисел.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006).

Литература

[1] *Заварницин А.В.* О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.

[2] *Заварницин А.В.* Конечные группы с пятикомпонентным графом простых чисел // Сиб. матем. журн. 2013. Т.54, № 1. С. 57–64.

[3] *Кондратьев А.С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.

[4] *Кондратьев А.С.* Распознаваемость групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$ по графу простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 223–229.

[5] *Мазуров В.Д.* Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138.

[6] *Williams J.S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, No. 2. P. 487–513.

Ортогональные модули двойственных групп

Костромина Ю.В. (Рязань)

Пусть G — абелева группа без кручения конечного ранга r. Максимальную линейно независимую систему элементов $x_1, x_2, ..., x_r$ группы G будем называть ее *базисом.*

Мы рассматриваем матрицы Мальцева для локально свободных групп, введенных Р. Уорфилдом [2].

Через $R(G)$ обозначим подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, порожденное числами 1 и p^{-1} для всех простых p, таких что $pG = G$. Обозначим через $G_p = G \otimes \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p.

Определение 1. Группа без кручения G называется *локально свободной над* $R(G)$, если G_p свободна (как $\mathbb{Q}_p$-модуль) для всех простых p со свойством $pG \neq G$.

Для локально свободных групп p-матрицы Мальцева [6] устроены особенно просто: их элементами являются классы вычетов по модулю степени простого числа.

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{n}_{12} & \dots & \overline{n}_{1r} \\ 0 & \overline{1} & \dots & \overline{n}_{2r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix},$$

Также мы рассматриваем матрицы Мальцева для факторно делимых групп, введенных Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [1].

Определение 2. Группа без кручения G называется *факторно делимой*, если она содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — делимая периодическая группа.

p-матрица факторно делимой группы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \end{matrix}$$

Здесь $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Заметим, что данная p-матрица является квадратной, но так как последние n строк нулевые, мы их опускаем из рассмотрения.

Мы рассматриваем группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(G, R)$, где G — группа без кручения конечного ранга с фиксированным базисом $x_1, \dots, x_r$, R — группа без кручения ранга 1. Группа $\mathrm{Hom}(G, R)$ называется двойственной группе G в смысле Уорфилда [2].

Пусть p — простое число, $0 \leqslant s \in \mathbb{Z}$, $0 < r \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Рассмотрим декартову степень $M = \mathbb{Z}_{p^s}^r$ как модуль над кольцом классов вычетов по модулю p^s. Элементами модуля M являются векторы $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$, где $\gamma_i \in \mathbb{Z}_{p^s}$, $i = 1, \dots, r$.

Определение 3. Пусть $M = \mathbb{Z}_{p^s}^r$, N — подмодуль модуля M. Элемент $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) \in M$ называется *ортогональным подмодулю* N, если $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \ldots + \gamma_r\beta_r = 0$ для любого $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in N$.

Множество всех элементов ортогональных подмодулю N является $\mathbb{Z}_{p^s}$-подмодулем модуля M. Этот подмодуль будем обозначать $N^{\perp}$ и называть *ортогональным дополнением модуля* N.

Определение 4. Пусть G — локально свободная группа с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$, $F = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle$, p — простое число, такое что $pG \neq G$, $0 \leqslant s \in \mathbb{Z}$, $G_{(p^s)}$ — s-й слой группы G. Тогда подмодуль $N = G_{(p^s)}/F$ модуля $M = (p^{-s}F)/F \cong \mathbb{Z}_{p^s}^r$ будем называть p^s-*модулем* группы G относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Определение 5 [2]. Пусть $\tau = [(m_p)]$ — некоторый тип. Группа без кручения конечного ранга G принадлежит классу $\mathfrak{M}_\tau$, если G является p-делимой для всякого простого p с $m_p = \infty$ и $OT(G) \leqslant \tau$.

Предложение 1. *Пусть $A_s = (b_{ij})$ $(i, j = \overline{1, r})$ — p-матрица s-го слоя группы G относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$, $\beta_{ij} \in \mathbb{Z}_{p^s}$ — класс вычетов элемента матрицы b_{ij} по модулю p^s. Тогда p^s-модуль группы G относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$ совпадает с подмодулем модуля $\mathbb{Z}_{p^s}^r$, порожденным строками $(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1r}), \ldots, (\beta_{r1}, \ldots, \beta_{rr})$.*

Следующая теорема показывает, что соответствующие модули взаимо двойственных по Уорфилду групп являются взаимно ортогональными.

Теорема 1. *Пусть $\tau = [(m_p)]$ — некоторый тип, R — группа ранга 1 типа τ такая, что характеристика единицы в R равна (m_p). G — локально свободная группа класса $\mathfrak{M}_\tau$, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — базис группы G, для которого $(\alpha_1^{(p)}) \leqslant (m_p)$. Тогда p^{m_p}-модули двойственной в смысле Уорфилда группы $\mathrm{Hom}(G, R)$ относительно дуального базиса $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ являются ортогональными дополнениями p^{m_p}-модулей группы G относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$ для всех простых чисел p с $m_p < \infty$.*

Определение 6. Пусть $A = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \ldots & \hat{a}_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{a}_{r1} & \ldots & \hat{a}_{rr} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \ldots\ldots \\ \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \end{matrix}$ — p-матрица группы G относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Модуль N называется *p-адическим модулем группы G относительно базиса* $x_1, x_2, \ldots, x_r$, если N совпадает с подмодулем в $\widehat{\mathbb{Z}}_p^r$, порожденным строками $(\hat{a}_{11}, \ldots, \hat{a}_{1r}), \ldots, (\hat{a}_{r1}, \ldots, \hat{a}_{rr})$.

Следующая теорема показывает, что соответствующие модули взаимно двойственных по Арнольду групп являются взаимно ортогональными.

Теорема 2. *Пусть G — факторно делимая группа и $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — ее базис. Тогда p-адические модули двойственной в смысле Арнольда группы*

G^* относительно дуального базиса $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ являются ортогональными дополнениями p-адических модулей группы G относительно базиса $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Литература

[1] *Beaumont R., Pierce R.* Torsion free rings // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.

[2] *Warfield R.B.* Homomorphisms and duality for torsion-free groups // Math. Z. 1968. V. 107. P. 189–200.

[3] *Елизаров В.П.* Системы линейных уравнений над конечными кольцами // Труды по дискретной математике. 2002. Т. 6. С. 31–47.

[4] *Костромина Ю.В.* Двойственность Уорфилда и матрицы Мальцева // Фунд. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17, № 8. С. 77–94.

[5] *Костромина Ю.В.* Двойственность Арнольда и матрицы Мальцева // Вестник Томского государственного ун-та. 2012. Т. 18, № 2. С. 23–28.

[6] *Мальцев А.И.* Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. 1938. Т. 4. С. 45–68.

Вычисления в решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебрах

Кочетова Ю.В. (Москва)

Если $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над частично упорядоченным полем F, то говорят (см., например, [2]), что на алгебре A определен решеточный *$\mathcal{K}$-порядок* $\leqslant$, а алгебру A над полем F называют *решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгеброй* при выполнении следующих условий:

1) $\langle A; +; \leqslant \rangle$ является решеточно упорядоченной группой [4];

2) из $a \leqslant b$ следует, что $\gamma a \leqslant \gamma b$ для любых $a, b \in A$ и $\gamma > 0$, $\gamma \in F$;

3) из $a \geqslant 0$ следует, что $a + ab \geqslant 0$ и $a + ba \geqslant 0$ для всех $b \in A$.

Определение такого упорядочения было введено В.М. Копытовым для алгебр Ли в работе [1]. Для произвольных линейных алгебр над частично упорядоченными полями изучение свойств $\mathcal{K}$-порядка было продолжено автором совместно с Е.Е. Ширшовой (см., например, [2] и [3]). В частности, в работе [3] было показано, что не все из известных свойств элементов векторных решеток над линейно упорядоченными полями и решеточно упорядоченных колец справедливы для $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Рассмотрим свойства верхних и нижних граней, а также модулей элементов в решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебрах над различными полями.

Теорема 1. *В решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре A над частично упорядоченным полем F для любых элементов $a, b \in A$ и $\gamma \in F$ выполняются неравенства:*

$$|ab| \leqslant |a| \ \ \text{и} \ \ |ba| \leqslant |a|;$$
$$|\gamma(ab)| \leqslant a \ \ \text{и} \ \ |\gamma(ba)| \leqslant a \ \ \text{для} \ \ a > 0;$$
$$\gamma(a \wedge b) \leqslant \gamma a \wedge \gamma b \ \ \text{и} \ \ \gamma(a \vee b) \geqslant \gamma a \vee \gamma b \ \ \text{для} \ \ \gamma \geqslant 0.$$

Если при этом порядок поля F удовлетворяет условию, при котором для любых элементов $\alpha, \beta \in F$

$$\text{из соотношений} \ \ \alpha\beta > 0 \ \ \text{и} \ \ \alpha > 0, \ \text{следует, что} \ \ \beta > 0, \qquad (*)$$

то для всех $a, b \in A$ и $\gamma \in F$, $\gamma \geqslant 0$ имеют место равенства

$$\gamma(a \wedge b) = \gamma a \wedge \gamma b, \ \gamma(a \vee b) = \gamma a \vee \gamma b \ \ \text{и} \ \ \gamma|a| = |\gamma a|.$$

Теорема 2. *Пусть A — решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над направленным полем F. Тогда для каждого элемента $\gamma \in F$ существует такой положительный элемент $\alpha \geqslant \gamma$ из F, для которого неравенство $|\gamma a| \leqslant \alpha|a|$ верно при любом $a \in A$.*

Если же в направленном поле F выполнено условие $(*)$, то для любых элементов $a, b, c \in A$ и $\gamma \in F$ справедливы соотношения:

$$a \wedge b + (a \wedge b)c = (a + ac) \wedge (b + bc) \ \ \text{и} \ \ a \vee b + (a \vee b)c = (a + ac) \vee (b + bc);$$
$$ab \wedge ac \leqslant a(b \vee c) \leqslant ab \vee ac \ \ \text{и} \ \ ab \wedge ac \leqslant a(b \wedge c) \leqslant ab \vee ac;$$
$$\gamma|ab| \leqslant a \ \ \text{и} \ \ \gamma|ba| \leqslant a \ \ \text{при} \ \ a > 0;$$
$$-|ab| \leqslant |a||b| \leqslant |ab|.$$

Следствие. *В решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре Ли L над направленным полем, удовлетворяющим условию $(*)$, для всех $a, b \in L$ верно равенство*

$$[a \wedge b, a \vee b] = |a - b + [a, b]| - |a - b| = [|a - b|, b].$$

Литература

[1] *Копытов В.М.* Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 295–325.

[2] *Кочетова Ю.В.* Декартова сумма решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, Вып. 1. С. 92–101.

[3] *Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е.* Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, Вып. 1. С. 85–158.

[4] *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы / М.: Мир, 1965.

Формальные матрицы и их определители

Крылов П.А. (Томск), **Туганбаев А.А.** (Москва)

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, $M(n,R)$ — полное кольцо матриц порядка n над R, $n \geqslant 2$. Определим другое умножение матриц из $M(n,R)$ следующим образом. Пусть дано произвольное множество $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ центральных элементов s_{ijk} кольца R, $i,j,k = 1,\ldots,n$, удовлетворяющих равенствам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell} \tag{$*$}$$

для всех $i,j,k,\ell = 1,\ldots,n$. Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы из $M(n,R)$, то положим $AB = C = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}$. Относительно этого нового умножения все матрицы образуют кольцо. Оно называется *кольцом формальных матриц* порядка n над кольцом R и обозначается через $M(n,R,\Sigma)$. Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца $M(n,R,\Sigma)$. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем кольцо $M(n,R)$. Свойства колец $M(n,R,\Sigma)$ могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n,R)$. При $n = 2$ кольцо $M(n,R,\Sigma)$ введено в [5], [6]. Кольца $M(n,R,\Sigma)$ также изучались и использовались в [2–8].

Зафиксируем индекс $\ell = 1,\ldots,n$ и положим $t_{ij} = s_{ij\ell}$ для всех $i,j = 1,\ldots,n$. Отображение $\eta\colon M(n,R,\Sigma) \to M(n,R)$, $(a_{ij}) \to (t_{ij}a_{ij})$, является кольцевым гомоморфизмом.

С данным кольцом $M(n,R,\Sigma)$ можно связать несколько матриц. Именно, положим $S = (s_{iji})$. Затем для каждого $k = 1,\ldots,n$ образуем матрицу $S_k = (s_{ikj})$. Будем называть матрицы S, S_k *матрицами множителей* кольца $M(n,R,\Sigma)$. Матрица S является симметрической.

Сформулируем несколько взаимосвязанных задач о кольцах формальных матриц $M(n,R,\Sigma)$.

(I). Задача реализации и характеризации. Пусть даны матрицы T, T_1, …, T_n порядка n с элементами из центра $C(R)$. При каких условиях эти матрицы являются матрицами множителей какого-либо кольца $M(n, R, \Sigma)$?

(II). Задача классификации. Описать кольца формальных матриц в зависимости от систем множителей или матриц множителей.

(III). Проблема изоморфизма. Когда две системы множителей определяют изоморфные кольца формальных матриц?

В общем случае решить задачи (I)–(III) трудно. Рассмотрим случай, когда $s_{ijk} = 1$, либо $s_{ijk} = s$ для всех i, j, k, где s — некоторый центральный элемент кольца R. Любое соответствующее кольцо матриц обозначается через $M(n, R, s)$.

Считаем, что дано кольцо $M(n, R, s)$. Дополнительно предполагаем, что $s^2 \neq 1$ и $s^2 \neq s$. В дальнейшем слова «матрица множителей» означают определенную выше матрицу S. Между элементами матрицы S существуют определенные соотношения. Невозможен случай, когда некоторые два элемента из трех множителей s_{iji}, s_{iki}, s_{jkj} равны 1, а третий элемент равен s.

Определим понятие абстрактной матрицы множителей. Пусть s — некоторый центральный элемент кольца R, причем $s^2 \neq 1$ и $s^2 \neq s$. Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n, в которой все элементы равны 1 или s, причем главная диагональ состоит из единиц, и для любых трех элементов t_{ij}, t_{ik}, t_{jk} невозможен случай, когда некоторые два элемента из трех равны 1, а третий элемент равен s. Назовем такую матрицу T *матрицей множителей.*

Теорема 1. *Пусть T — матрица множителей. Существует кольцо $M(n, R, s)$, матрица множителей которого совпадает с T.*

Рассмотрим проблему изоморфизма (III) для таких колец формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, что при $i \neq j$ и $j \neq k$ каждый множитель s_{ijk} равен s^m для некоторого $m \geqslant 1$, где s — фиксированный центральный элемент кольца R. Здесь мы обозначаем такие кольца также через $M(n, R, s)$.

Пусть теперь s и t — два ненулевых центральных элемента кольца R. На элементы s и t накладываются некоторые дополнительные условия. В следующей теореме $Z(R)$ обозначает множество всех (левых или правых) делителей нуля кольца R, $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R.

Теорема 2. *Пусть R — такое коммутативное кольцо, что $Z(R) \subseteq J(R)$. Кольца $M(n,R,s)$ и $M(n,R,t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент в R и α — автоморфизм кольца R.*

Пусть R — коммутативное кольцо и дано некоторое кольцо $M(n,R,\Sigma)$. Можно ввести понятие определителя матрицы в кольце $M(n,R,\Sigma)$. Это можно сделать с помощью обычного определителя и определенного выше гомоморфизма η, либо с помощью аналога формулы полного развертывания. Такие определители обладают свойствами, похожими на свойства обычного определителя матрицы над коммутативным кольцом. Верны также аналоги теоремы Гамильтона–Кэли и одного известного критерия обратимости матрицы. В нескольких случаях определители матриц в кольце $M(n,R,\Sigma)$ встречаются в [1], [2], [3], [8], [9].

Литература

[1] *Абызов А.Н., Тапкин Д.Т.* О некоторых классах колец формальных матриц // Известия вузов. Математика. – Принято к печати.

[2] *Gurgun O., Halicioglu S., Harmanci A.* Quasipolarity of generalized matrix rings // arxiv: 1303. 3173v1 [math. RA] 13 Mar2013.

[3] *Gurgun O., Halicioglu S., Harmanci A.* Strong J-cleanness of formal matrix rings // arxiv: 1308. 4105v1 [math. RA] 19 Aug2013.

[4] *Huang Q., Tang G., Zhou Y.* Quasipolar property of generalized matrix rings // Comm. Algebra. 2014. V. 42, No. 9. P. 3883–3894.

[5] *Крылов П.А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, вып. 4. P. 456–463.

[6] *Krylov P.A., Tuganbaev A.A.* Modules over Formal Matrix Rings // J. Math. Sci. 2010. V. 171, No. 2. P. 248–295.

[7] *Tang G., Li Ch., Zhou Y.* Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. V. 42. P. 1668–1681.

[8] *Tang G., Zhou Y.* Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. P. 2546–2559.

[9] *Tang G., Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438, No. 12. P. 4672–4688.

Гомологические свойства факторно делимых абелевых групп и их групп характеров

Крючков Н.И. (Рязань)

Под словом «группа» в дальнейшем подразумевается «абелева группа». Понятие факторно делимой группы без кручения было введено Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в 1961 г. и обобщено на случай смешанных групп А.А. Фоминым и У. Уиклессом в 1998 г., [1].

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Напомним, что *группой характеров* локально компактной группы L называется группа непрерывных гомоморфизмов из L в группу $\mathbb{T}$, снабженная компактно открытой топологией. Группа характеров группы L обозначается L^*.

Описаны группы характеров факторно делимых групп. Доказано, что компактная группа K является группой характеров факторно делимой группы в точности тогда, когда K содержит вполне несвязную подгруппу без кручения F, такую, что $K/F \cong \mathbf{T}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и при этом K не содержит прямых слагаемых, являющихся вполне несвязными группами без кручения. Группы характеров факторно делимых групп называются факторно тороидальными. Изучены некоторые базовые свойства факторно тороидальных групп.

$\mathrm{Hom}^{(c)}(L, M)$ обозначает группу непрерывных гомоморфизмов из L в M, P — множество всех простых чисел, $t_p(A)$ — p-примарная компонента периодической части группы A, $\pi(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}$; символом $q(A)$ обозначается множество $\{p \in P \mid pA \neq A\}$; p-ранг дискретной группы A — это размерность векторного пространства A/pA над конечным полем из p элементов.

Теорема 1. *Если K — компактная факторно тороидальная группа и A — факторно делимая группа, то справедливы следующие утверждения:*

1) *Группа* $\mathrm{Hom}^{(c)}(K, A)$ *изоморфна* $\bigoplus\limits_{p \in q(K) \cap \pi(A)} \mathrm{Tor}(t_p(K^*), t_p(A))$, *следовательно, группа* $\mathrm{Hom}^{(c)}(K, A)$ *является прямой суммой конечных циклических групп, причем каждая примарная компонента этой группы является конечной.*

2) *Группа* $\mathrm{Hom}^{(c)}(K, A)$ *является бесконечной тогда и только тогда, когда* $|q(K) \cap \pi(A)| = \aleph_0$. *Группа* $\mathrm{Hom}^{(c)}(K, A)$ *является конечной и ненулевой тогда и только тогда, когда* $0 < |q(K) \cap \pi(A)| < \aleph_0$. $\mathrm{Hom}^{(c)}(K, A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $q(K) \cap \pi(A) = \varnothing$.

3) $\mathrm{Hom}^{(c)}(A^*, A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* A *— группа без кручения.*

4) $\mathrm{Hom}^{(c)}(K, A) \cong \mathrm{Hom}^{(c)}(\widetilde{K}, \widehat{A})$*, где* $\widehat{A}$ *—* $\mathbb{Z}$*-адическое пополнение* A*, а* $\widetilde{K}$ *— группа характеров* $\mathbb{Z}$*-адического пополнения группы* K^**.*

Теорема 2. *Если* K *— компактная факторно тороидальная группа,* A *— факторно делимая группа, то группа* $\mathrm{Ext}(A, K)$ *является счетным прямым произведением конечных циклических групп.*

Получены условия равенства нулю групп $\mathrm{Ext}(A, K)$ и $\mathrm{Ext}(K, A)$, где K и A соответственно факторно тороидальная и факторно делимая группы.

Дискретная группа A удовлетворяет условию $\mathrm{Ext}(A, F) = 0$ для произвольной факторно делимой группы F в точности тогда, когда A является группой Уайтхеда.

Доказано, что если A — периодическая группа, F — факторно делимая группа ранга n, то группа $\mathrm{Ext}(A, F)$ изоморфна факторгруппе группы $(A^*)^n$ (здесь группа A^* рассматривается с дискретной топологией). Если F — факторно делимая группа, все p-ранги которой равны 1, то для произвольной периодической группы A группа $\mathrm{Hom}(A, F)$ изоморфна подгруппе группы A^*.

Установлена связь факторно делимых групп с обобщениями теории узких групп, которые были начаты в серии замечательных работ С.В. Рычкова.

Литература

[1] *Fomin A.A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups //Proc. Am. Math. Soc. 1998. Vol. 126. P. 45–52.

Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением

Логачева Е.С. (Тула)

Определение 1. Будем говорить, что в группе G *разрешима проблема сопряженности подгрупп*, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент $z \in G$ такой, что $z^{-1}H_1z = H_2$.

Впервые проблема сопряженности подгрупп была рассмотрена в 1967 году В.Н. Ремесленниковым в классе конечно порожденных нильпотентных групп [14]. Далее Гриндлингером М.Д. указано, в каких случаях любые две подгруппы ранга 2 свободной группы сопряжены в ней [8]. Данный результат был обобщен Молдаванским Д.И. на конечно порожденные подгруппы [13]. В 1971 году Безверхним В.Н. [3] и Молдаванским Д.И. [12] независимо друг от друга была решена проблема сопряженности подгрупп для свободного произведения групп при условии, что в сомножителях разрешены проблемы вхождения и сопряженности подгрупп; в 1977 году Безверхним В.Н. решена проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении двух свободных групп с объединением по циклической подгруппе [2], в 1983 — в HNN-расширении по изоморфным конечным ассоциированным подгруппа [1]. Также в 1975 году Безверхний В.Н. показал, что в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по подгруппе ранга 4, проблема сопряженности подгрупп неразрешима [6].

Рассмотрим конечный дерево-граф Γ, каждой его вершине v_i соответствует бесконечная циклическая группа $\langle a_i \rangle$, а если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют подгруппы $\langle a_i \rangle$ и $\langle a_j \rangle$, то самому ребру соответствуют ассоциированные подгруппы $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle = \langle a_j^{q_{ji}} \rangle$. Тогда группа G_Γ, соответствующая графу Γ, называется *древесным произведением циклических групп с ассоциированными циклическими подгруппами.*

Копредставление группы G_Γ имеет вид:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle \mid a_i^{p_{ij}} = a_j^{q_{ji}} \rangle, \; |p_{ij}|, |q_{ji}| \geqslant 1, \; i, j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle a_j^{q_{ji}} \rangle$ ассоциированные подгруппы.

Утверждение 1 [11]. *В группе G_Γ (1) разрешима проблема сопряженности слов.*

Лемма 1 [8]. *Для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle$, $k = \overline{1, n}$, где a_k — образующий группы G_Γ, существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.*

Лемма 2 [8]. *Для любого слова $v \in G_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$, существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$, где $a_k \in G_\Gamma$, $k = \overline{1, n}$.*

Теорема 1 [10]. *В группе* G_Γ (1) *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Далее рассмотрим HNN-расширение группы G_Γ с помощью правильной проходной буквы t:

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma,\, t \mid relG_\Gamma, t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle, \tag{2}$$

где $U_1 = \langle a_{i_0}^{s_{ij}}\rangle$, $U_{-1} = \langle a_{j_0}^{k_{ji}}\rangle$, $|s_{ij}|$, $|k_{ji}| \geqslant 1$, $i, j = \overline{1, n}$.

Лемма 3 [11]. *Для любой конечно порожденной подгруппы* $H < \overline{G}_\Gamma$ *и циклической подгруппы* $\langle a_k\rangle$, $k = \overline{1, n}$, *где* a_k – *образующий группы* G_Γ, *существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения* $H \cap \langle a_k\rangle$.

Лемма 4 [11]. *Для любого слова* $v \in \overline{G}_\Gamma$ *и любой конечно порожденной подгруппы* $H < \overline{G}_\Gamma$, *существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение* $vH \cap \langle a_k\rangle$, *где* $a_k \in G_\Gamma$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 2. *В группе* $\overline{G}_\Gamma$ (2) *разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 3 [5]. *В группе* $\langle a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n\rangle$, $m, n > 1$ *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Теорема 4. *В группе* $\overline{G}_\Gamma$ (2) *разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

Литература

[1] *Безверхний В.Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Межвузовский сборник научных трудов. 1983. С. 50–80.

[2] *Безверхний В.Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II // Современная алгебра. Межвузовский сборник. 1977. Вып. 6. С. 16–32.

[3] *Безверхний В.Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев, 1971. С. 9–10.

[4] *Безверхний В.Н.* Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. Тульский политехнический институт. 1975. Вып. 2. С. 90–95.

[5] *Безверхний В.Н., Логачева Е.С.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Известия ТулГУ Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, Вып. 1. С. 83–101.

[6] *Безверхний В.Н., Логачева Е.С.* Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Вып. 1. С. 32–44.

[7] *Безверхний В.Н., Логачева Е.С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, Вып. 1(41). С. 20–46.

[8] *Гриндлингер М.Д.* Сопряженность подгрупп свободной группы // Сибирский математический журнал. 1970. Т. 11. С. 1178–1180.

[9] *Логачева Е.С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп // Известия ТулГУ, Естественные науки. Тула, 2013. Вып. 2., Ч. 1. С. 19–40.

[10] *Логачева Е.С.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с циклическим объединением // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Вып. 2. С. 50–65.

[11] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп / М.: Мир, 1980.

[12] *Молдаванский Д.И.* Решение проблемы сопряженности подгрупп // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев, 1971. С. 62–63.

[13] *Молдаванский Д.И.* Сопряженность подгрупп свободной группы // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 6. С. 691–694.

[14] *Ремесленников В.Н.* Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 2. С. 61–76.

Алгебраически компактные абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов

Любимцев О.В. (Нижний Новгород)

Кольцо K называется *кольцом с однозначным сложением* (UA-*кольцом*), если любой m-изоморфизм колец K и S (т.е. изоморфизм мультипликативных полугрупп колец K и S) является изоморфизм колец [1]. Абелеву группу A будем называть *End-UA-группой*, если ее кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ — UA-кольцо. В работе найдены *End-UA*-группы в классе алгебраически компактных абелевых групп. Далее слово «группа» означает «абелева группа».

Отметим, что для описания редуцированных алгебраически компактных End-UA-групп достаточно найти p-адические алгебраически компактные End-UA-группы.

Теорема 1. *Пусть* $B_p = \bigoplus\limits_{m_0} J_p \oplus \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \bigoplus\limits_{m_k} Z_{p^k}$ *— базисный подмодуль p-адической алгебраически компактной группы A_p. Тогда группа A_p не является End-UA-группой в том и только том случае, если выполнено одно из условий:*

1) *$m_0 = 1$ и $m_k = 0$ почти для всех $k = 1, 2, \ldots$;*

2) *$m_0 = 0$ и $m_k = 0$ почти для всех $k = 1, 2, \ldots$ При этом, если $p \neq 2, 3$ и k^* — наибольшее число, для которого $m_{k^*} \neq 0$, то $m_{k^*} = 1$. Если $p = 2$ или $p = 3$, то $m_{k^*} = 1$ для $k^* \neq 1$.*

Пусть ограниченная p-группа имеет единственное циклическое прямое слагаемое Z_{p^k} максимального порядка. Следуя [2], подгруппу Z_{p^k} ($\neq Z_2, Z_3$) назовем изолированным слагаемым. Редуцированную часть группы обозначим через R (предполагается, что $R \neq 0$). Следующие теоремы описывают нередуцированные алгебраически компактные End-UA-группы.

Теорема 2. *Пусть $A = D_t \oplus R$ — алгебраически компактная группа, где D_t — ненулевая делимая периодическая группа. Тогда A не является End-UA-группой в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:*

1) *существует $q \notin \operatorname{supp} D_t$, такое что q-адическая компонента R_q группы R есть ограниченная группа, имеющая изолированное слагаемое;*

2) *R — периодическая группа и $D_q = Z_{q^\infty}$ для некоторого $q \in P$.*

Теорема 3. *Пусть $A = D_f \oplus R$ — алгебраически компактная группа, где $0 \neq D_f$ — делимая группа без кручения. Группа A не является End-UA-группой в точности тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) *найдется q-адическая компонента группы R, которая является ограниченной группой с изолированным слагаемым;*

2) *R — периодическая группа и $D_f = Q$.*

Теорема 4. *Пусть $A = D_f \oplus D_t \oplus R$ — алгебраически компактная группа, где $0 \neq D_f$ — делимая часть без кручения, $0 \neq D_t$ — делимая периодическая группа. Группа A не является End-UA-группой в точности тогда, когда найдется $q \notin supp\, D_t$, такое что R_q есть ограниченная группа с изолированным слагаемым.*

Теорема 5. *Делимая группа A не является End-UA-группой в точности тогда, когда $A \cong Q$ или A — периодическая группа, у которой хотя бы одна p-компонента изоморфна группе Z_{p^∞}.*

В заключении отметим тот любопытный факт, что класс алгебраически компактных абелевых *End*-UA-групп совпадает с классом обобщенно эндопримальных алгебраически компактных абелевых групп [3], кроме тривиальных случаев, когда группа изоморфна Z_2 или Z_3.

Литература

[1] *Михалев А.В.* Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. 1988. Т. 135, Вып. 2. С. 210–224.

[2] *Любимцев О.В.* Периодические абелевы группы с UA–кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2001. Т. 70, Вып. 5. С. 736–741.

[3] *Albrecht U., Breaz S., Wickless W.* Generalized endoprimal abelian groups // Jour. of Alg. and Its Appl. 2006. V. 5, No. 1. P. 1–17.

UA-свойства модулей над коммутативными нетеровыми кольцами

Любимцев О.В. (Нижний Новгород), **Чистяков Д.С.** (Москва)

Кольцо K называется *кольцом с однозначным сложением* (UA-*кольцом*), если любой m-изоморфизм колец K и S (т.е. изоморфизм мультипликативных полугрупп колец K и S) является изоморфизм колец [1]. R-модуль A назовем *End*-UA-*модулем*, если его кольцо эндоморфизмов $End_R(A)$ есть UA-кольцо. Далее, пусть A, B — левые R-модули и

$$\mathcal{M}_R(A, B) = \{f\colon A \to B \mid f(ra) = rf(a),\ r \in R,\ a \in A\}.$$

R-модуль A называется *модулем с однозначным сложением* (UA-*модулем*), если все биекции в $\mathcal{M}_R(A, B)$ являются изоморфизмами для каждого R-модуля B [2]. Множество $\mathcal{M}_R(A, A) = \mathcal{M}_R(A)$ образует почтикольцо относительно операций сложения и композиции отображений. R-модуль A

называется *n-эндоморфным*, если $\mathcal{M}_R(A^n) = End_R(A^n)$. В случае, когда данное равенство верно при всех $n \in \mathbb{N}$, модуль A назовем эндоморфным.

Предложение 1. *Если R-модуль A является n-эндоморфным для некоторого $n > 1$, то A — UA-модуль над R.*

В теоремах 2, 3 и 4 кольцо R является коммутативным кольцом дискретного нормирования.

Теорема 2. *Пусть $M = B \oplus D$, где B — ограниченный, а $D \neq 0$ — делимый R-модуль. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M — End-UA-модуль;*

2) *M — эндоморфный $End_R(M)$-модуль;*

3) *$D \neq R(p^\infty)$.*

Теорема 3. *Пусть M — R-модуль, имеющий неограниченный базисный подмодуль. Тогда*

1) *M является End-UA-модулем;*

2) *M является эндоморфным $End_R(M)$-модулем.*

Теорема 4. *Пусть M — ограниченный R-модуль,* $\exp M = n$. *Если M содержит подмодуль $R(p^n) \oplus R(p^n)$, то M является End-UA-модулем и эндоморфным $End_R(M)$-модулем.*

Отметим, что для эндоморфных $End_R(M)$-модулей верно и обратное утверждение.

Кроме того, мы исследуем эндоморфные модули над структурным пучком $\mathcal{O}_X$ колец, где R — коммутативное нетерово кольцо и $X = Spec(R)$ (см., например, [3]). Простой идеал P в R называется *ассоциированным простым идеалом* в A, $P \in Ass(A)$, если существует элемент $a \in A$, такой что $P = Ann_R(a)$. Обозначим множество максимальных элементов в $Ass(A)$ через Max-$Ass(A)$. Пусть R — коммутативное нетерово кольцо и A — конечнопорожденнный R-модуль. Соответствующий $\mathcal{O}_X$-модуль обозначим через $\widetilde{A}$.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathcal{M}_R(A) = End_R(A)$;*

2) *$\mathcal{M}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{A}) = End_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{A})$;*

3) A_Q — *циклический* R_Q*-модуль для всех* $Q \in Max\text{-}Ass(A)$.

Следствие 5. *Если* $\mathcal{O}_X$*-модуль* $\widetilde{A}$ *является* n*-эндоморфным, то* $n = 1$.

Второй автор поддержан совместной программой «Михаил Ломоносов, III» Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD: научно-исследовательские стипендии и научные стажировки (Michail Lomonosov III — Forschungsstipendien und Aufenthalte).

Литература

[1] *Михалев А.В.* Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. 1988. Т. 135, Вып. 2. С. 210–224.

[2] *van der Merwe A.B.* Unique addition modules // Comm. in Algebra. 1999. V. 27, No. 9. P. 4103–4115.

[3] *Мамфорд Д.* Красная книга о многообразиях и схемах / М.: МЦМНО, 2007.

Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов

Любимцев О.В. (Нижний Новгород), **Чистяков Д.С.** (Москва)

Известная теорема Бэра–Капланского, в которой утверждается, что из изоморфизма колец эндоморфизмов периодических абелевых групп следует изоморфизм самих групп, определила целое направление в теории абелевых групп, занимающееся проблемой изоморфизма и реализации (другое название — проблема определяемости). Многие специалисты ставили аналогичную проблему для групп и полугрупп эндоморфизмов, варьируя часто саму постановку задачи. Авторам удалось обобщить теорему Мэя–Тубасси (см. [1]) на случай полугрупп эндоморфизмов. Приведем используемые обозначения: $\mathrm{E}^{\bullet}(G)$ — полугруппа эндоморфизмов группы G; $T(G)$ — периодическая часть группы G; если A — периодическая группа, то $supp(A) = \{p \mid A_p \neq 0\}$; J_p — группа целых p-адических чисел. Под словом «группа» понимается абелева группа.

Предложение 1. *Пусть* A — *делимая периодическая группа и пусть* $\mathrm{E}^{\bullet}(A) \cong \mathrm{E}^{\bullet}(B)$ *для некоторой группы* B. *Тогда* B *не является смешанной группой.*

Предложение 2. *Пусть G — группа с редуцированной периодической частью $T(G)$, не содержащая прямых слагаемых изоморфных группе J_p. Если $\mathrm{E}^\bullet(G) \cong \mathrm{E}^\bullet(H)$, то $T(G) \cong T(H)$ для любой группы H.*

Из последнего утверждения следует, в частности, что если периодические части $T(G)$ и $T(H)$ групп G и H редуцированы, то из $\mathrm{E}^\bullet(G) \cong \mathrm{E}^\bullet(H)$ следует $T(G) \cong T(H)$.

Предложение 3. *Если A — периодическая группа, все p-компоненты которой являются ограниченными группами, и $\mathrm{E}^\bullet(A) \cong \mathrm{E}^\bullet(B)$ для некоторой группы B, то $\mathrm{E}(A) \cong \mathrm{E}(B)$.*

Теорема 4. *Пусть G и H — абелевы группы. Следующие условия равносильны:*

1) $\mathrm{E}^\bullet(G) \cong \mathrm{E}^\bullet(H)$ *и* $T(G) \ncong T(H)$;

2) $G = A \oplus B$ *и* $H = C \oplus D$, *где*

   a) A *— нетривиальная делимая периодическая группа,* B *— редуцированная периодическая группа и* $supp(A) \cap supp(B) = \varnothing$;

   b) C *— группа без кручения и* $\mathrm{E}^\bullet(C) \cong \mathrm{E}^\bullet(A)$;

   c) $T(D) \cong B$ *и* $\mathrm{E}^\bullet(D) \cong \mathrm{E}^\bullet(B)$.

Приведем пример групп, удовлетворяющих данной теореме.

Пример 5. Редуцированная группа G называется *SI-группой*, если выполнены следующие условия:

- каждая p-компонента G_p группы G — прямая сумма циклических p-групп одного порядка;

- существуют изоморфные вложения
$$\bigoplus_{p \in supp(G)} G_p \subseteq G \subseteq \prod_{p \in supp(G)} G_p;$$

- если $x = (x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots)$, $y = (y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots) \in \prod\limits_{p \in supp(G)} G_p$; $x_{p_i}, y_{p_i} \in G_{p_i}$, причем $o(x_{p_i}) \leqslant o(y_{p_i})$ для всех i и $y \in G$, то $x \in G$.

Из данного определения немедленно следует, что SI-группа G вполне инвариантна в прямом произведении своих p-компонент, а ее кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу эндоморфизмов ее периодической части. Полагаем, $A = \mathbb{Z}(2^\infty)$, $C = J_2$, D — SI-группа с нулевой 2-компонентой, B — периодическая часть группы D.

Второй автор поддержан совместной программой «Михаил Ломоносов, III» Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD: научно-исследовательские стипендии и научные стажировки (Michail Lomonosov III — Forschungsstipendien und Aufenthalte).

Литература

[1] *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky // Journal of Algebra. 1976. V. 43. P. 1–13.

Атлас конечных простых неабелевых $(2 \times 2, 2)$-порожденных групп

Макосий А.И. (Абакан)

Тройка инволюций (i_1, i_2, i_3) группы G с условием $G = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle$, где $i_1 i_2 = i_2 i_1$ называется $(2 \times 2, 2)$-*тройкой инволюций* группы G. Каждой $(2 \times 2, 2)$-тройке инволюций соответствует пятерка $(p,\ q,\ X_1,\ X_2,\ X_3)$, где p, q — порядки произведений $i_1 i_3$, $i_2 i_3$ соответственно и $p \leqslant q$, а X_k — имя класса сопряженных инволюций, содержащего инволюцию i_k, $k = 1, 2, 3$. Эти имена обычно записывают как $2A, 2B, \ldots$ Мы не различаем $(2 \times 2, 2)$-тройки инволюций, имеющие одинаковые пятерки.

Ставится задача построения в явном виде с точностью до указанной факторизации всех $(2 \times 2, 2)$-троек инволюций для ряда конечных простых групп. В рамках решения задачи создан электронный атлас таких троек для каждой знакопеременной группы подстановок степени меньше семнадцати, ряда спорадических и линейных групп.

Литература

[1] *Макосий А.И., Тимофеенко А.В.* Атлас конечных простых $(2 \times 2, 2)$-порожденных групп, 2012. http://algebra.krasn.ru.

[2] *Макосий А.И.* Электронные атласы групп как инструмент исследования в теории групп и ее приложениях. Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1 (23). С. 211–215.

Полукольца и их пирсовские слои

Марков Р.В., Чермных В.В. (Киров)

Р.С. Пирсом [1] для произвольного кольца R с 1 был построен (пирсовский) пучок колец на нульмерном компакте $Max\,BR$ со слоями R/MR, где M — максимальный идеал булева кольца BR центральных идемпотентов из R. Им же было показано, что произвольное кольцо R с 1 изоморфно кольцу всех глобальных сечений своего пирсовского пучка. Нетривиальный пирсовский пучок существует для колец с богатой алгеброй центральных идемпотентов и поэтому пирсовские пучки применялись при исследовании регулярных, бирегулярных, заменяемых, чистых колец [2–5]. Аналоги пирсовских пучков колец были получены и для некоторых других алгебраических систем — ограниченных дистрибутивных решеток, почти-колец, решеточно упорядоченных колец и решеточно упорядоченных абелевых групп, универсальных алгебр.

Произвольное кольцо является подпрямым произведением своих пирсовских слоев, и естественно возникают задачи: 1) описать свойства, поднимаемые с пирсовских слоев до исходной представляемой алгебры; 2) выделить классы алгебр, допускающих характеризацию свойствами их пирсовских слоев.

Авторы решают сформулированные задачи для классов полуколец. *Полукольцом* называется алгебра, отличающаюся от ассоциативного кольца с 1, возможно, необратимостью аддитивной операции. Впервые для полуколец конструкция, обобщающая пирсовский пучок колец, была рассмотрена В.В. Чермных [6]. Обозначим через BS булеву алгебру центральных дополняемых идемпотентов полукольца S с операциями $e \oplus f = ef^{\perp} + e^{\perp}f$, $e \odot f = ef$, где $+, \cdot$ — полукольцевые операции, $e^{\perp}$ — дополнение к центральному идемпотенту $e \in BS$. Множество $Max\,BS$ максимальных идеалов из BS, наделенное стоуновской топологией, становится нульмерным компактом и является базисным пространством пирсовского пучка. Пирсовкие слои определятся как факторполукольца S/ρ_M, $M \in Max\,BS$, где конгруэнция ρ_M на S определяется:

$$a \equiv b(\rho_M) \;\; \Leftrightarrow \;\; ae^{\perp} = be^{\perp} \text{ для некоторого } e \in M.$$

Получены характеризации следующих классов полуколец в терминах свойств их пирсовских слоев и пирсовского пучка: заменяемых, arp–полуколец, pf–полуколец, полуколец, близких к регулярным (риккартовы, полуриккартовы, бирегулярные), полуколец без нильпотентных элементов и др. В качестве иллюстрации приведем два результата.

Предложение 1. *Полукольцо бирегулярно в точности тогда, когда все его пирсовские слои — простые полукольца.*

Предложение 2. *Для полукольца S равносильны утверждения:*

(1) *S — риккартово полукольцо без нильпотентных элементов;*

(2) *пирсовский пучок полукольца S полухаусдорфов, а все все пирсовские слои полукольца S являются полукольцами без делителей нуля.*

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/К.

Литература

[1] *Pierce R.S.* Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V. 70. P. 1–112.

[2] *Тюкавкин Д.В.* Пирсовские пучки для колец с инволюцией // М.: МГУ. 1982. 64 с. Деп. ВИНИТИ, № 4346-82 Деп.

[3] *Carson A.B.* Representation of regular rinds of finite index // J. Algebra. 1976. V. 39, № 2. P. 512-526.

[4] *Туганбаев А.А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца / М.: МЦНМО, 2009.

[5] *Burgess W.D., Stephenson W.* Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. 1979. V. 22, № 2. P. 159–164.

[6] *Чермных В.В.* Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186.

О равенстве нулю группы Hom$(-, C)$

Мисяков В.М. (Томск)

В [1] С.Я. Гриншпоном сформулирована проблема 2: «Выяснить, для каких групп A группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, C)$ равна нулю, где C — вполне разложимая группа без кручения». Для периодической абелевой группы C эта задача была решена в работе [2].

Все обозначения стандартны и соответствуют [3].

Нами найдены некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(A,\,C)$ для произвольной группы без кручения C.

В следующей лемме описание группы A, для которой выполняется равенство $\mathrm{Hom}(A,\,C)=0$, в случае, когда C — группа без кручения, сводится к случаю, когда A — непериодическая, неделимая группа.

Лемма 1. *Пусть C — ненулевая группа без кручения. Тогда равенство $\mathrm{Hom}(A,\,C)=0$ выполняется в том и только том случае, когда группа A удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *A — периодическая группа;*

2) *A — непериодическая группа, C — редуцированная группа, причём либо A — делимая группа, либо* $\mathrm{Hom}(A,\,C)=0$, *если A — непериодическая, неделимая группа.*

Теорема 2. *Пусть C — ненулевая редуцированная группа без кручения и A — непериодическая, неделимая группа. Тогда* $\mathrm{Hom}(A,\,C)=0$ *в том и только том случае, когда для редуцированной части $A'\neq 0$ группы A выполняется:*

a) если $T(A')=0$, то справедливо одно из условий:

i) A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}$, и выполняется одно из условий:

i_1) для любого $f\in\mathrm{Hom}(A',\,C)$ существует $0\neq c\in C$ такой, что $\mathrm{im}(f)\subseteq\langle c\rangle$;

i_2) для любого гомоморфизма $\beta\colon A'\to C$ найдётся гомоморфизм $\alpha\colon A'\to F_{\mathrm{m}}$ такой, что $\pi\alpha=\beta$, т.е. следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна, где F_{m} — свободная группа и π — эпиморфизм;

j) для любого гомоморфизма $\varphi\in\mathrm{Hom}(A',\,C)$ следует:

j_1) существует сервантная подгруппа C' ранга 1 типа $t(C')$ в группе C, содержащая $\mathrm{im}(\varphi)$;

j_2) для любого элемента $a\in A'$ такого, что $t(a)<t(C')$, следует, что $a\in\ker(\varphi)$;

j_3) *группа A' не содержит прямого слагаемого ранга* 1, *изоморфного C'*;

b) если $T(A') \neq 0$, то факторгруппа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию a).

Литература

[1] *Гриншпон С.Я.* Проблема 2 // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума, 22–25 августа 2005 г. Бийск: РИО БПГУ, 2005. С. 60.

[2] *Гриншпон С.Я.* О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. ВУЗов. Математика. 1998. № 9. С. 42–46.

[3] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / Москва: Мир. Т. 1, 1974; Т. 2, 1977.

О применении групп изометрий в классификации выпуклых многогранников с паркетными гранями

Михайлов А.Н. (Абакан), **Тимофеенко А.В.** (Красноярск)

Для обобщения основной теоремы работы [1] и, в частности, для описания выпуклых многогранников с паркетными гранями создана интегрированная программная среда систем компьютерной алгебры и графики. В более удобной форме для этих целей представлены кристаллографические группы. Например, справедливо

Предложение 1. *Если S_n — кристаллографическая группа размерности* 2 *и с номером n в кристаллографической таблице, T — ее подгруппа параллельных переносов и точечная группа P изоморфна факторгруппе S_n/T, то $S_n \ncong P \leftthreetimes T$ только для $n = 4, 7, 8, 12$, а для других n действие порождающих элементов группы $P = \langle p, q, \ldots \rangle$ на порождающие x, y группы T показывает*

Таблица 1 определяющих соотношений группы $S(n)$ (без $[x,y]=1$)

n	Соотношения группы P	Действие P на T
2	p^2	$x^p x, y^p y$
3	p^2	$x^p x, y^p y^{-1}$
5	p^2	$x^p y^{-1}, y^p x^{-1}$
6	$[p,r], p^2, r^2$	$[x,p], x^r x, y^r y, y^p y$
9	$p^2, r^2, [p,r]$	$x^p y^{-1}, x^r x, y^r y, y^p x^{-1}$
10	$p^2 r^{-1}, r^2, [p,r]$	$x^p y, x^r x, y^r y, y^p x^{-1}$
11	$p^2, r^2 q^{-1}, q^2, [p,q],$ $[r,q], r^p r^{-1} q^{-1}$	$[x,p], x^r y, x^q x, y^r x^{-1}, y^p y, y^q y$
13	p^3	$x^p yx, y^p x^{-1}$
14	$p^3, r^2, p^r p^{-2}$	$x^r y, x^p yx, y^r x, y^p x^{-1}$
15	$p^3, r^2, p^r p^{-2}$	$x^r y^{-1}, x^p yx, y^r x^{-1}, y^p x^{-1}$
16	$p^3, r^2, [p,r]$	$x^r x, x^p yx, y^r y, y^p x^{-1}$
17	$p^3, r^2, q^2, [r,q], [p,r], p^q p^{-2}$	$x^q y^{-1}, x^r x, x^p yx, y^q x^{-1}, y^r y, y^p x^{-1}$

Будет рассказано о применении гомоморфных образов кристаллографических групп и конечных групп изометрий в доказательстве теорем о классификации многогранников.

Литература

[1] *Тимофеенко А.В.* К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова./ Под ред. И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова. — М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 155–170.

О сверхразрешимости произведений нормальных подгрупп

Монахов В.С., Чирик И.К. (Гомель, Беларусь)

В конечной группе произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп в общем случае не является сверхразрешимой подгруппой, соответствующие примеры хорошо известны ([1], с. 159–160). Но в частных случаях это верно, например, когда один из сомножителей нильпотентен.

Группа, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна, называется $\mathfrak{t}$-*группой*. Строение конечных разрешимых $\mathfrak{t}$-групп получил Гашюц [2], в частности, они сверхразрешимы.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть A и B — нормальные подгруппы конечной группы. Если A — разрешимая* t*-группа, а B сверхразрешима, то AB сверхразрешима.*

Конечная группа, в которой все силовские подгруппы циклические, является t-группой. Поэтому справедливо

Следствие. *Пусть A и B — нормальные подгруппы конечной группы. Если все силовские подгруппы в A циклические, а B сверхразрешима, то AB сверхразрешима.*

Литература

[1] *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[2] *Gaschütz W.* Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist // J. Reine Angew. Math. 1957. V. 198. P. 87–92.

О независимости групп автоморфизмов от свойства быть гомоморфизмом в классе решеток Уотермена

Перминов Е.А., Перминова О.Е. (Екатеринбург)

По конечной решетке L можно определить граф $\langle L, \sim\rangle$, где $a \sim b$ означает, что a покрывает b или b покрывает a в решетке L. Очевидно, что $Aut\langle L, \sim\rangle \supseteq Aut\langle L, \succ\rangle$. В монографии Г. Биркгофа [1] со ссылкой на Уотермена поставлена проблема № 6: «*найти все конечные решетки, для которых каждый автоморфизм соответствующего им графа являлся бы решеточным автоморфизмом*», т.е. $Aut\langle L, \sim\rangle \cong Aut\langle L, \succ\rangle$. Назовем такие конечные решетки *решетками Уотермена.*

В работе [2] доказана теорема о том, что каждая конечная решетка вложима в решетку Уотермена. Эта теорема свидетельствует о некоей универсальности и сложности класса решеток Уотермена.

В работе [3] доказана независимость моноидов эндоморфизмов от свойства быть гомоморфизмом в классе алгебр. О независимости групп автоморфизмов от свойства быть гомоморфизмом в классе решеток Уотермена свидетельствует

Теорема. *Для любых двух конечных групп G_1 и G_2 существуют такие решетки Уотермена L_1 и L_2, что $Aut\,L_1 \cong G_1$, $Aut\,L_2 \cong G_2$ и L_2 является гомоморфным образом L_1.*

Литература

[1] *Биркгоф Г.* Теория решеток / М.: Наука, 1984.

[2] *Перминов Е.А.* О конечных решетках, у которых совпадают группы решеточных и графских автоморфизмов // Свердловск: УрГУ. 1984. № 340–89 Деп. 9 с.

[3] *Platt G.* A note on endomorphism semigroups // Can. Math. Bull. 1970. V. 13, № 1. P. 47–48.

Частичные полугруппы и отношения Грина

Петриков А.О. (Москва)

Понятие ассоциативности частичной операции было введено В.В. Розеном [1] двумя неэквивалентными способами (сильная и слабая ассоциативность).

Очевидно, любую частичную операцию при помощи добавления нулевого элемента можно продолжить (см., например, [2, §6.8]). Наша цель — рассмотреть продолжение операции на частичной полугруппе без добавления элемента.

Полной операцией мы будем называть операцию, определённую для всех наборов элементов, *частичной* — операцию, значения которой определены, быть может, не для всех наборов. Интересен вопрос о возможности продолжения частичной операции до полной с сохранением тех или иных свойств (например, ассоциативности).

Слабая ассоциативность означает, что для элементов a, b,c выполняется равенство $(ab)c = a(bc)$, если оба произведения $(ab)c$, $a(bc)$ существуют. *Сильная ассоциативность* — для любых элементов a, b, c либо выполняется равенство $(ab)c = a(bc)$, либо оба произведения $(ab)c$ и $a(bc)$ не существуют.

Мы будем рассматривать сильную ассоциативность, а множество, на котором частичная операция ассоциативна в сильном смысле, называть *частичной полугруппой.*

Отношения Грина на полугруппе S определяются формулами [3]:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1,\ a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b,\ a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1,$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L},\ \mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}.$$

Мы рассматриваем конечные полугруппы, для которых $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Далее, в коммутативных полугруппах $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Атомарный J-класс — минимальный J-класс отличный от нуля.

Пример 1. Рассмотрим полугруппу остатков $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.

При простом n операция на полугруппе полная, поэтому будем рассматривать полугруппы, для которых n составное.

С помощью компьютера проверено, что если у полугрупп $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ при $n \leqslant 100$ есть одноэлементный атомарный J-класс или в точности один атомарный J-класс, то операция может быть продолжена до полной.

Выясним, когда у полугруппы $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ существует атомарный одноэлементный J-класс и когда существует только один J-класс.

Рассмотрим полугруппу $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ при $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где все p_i — простые и $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Тогда у нее будет n атомарных J-классов, следующего вида:

$$\begin{gathered}\{p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}, 2 \cdot p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}\},\\ \{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}, 2 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}, \ldots, (p_2 - 1) \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}\},\\ \ldots\\ \{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n-1}, 2 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n-1}, \ldots, (p_n - 1) \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n-1}\}.\end{gathered}$$

Нетрудно увидеть, что если $p_1 = 2$, то один из атомарных J-классов — одноэлементный, а при $n = 1$ полугруппа примет вид $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}, \cdot)$ и содержит один атомарный J-класс.

Из найденных закономерностей можно вывести теорему, которая справедлива и для некоммутативных частичных полугрупп.

Теорема 1. *Пусть S — частичная полугруппа, S^0 — полугруппа, продолженная добавлением нулевого элемента. Если в решётке $\mathcal{J}$-классов полугруппы S^0 содержится атомарный одноэлементный J-класс, то полугруппа S продолжается без добавления элемента.*

Литература

[1] *Розен В.В.* Частичные операции в упорядоченных множествах / Изд. Саратовского университета. Саратов, 1973.

[2] *Ляпин Е.С., Евсеев А.Е.* Частичные алгебраические действия / РГПУ им Герцена. Изд. «Образование». Санкт-Петербург, 1991.

[3] *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения / М.: Мир, 1985.

Определяемость некоторых классов групп без кручения полугруппами эндоморфизмов и группами гомоморфизмов

Пушкова Т.А. (Нижний Новгород)

Хорошо известный результат Бэра [1] и Капланского [2] об определяемости периодических абелевых групп своим кольцом эндоморфизмов в классе периодических групп положил начало многочисленным исследованиям в этом направлении. Класс X абелевых групп называется *E-классом*, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизма $\mathrm{E}(A) \cong \mathrm{E}(B)$ следует изоморфизм $A \cong B$. Такой же вопрос, как для колец эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ группы A, стоит для его мультипликативной полугруппы $\mathrm{E}^{\bullet}(A)$, называемой полугруппой эндоморфизмов группы A. Проблему определяемости абелевых групп их мультипликативными полугруппами рассматривали П. Пуусемп [3] и А.М. Себельдин [4]. В связи с вышесказанным представляется естественным изучать вопросы определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов вместе с дополнительным условием изоморфизма групп гомоморфизмов.

Пусть C — абелева группа. Класс X абелевых групп назовем *${}_CE^{\bullet}H$-классом*, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизмов $\mathrm{E}^{\bullet}(A) \cong \mathrm{E}^{\bullet}(B)$ и $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$ следует изоморфизм $A \cong B$.

В данной работе описаны необходимые и достаточные условия на вполне разложимую абелеву группу C без кручения, чтобы заданный класс абелевых групп без кручения был ${}_CE^{\bullet}H$-классом.

Введём следующие обозначения: Ω — множество всех различных типов абелевых групп без кручения ранга 1; $\tau(A)$ — тип абелевой группы A без кручения ранга 1; $\tau(Q^{(p)})$ — тип из Ω, содержащий характеристику $(0, 0, ..., 0, \infty, 0, ...)$, в которой символ ∞ стоит на m-ом месте, если $p_m = p$; $\Omega(A)$ — множество различных типов прямых слагаемых ранга 1 абелевой группы A без кручения; Ω_0 — множество всех типов из Ω, характеристики которых не содержат символов ∞; $\Omega_0(A)$ — множество всех типов из $\Omega(A)$, характеристики которых не содержат символов ∞; $\aleph_0$ — наименьший бесконечный кардинал; $|M|$ — мощность множества M.

Множество Ω разбивается следующим образом: $\Omega = \overline{\Omega} \cup \Omega^*$, $\overline{\Omega} \cap \Omega^* = \varnothing$, где Ω^* — множество всех типов почти делимых групп без кручения ранга 1. Аналогично, любую вполне разложимую абелеву группу без кручения A можно представить в виде $A = \overline{A} \oplus A^*$, где $\overline{A}$ не содержит почти делимых групп ранга 1.

Теорема 1. *Пусть* $C = \bigoplus_{\tau\in\Omega(C)} \bigoplus_{k\in K(\tau)} C_k$ *— вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс* F_{cd}^{fr} *вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга является* ${}_CE^{\bullet}H$*-классом тогда и только тогда, когда группа* C *удовлетворяет условию:*

- *для любого типа* $\tau \in \overline{\Omega}$, $\tau \neq \tau(Z)$, *найдется тип* $\tau^* \in \Omega(\overline{C})$ *такой, что* $\tau^* \leqslant \tau$ *и* $|K(\tau^*)| < \aleph_0$.

Теорема 2. *Пусть* C *— вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс* F_{cd}^{ad} *вполне разложимых почти делимых абелевых групп без кручения является* ${}_CE^{\bullet}H$*-классом тогда и только тогда, когда группа* C *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\Omega_0(C) \neq \varnothing$;

2) *если* $\Omega_0(C) = \varnothing$, *то для любого почти делимого типа* τ *найдется тип* $\tau^* \in \Omega(C)$ *такой, что* $\tau^* \leqslant \tau$.

Положим $P^* = \{p \in P \mid \tau(Q^{(p)}) \notin \Omega(C)\}$.

Теорема 3. *Пусть* C *— вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс* F_1 *абелевых групп без кручения ранга* 1 *является* ${}_CE^{\bullet}H$*-классом тогда и только тогда, когда группа* C *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) C *содержит прямое слагаемое, изоморфное* Z;

2) а) $\tau(Z) \notin \Omega(C)$;
   б) $|P^*| \leqslant 1$ *и для любого типа* $\tau \in \Omega_0$, $\tau \neq \tau(Z)$, *найдется тип* $\tau^* \in \Omega(C)$ *такой, что* $\tau^* \leqslant \tau$.

Литература

[1] *Baer R.* Automorphism rings of primary Abelian operator groups // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 192–227.

[2] *Kaplansky I.* Some results on Abelian groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1952. V. 38. P. 538–540.

[3] *Пуусемп П.* Об определяемости периодических абелевых групп своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп // Изв. АН Эст ССР, Физ. Мат. 1980. Т. 29, № 3. С. 246–253.

[4] *Себельдин А.М.* Определяемость векторных групп полугруппами эндоморфизмов // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 4. С. 422–428.

О группоидах, у которых каждое атомарное отношение эквивалентности является односторонней конгруэнцией

Решетников А.В. (Москва)

Пусть G — группоид. Отношение эквивалентности σ на G называется *правой конгруэнцией*, если $(a,b) \in \sigma$ влечёт $(ac,bc) \in \sigma$ для всех $a,b,c \in G$. Аналогичным образом определяется левая конгруэнция. Для любых различных элементов $a,b \in G$ определим отношение эквивалентности

$$\rho_{a,b} = \Delta \cup \{(a,b),(b,a)\},$$

где $\Delta = \{(a,a) \mid a \in G\}$ — отношение равенства на G. Отношения $\rho_{a,b}$ являются атомами решётки отношений эквивалентности на G.

В 2010 году была доказана следующая теорема:

Теорема [1, теорема 4.24]. *Пусть G — группоид такой, что $|G| \geqslant 5$. Если любое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$, где a,b,c,d — различные элементы из G, является правой или левой конгруэнцией, то либо все отношения эквивалентности на G являются правыми конгруэнциями, либо все они — левые конгруэнции.*

Теорема позволяет исчерпывающим образом охарактеризовать группоиды, содержащие 5 или более элементов, у которых каждое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$ является правой или левой конгруэнцией.

Группоиды, у которых каждое атомарное отношение $\rho_{a,b}$ является правой или левой конгруэнцией, образуют более широкий класс. Их полное описание на данный момент неизвестно. Отметим некоторые их свойства. Для $a \in G$ пусть $\sigma_a = \Delta \cup ((G\backslash\{a\}) \times (G\backslash\{a\}))$.

Следующее утверждение интересно само по себе и позволяет существенно упростить доказательство теоремы 4.24 из [1]:

Предложение. *Пусть для любых различных элементов a,b группоида G отношение эквивалентности $\rho_{a,b}$ является правой или левой конгруэнцией. Тогда для любого $i \in G$ отношение эквивалентности σ_i является правой или левой конгруэнцией.*

Литература

[1] *Кожухов И.Б., Решетников А.В.* Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16, № 3. С. 161–192.

Определяемость компактов решеткой подалгебр полуполей непрерывных положительных функций

Сидоров В.В. (Киров)

Пусть X — топологическое пространство, $\mathbb{P}$ — множество положительных действительных чисел, $U(X)$ — полуполе непрерывных функций из X в $\mathbb{P}$ с поточечными операциями сложения и умножения. Непустое множество $A \subseteq U(X)$ будем называть *подалгеброй*, если $A \cdot A \subseteq A$, $A + A \subseteq A$ и $\mathbb{P} \cdot A \subseteq A$.

Множество всех подалгебр полуполя $U(X)$ с добавленным пустым множеством относительно отношения включения образует решетку $\mathbb{A}(U(X))$ всех подалгебр полуполя $U(X)$.

В 1997 г. Е.М. Вечтомов [1] доказал, что для произвольных компактов X и Y изоморфность решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ подалгебр колец $C(X)$ и $C(Y)$ непрерывных действительнозначных функций равносильна гомеоморфности X и Y. В связи с развитием теории полуполей непрерывных функций возникла

Гипотеза. *Для произвольных компактов X и Y решетки $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y гомеоморфны.*

Доклад посвящен современному состоянию данной проблемы.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/К.

Литература

[1] *Вечтомов Е.М.* Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Матем. заметки. 1997. Т. 62, Вып. 5. С. 687–693.

Условия регулярности полугруппы многозначных изотонных преобразований

Творогов А.В. (Москва)

В работе [1] А.Я. Айзенштат получила описание частично упорядоченных множеств X, у которых полугруппа изотонных преобразований $T_{\leqq}(X)$

(т.е. преобразований, сохраняющих порядок) регулярна. В работе [4] были описаны упорядоченные и квазиупорядоченные множества X с регулярной полугруппой частичных изотонных преобразований $PT_{\leqq}(X)$. В [3] В.И. Ким, И.Б. Кожухов и В.А. Ярошевич описали строение квазиупорядоченных множеств X, у которых полугруппа изотонных преобразований слабо регулярна.

Пусть $B(X)$ — полугруппа всех бинарных отношений на множестве X. Её можно рассматривать как полугруппу многозначных отображений. Понятие изотонности может быть перенесено на такие отображения разными не эквивалентными способами. Будем говорить, что бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ *согласуется* с бинарным отношением σ, если

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma.$$

Обозначим множество бинарных отношений, согласующихся с отношением σ, через $B_\sigma(X)$. Далее, говорим, что элемент $\alpha \in B(X)$ *сохраняет* σ *в широком смысле*, если

$$\forall x, y \in X \ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (\exists u \in x\alpha \ \exists v \in y\alpha : (u, v) \in \sigma).$$

Пусть $B'_\sigma(X)$ — множество бинарных отношений, сохраняющих σ в широком смысле. Говорим, что элемент $\alpha \in B(X)$ *сохраняет* σ *в узком смысле*, если

$$\forall x, y \in X \ \forall u, v \in X \ (u \in x\alpha \ \& \ v \in y\alpha \ \& \ (x, y) \in \sigma) \Rightarrow (u, v) \in \sigma,$$

и обозначаем множество бинарных отношений, сохраняющих σ в узком смысле, через $B''_\sigma(X)$. Нетрудно установить, что множества $B_\sigma(X)$, $B'_\sigma(X)$, $B''_\sigma(X)$ являются полугруппами относительно операции умножения бинарных отношений.

Теорема 1. (i) *Если* σ *— отношение линейного порядка на множестве* X*, то полугруппа* $B_\sigma(X)$ *не является регулярной при* $|X| \geqslant 2$;

(ii) *если* σ *— отношение эквивалентности на* X*, то полугруппа* $B_\sigma(X)$ *не регулярна при* $|X| \geqslant 3$.

Теорема 2. *Пусть* σ *— произвольное бинарное отношение на множестве* X*. Тогда полугруппа* $B'_\sigma(X)$ *регулярна в том и только том случае, когда* $|X| \leqslant 2$.

В работе [4] В.А. Ярошевич показал, что в случае, если X — частично упорядоченное множество, полугруппа $PT_{\leq}(X)$ регулярна в том и только том случае, когда X — антицепь или цепь. На основе этих результатов могут быть найдены условия регулярности полугруппы $B''_\sigma(X)$.

Теорема 3. *Пусть* σ *— отношение эквивалентности на множестве* X *и* $|X| \geqslant 3$. *Полугруппа* $B''_\sigma(X)$ *регулярна в том и только том случае, когда* σ *— отношение равенства.*

Литература

[1] *Айзенштат А.Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Уч. зап. ленинградского гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.

[2] *Ким В.И., Кожухов И.Б.* Условия регулярности полугруппы изотонных преобразований счетных цепей // Фунд. и прикл. матем. 2006. Т. 12, № 8. С. 97–104.

[3] *Ким В.И., Кожухов И.Б., Ярошевич В.А.* Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, № 4. С. 145–165.

[4] *Ярошевич В.А.* Отображения, согласующиеся с бинарными отношениями // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Киров. 2009. Вып. 11. С. 135–142.

Л.Я. Куликов и реформа математического образования в педвузах

Тестов В.А. (Вологда)

Работая заведующим кафедрой алгебры в МГПИ, Л.Я. Куликов не только возглавлял научную школу по абелевым группам, но и руководил реформой математического образования в педвузах СССР. В 1971 году он был назначен председателем Научно-методического совета по математике при ГУВУЗе Министерства Просвещения СССР и возглавил работу по созданию новых учебных планов и новых программ для математических и физико-математических факультетов педагогических институтов СССР.

Необходимость реформы математического образования в педвузах диктовалась необходимостью обновления содержания математического образования, такой подготовки будущих учителей математики, которая обеспечила бы успешное проведение ими в жизнь реформы школьного курса математики, которая проводилась в те годы и получила название колмогоровской.

Про эту реформу сейчас пишут в основном в критическом плане, все грехи сваливая на личности (Н. Бурбаки, А.Н. Колмогорова и др.), Говоря про эту реформу, необходимо отметить, что к середине 20-го столетия образовался существенный разрыв между математикой – наукой и математикой – учебным предметом, который было необходимо сократить. Таким образом, реформа математического образования стала к этому времени насущной необходимостью. Основные идеи реформы высказывались рядом крупных математиков еще задолго до Н. Бурбаки, и поэтому нельзя считать, что Н. Бурбаки, а тем более А.Н. Колмогоров, «повинен» в этой реформе.

Теоретико-множественная основа математики была разработана еще Кантором и Дедекиндом. Ряд идей о реформе математического образования был высказан Ф. Клейном в Эрлангенской (1872 г.), а затем в Меранской программе (1906 г.), в частности, им на первое место были выдвинуты понятие группы и идея преобразований, высказана необходимость включения в школьную математику начал анализа. Решающее значение для широкого внедрения в вузовскую и школьную математику аксиоматического метода имели исследования Давида Гильберта по основаниям геометрии. В России вопрос о реформе математического образования, о повышении его научного уровня, о необходимости включения в школьную программу идей аналитической геометрии и анализа настойчиво ставился на первом и втором Всероссийских съездах преподавателей математики (1912 и 1915 гг.). Вопросы пересмотра содержания математического образования ставил в 1935 г. и академик П.С. Александров. Он выступал за внедрение в школьную математику теоретико-множественного метода и ряда идей абстрактной алгебры, в частности, понятия группы, утверждая, что «на простом и элементарном материале можно учить большим математическим идеям».

Идея математических структур, нашедшая свое отражение (и оказавшаяся весьма плодотворной) в многотомном трактате Н. Бурбаки, а также соответствие между математическими структурами и структурами человеческого мышления, обнаруженное школой швейцарского психолога Ж. Пиаже, послужили побудительными мотивами к радикальной реформе математического образования в 60–70-х годах в школах и в вузах как за рубежом, так и в нашей стране. Идеи Н. Бурбаки явились в силу своей общности как чрезвычайно абстрактными, так и чрезвычайно простыми. Общность и простота этих идей и побудила многих сторонников радикальной реформы математического образования к введению их в учебный предмет «математика».

Хотя при проведении реформы в нашей стране не было допущено крайностей, характерных для ряда зарубежных стран, однако вскрылись и серьезные недостатки: повышенная степень абстракции, которая проявлялась в том, что зачастую математические структуры преподносились школьникам сразу в абстрактном виде без учета уровней их мышления, чрезмерный объем и неоправданная сложность изложения программного материала, отсутствие опоры при введении ряда понятий на наглядность и интуицию и т.д. Все это и послужило поводом для контрреформации, в ходе которой ряд несомненных достижений оказался утерянным.

Вслед за реформой школьного образования началась реформа математического образования в педвузах. Были перестроены учебные планы и программы специальности «математика» для всех основных математических курсов (алгебры, геометрии, математического анализа). Необходимые для изучения этих курсов начальные сведения из теории множеств и математической логики открывали курс алгебры и теории чисел. В новых программах различные разделы математики стали звеньями единого организма. В их основу был положен аксиоматический метод, теория множеств и понятие математической структуры. По уровню абстракции и формализации эти программы, особенно в начальной стадии обучения, превосходили программы математических специальностей университетов, куда модернистские тенденции проникли в гораздо меньшей степени. Это привело к значительному усложнению основных математических дисциплин.

Под руководством Л.Я. Куликова и при его непосредственном участии была создана программа по курсу алгебры и теории чисел, в соответствии с которой Леонид Яковлевич написал прекрасный учебник, до сих пор являющийся основным учебным пособием по алгебре и теории чисел для студентов пединститутов. Леонид Яковлевич очень ответственно относился к этой своей деятельности. При написании учебника он находил более краткие и оригинальные доказательства теорем курса, менял структуру изложения материала. Основной идеей его курса было объединение ранее разрозненных курсов алгебры и теории чисел. Это позволило доказательства многих теорем сделать более короткими и ясными.

Сейчас звучит критика этих программ и учебников за излишний уклон в сторону абстракции и формализма, отсутствие в них промежуточного, переходного уровня для студентов первого курса. Надо учитывать, что в середине 70-х годов многие математики были увлечены идеями реформы, в то время царил дух высокой степени абстракции и формализма. Поэтому некоторый перекос в этом направлении Л.Я. Куликовым был сделан под влиянием этих обстоятельств и мнений рецензентов.

Принципиальное значение в новых учебных планах для подготовки учителя математики имел новый курс «Научные основы школьного курса математики», программа которого была разработана А.Н. Колмогоровым. Этот курс был призван занять промежуточное положение между теоретическими общематематическими курсами и курсом методики математики. Изучение этого курса должно было обеспечить знакомство студентов с тем, по каким мотивам и какие разделы математической науки входят в программу школы, что в школьных учебниках остается изложенным без полного обоснования и как эти пробелы могут быть восполнены.

При составлении новых учебных планов и программ для педвузов не все удалось предусмотреть. Так, не в полной мере была обеспечена их профессиональная направленность на подготовку учителя. Курс «Научные основы…», во многом призванный обеспечить такую направленность, недолго продержался в учебном плане. Предполагалось, что вопросы школьного курса математики будут освещены в основных математических курсах. Однако из-за большой насыщенности программ теоретическим материалом сделать это в большинстве случаев не удалось.

Внедрение новых учебных планов и программ, созданных под руководством Л.Я. Куликова, имело большое положительное значение. Содержание всех математических курсов было существенно обновлено и приближено к современной математике, что позволило обеспечить возможность подготовки квалифицированного учителя, разбирающегося в наиболее важных направлениях современной математики.

Группа Гротендика K_0 произвольного csp-кольца

Тимошенко Е.А. (Томск)

Через $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначаем соответственно кольцо целых чисел и множество натуральных чисел.

Пусть L есть бесконечное множество простых чисел, и пусть для каждого $p \in L$ выбрано кольцо R_p, совпадающее либо с некоторым кольцом вычетов $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (для различных p число $k > 0$ может быть разным), либо с кольцом целых p-адических чисел. Кольцо K и его идеал T зададим равенствами

$$K = \prod_{p \in L} R_p, \qquad T = \bigoplus_{p \in L} R_p.$$

Назовём csp-*кольцом* всякое подкольцо R кольца K такое, что $T \subset R$ и R/T является полем.

Можно естественным образом отождествить кольцо R_p и его единичный элемент e_p с соответствующими идеалом и идемпотентом кольца R, в этом случае $R_p = Re_p$. Кольцо R_p допускает единственную модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом R; поэтому можно рассматривать все R_p как R-модули. Для конечного множества $X \subset L$ через e_X обозначим идемпотент кольца R, который равен сумме элементов e_p по всем $p \in X$.

Пусть R есть csp-кольцо. Для всякого R-модуля M через $r(M)$ обозначим размерность модуля M/MT как (R/T)-пространства. В статье [2] доказано, что модуль M_R проективен тогда и только тогда, когда

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I}(1 - e_{X_i})R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in L} F_p\Big), \qquad (*)$$

где F_p — свободные R_p-модули и X_i суть конечные подмножества из L.

Если для R-модуля M выполняется $(*)$, то для всякого $p \in L$ модуль Me_p будет свободным R_p-модулем. Ранг этого свободного модуля (определяемый однозначно) обозначим через $r_p(M)$. Итак, всякому проективному модулю M мы сопоставили кардинальные числа $r(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in L}$. Полученный набор кардиналов будем называть *системой инвариантов* проективного R-модуля (в статье [3] впервые предложено использовать эту систему инвариантов для описания проективных модулей). В работах [1, 2] доказаны две теоремы:

Теорема 1. *Два проективных модуля над кольцом R изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые системы инвариантов.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in L}$ — кардиналы и $Y = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}$. Проективный R-модуль M, одновременно удовлетворяющий всем условиям $r(M) = \mathfrak{M}$ и $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$, существует в том и только в том случае, когда либо множество Y конечно, либо выполнены следующие три условия:*

1) *Y — бесконечное множество;*
2) *$\{\mathfrak{M}_p \mid p \in Y\} = \{\mathfrak{N}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где*

$$\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 < \ldots < \mathfrak{N}_n < \ldots \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M};$$

3) *для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{p \in L \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ конечно.*

Из этих теорем может быть выведена

Теорема 3. *Проективный модуль M_R конечно порождён в том и только в том случае, когда все его инварианты конечны и $r_p(M) = r(M)$ почти для всех $p \in L$.*

Через Υ обозначим множество всех функций $f\colon L \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $f(p)$ равно одному и тому же неотрицательному числу при почти всех $p \in L$. Очевидно, что Υ является коммутативным моноидом относительно операции поточечного сложения. С помощью теорем 1–3 можно доказать, что Υ есть моноид классов изоморфных конечно порождённых проективных R-модулей (модулю M_R соответствует функция f_M, где $f_M(p) = r_p(M)$ для всех $p \in L$).

Напомним, что группа Гротендика моноида классов изоморфных конечно порождённых проективных R-модулей обозначается через $K_0(R)$. С учётом строения моноида Υ получаем следующий результат:

Теорема 4. *Для всякого* csp*-кольца R выполнено $K_0(R) \cong \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}$.*

Литература

[1] *Тимошенко Е.А.* Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журнал СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 4. С. 541–550.

[2] *Тимошенко Е.А.* Проективные модули над csp-кольцами // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 4. С. 581–585.

[3] *Царёв А.В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 3. С. 437–448.

Идемпотентные абелевы группы

Тисовский А.Г. (Москва)

Абелеву группу A будем называть *идемпотентной*, если для любого элемента $a \in A$ существует умножение $\mu_a \in \operatorname{Mult} A$, такое что $\mu_a(a, a) = a$.

Нетрудно видеть, что аддитивная группа любого тела является идемпотентной группой, а значит, любая делимая группа без кручения и любая элементарная p-примарная группа является идемпотентной.

Для идемпотентных групп выполняются следующие свойства.

- *Прямая сумма и прямое произведение идемпотентных групп является идемпотентной группой.*

- *Если B — вполне характеристическая подгруппа идемпотентной группы A, то B — идемпотентная группа.*
- *Если B — вполне характеристическая подгруппа идемпотентной группы A, то A/B — идемпотентная группа.*

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть A — идемпотентная группа, тогда*

1. *Делимая часть группы A является группой без кручения, а p-примарная часть — элементарной группой;*
2. *Если A — периодическая группа, то она раскладывается в прямую сумму p-элементарных групп;*
3. *Если A — группа без p-кручения, то A — p-делимая группа, в частности, если A — группа без кручения, то A — делимая группа.*

Определение. *sp-группой* называется редуцированная смешанная группа A с бесконечным числом ненулевых p-примарных компонент, такая что естественное вложение $\bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A) \to A$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_{p\in P} t_p(A)$.

Теорема 2. *Если A — смешанная редуцированная идемпотентная группа, то A — sp-группа, все p-компоненты которой элементарные.*

О инвариантах разрешимых групп с фиттинговыми силовскими подгруппами нормального ранга $\leqslant 2$

Трофимук А.А. (Брест, Беларусь)

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1–2]. Напомним, что *нормальный ранг* $r_n(P)$ p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} log_p|X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P. Здесь $\Phi(X)$ — подгруппа Фраттини группы X.

В.С. Монаховым в [3] было установлено, что нильпотентная длина разрешимой группы с силовскими подгруппами нормального ранга $\leqslant 2$ не превышает 4.

А.А. Трофимук в работе [4] заметил, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга не превышает 2. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа и $r_n(P) \leqslant 2$ для любой силовской подгруппы P подгруппы $F(G)$. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина группы G по подгруппе Фраттини не превышает 5. Здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.*

Литература

[1] *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[2] *Huppert B.* Endliche Gruppen I / Berlin–Heidelberg–NY: Springer, 1967.

[3] *Монахов В.С.* О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2002. Т. 46, № 2. С. 25–28.

[4] *Трофимук А.А.* Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 287–293.

Поля расщепления абелевых групп без кручения и поля разложения алгебр квазиэндоморфизмов

Фарукшин В.Х. (Москва)

Рассматривается категория p-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга. *Алгеброй квазиэндоморфизмов* группы называется минимальная рациональная алгебра, содержащая кольцо ее эндоморфизмов [1]. Для p-локальной группы A поле K называется *полем расщепления*, если $A \otimes R$ является прямой суммой делимого и свободного R-модулей, где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел [2].

Теорема 1. *Всякое строго максимальное подполе некоммутативной рациональной алгебры квазиэндоморфизмов p-локальной сильно неразложимой группы без кручения конечного ранга является ее полем расщепления.*

Теорема 2. *Всякое поле расщепления p-локальной сильно неразложимой группы без кручения конечного ранга с некоммутативной рациональной алгеброй квазиэндоморфизмов содержит поле разложения данной алгебры квазиэндоморфизмов.*

Литература

[1] *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры / М.: Мир, 1986.

[2] *Lady E.L.* Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, I // Journal of Algebra. 1977. V. 49(1). P. 261–275.

Допустимые почти вполне разложимые группы

Фомин А.А. (Москва)

Пусть $\chi = (m_p)$ — некоторая характеристика. Обозначим через R_χ подгруппу аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ такую, что $\mathbb{Z} \subseteq R_\chi \subseteq \mathbb{Q}$ и 1 имеет характеристику χ в группе R_χ.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_p K_p$, где K_p — либо кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p < \infty$, либо кольцо целых p-адических чисел при $m_p = \infty$. Сервантная оболочка единицы этого кольца $\langle 1 \rangle_*$ является факторно делимой группой ранга 1, если χ — характеристика ненулевого типа, и обозначается R^χ. Если же χ — характеристика нулевого типа, то $R^\chi = \mathbb{Z}_\chi \oplus \mathbb{Q}$ также является факторно делимой группой ранга 1. В обоих случаях R^χ является кольцом с единицей, которая служит базисом факторно делимой группы R^χ. Группа без кручения R_χ с единицей в качестве базиса и факторно делимая группа R^χ с ее единицей в качестве базиса являются взаимно двойственными в смысле двойственности [1].

В аддитивной группе векторного пространства V над полем $\mathbb{Q}$ с базисом $x_1, \ldots, x_n$ рассмотрим подгруппу $B = x_1 R_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus x_n R_{\chi_n}$, где $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ — некоторый набор характеристик. Группа B является вполне разложимой группой без кручения с базисом $x_1, \ldots, x_n$. Двойственная ей факторно делимая группа $B^* = x_1^* R^{\chi_1} \oplus \ldots \oplus x_n^* R^{\chi_n}$ является прямой суммой факторно делимых групп ранга 1. Базис $x_1^*, \ldots, x_n^*$ факторно делимой группы B^* является двойственным базису $x_1, \ldots, x_n$ группы без кручения B.

Целью данной заметки является описание так называемых «допустимых» почти вполне разложимых групп A относительно фиксированной последовательности характеристик $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ при помощи последовательностей периодических элементов. Все эти группы имеют общий базис $x_1, \ldots, x_n$, $B \subseteq A$ и факторгруппа A/B является конечной группой.

Определение 1. Элемент t некоторой группы называется *допустимым относительно характеристики* $\chi = (m_p)$, если его порядок конечен и $m_p = 0$ для любого простого делителя p порядка элемента t.

Предложение 1. *Группа $R^\chi \oplus \langle t \rangle$ является факторно делимой тогда и только тогда, когда t — допустимый элемент относительно характеристики χ. Более того, если группа $R^\chi \oplus \langle t \rangle$ факторно делимая, то элемент $1 + t \in R^\chi \oplus \langle t \rangle$ является базисом факторно делимой группы $R^\chi \oplus \langle t \rangle$.*

Определение 2. Последовательность $T = (t_1, \ldots, t_n)$ — периодических элементов группы $G_T = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ называется *допустимой относительно последовательности характеристик* $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$, если для всякого i элемент t_i является допустимым относительно характеристики χ_i.

Теорема 2. *Пусть $B = x_1 R_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus x_n R_{\chi_n}$ и $B^* = x_1^* R^{\chi_1} \oplus \ldots \oplus x_n^* R^{\chi_n}$ — взаимно двойственные группы, как это было определено выше. Следующие утверждения имеют место для любой допустимой последовательности периодических элементов $T = (t_1, \ldots, t_n)$ относительно последовательности характеристик $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$:*

1. *Группа $B^* \oplus G_T$ является факторно делимой и раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Множество элементов $x_1^* + t_1, \ldots, x_n^* + t_n$ составляет базис факторно делимой группы $B^* \oplus G_T$.*

2. *Группа без кручения A_T, двойственная факторно делимой группе $B^* \oplus G_T$ относительно базиса $x_1^* + t_1, \ldots, x_n^* + t_n$, является почти вполне разложимой группой с двойственным базисом $x_1, \ldots, x_n$. При этом, $B \subseteq A_T$ и $A_T/B \cong G_T$. Таким образом, всякая допустимая последовательность T определяет допустимую почти вполне разложимую группу A_T.*

3. *Пусть A_S — допустимая почти вполне разложимая группа, которая соответствует другой допустимой последовательности периодических элементов $S = (s_1, \ldots, s_n)$ относительно той же последовательности характеристик $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$. Включение $A_T \subseteq A_S$ имеет место тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\eta\colon G_S \to G_T$, при котором $\eta(s_1) = t_1, \ldots, \eta(s_n) = t_n$.*

Замечание. Нетрудно заметить, что для любой почти вполне разложимой группы можно подобрать последовательность характеристик так, что данная группа является допустимой относительно этой последовательности характеристик. Таким образом, данный подход является универсальным для изучения почти вполне разложимых групп. Он был применен в [2] для анализа известных групп А.Л.С. Корнера [3] с аномальными прямыми разложениями.

Литература

[1] *Fomin A.A.* Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra. 2009. V. 322, No. 7. P. 2544–2565.

[2] *Fomin A.A.* Quotient divisible and almost completely decomposable groups, in: Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A.L.S. Corner. 2008. de Gruyter. Berlin–NY. P. 147–168.

[3] *Corner A.L.S.* A note on rank and direct decomposition of torsion-free abelian groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1969. V. 57. P. 230–233; V. 66. P. 239–240.

Решётки конгруэнций полигонов над полугруппами правых и левых нулей

Халиуллина А.Р. (Москва)

Полигон над полугруппой S (см. [1]) — это множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. выполнено условие $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Копроизведение $\coprod_{i\in I} X_i$ семейства полигонов $\{X_i \mid i \in I\}$ над полугруппой S — дизъюнктное объединение этих полигонов. Решётку конгруэнций полигона X будем обозначать $\operatorname{Con} X$.

Теорема 1. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S и $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. Решётка $\operatorname{Con} X$ модулярна в том и только том случае, если $|Y| \leqslant 3$, $|A| \leqslant 2$ и $aS \cap bS \neq \varnothing$ при $a, b \in A$ и $a \neq b$.*

Теорема 2. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S. Тогда решётка $\operatorname{Con} X$ дистрибутивна в том и только том случае, если либо $|X| \leqslant 2$, либо $X \cong \{a, 1, 2\}$, где $aS \subseteq \{1, 2\}$.*

Пусть теперь X — полигон над полугруппой правых нулей S. Тогда $xs = ys \;\; \Leftrightarrow \;\; xt = yt$ при любых $x, y \in X$, $s, t \in S$, поэтому отношение эквивалентности $\sigma(s) = \{(x, y) | xs = ys\}$ не зависит от s. Пусть X_i $(i \in I)$ —

классы этого отношения. Нетрудно проверить, что X_i — копрямо неразложимые подполигоны и $|X_i s| = 1$ при любом $s \in S$. Пусть $X_i s = \{y_{is}\}$. Обозначим через Γ_{ij} двудольный граф, у которого множество вершин есть $X_i \cup X_j$, а рёбрами являются пары (y_{is}, y_{js}), где $s \in S$.

Теорема 3. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S и $Y_i = X_i \cap XS$ при $i \in I$. Решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\, X$ модулярна в том и только том случае, если выполнены условия:*
(i) $|I| \leqslant 3$;
(ii) $|X_i| \leqslant 3$ для любого $i \in I$;
(iii) если $X_i \neq Y_i$ при некотором i, то $X_j = Y_j$ при всех $j \neq i$;
(iv) для любых $i \neq j$ граф Γ_{ij} связен.

Теорема 4. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S. Решётка $\mathrm{Con}\, X$ дистрибутивна в том и только том случае, если выполнены условия:*
(i) $|I| \leqslant 2$;
(ii) $|X_i| \leqslant 2$ для каждого $i \in I$;
(iii) если $X = X_1 \coprod X_2$, то либо $Y_1 = X_1$, либо $Y_2 = X_2$;
(iv) граф Γ_{12} связен.

Литература

[1] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and cathegories / W. de Gruyter, NY–Berlin, 2000.

О p-разрешимости конечной группы с заданными индексами некоторых максимальных подгрупп

Ходанович Д.А. (Гомель, Беларусь)

Рассматриваются только конечные группы.

Пусть p — простое число. Группа называется *p-замкнутой*, если ее силовская p-подгруппа нормальна, и *p-нильпотентной*, если в группе имеется нормальное дополнение к силовской p-подгруппе. Через $O_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p-подгруппа группы G. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Из теоремы Фробениуса о нормальных дополнениях к силовским подгруппам вытекает, что группа, в которой все собственные подгруппы p-нильпотентны либо сама p-нильпотентна, либо является p-замкнутой группой Шмидта ([1], теорема IV.5.4).

В 1954 году Б. Хупперт установил сверхразрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп простые числа [2]. В этой же работе он поставил вопрос о разрешимости группы, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел. Положительный ответ на этот вопрос получил Ф. Холл ([1], теорема VI.9.4). Детальное изучение конечных групп с такими индексами максимальных подгрупп осуществлено в работах [3–5].

Вполне естественно возникает задача изучения строения конечной группы, у которой максимальные подгруппы либо p-нильпотентны (в частности, нильпотентны), либо имеют своим индексом простое число или квадрат простого числа. В этом направлении нами доказана

Теорема. *Пусть p — наибольший простой делитель порядка конечной группы G и $p > 3$. Если в группе G индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа, то фактор-группа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна.*

Следствие 1. *Пусть p — наибольший простой делитель порядка конечной группы G. Если в группе G индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа, то группа G p-разрешима и $l_p(G) \leqslant 2$.*

Здесь $l_p(G)$ — p-длина группы G.

Следствие 2 ([6], теорема 4.1). *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, то группа G разрешима и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.*

Здесь $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ — классы всех нильпотентных и сверхразрешимых групп, $\mathfrak{N}_2$ — класс всех 2-групп, а $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ — их формационное произведение.

Следствие 3 ([7], теорема 1.2). *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, то группа G разрешима и либо группа G метабелева, либо G p-нильпотентна и q-замкнута для некоторых простых p и q.*

Пример. В теореме при $p = 3$ факторгруппа $G/O_p(G)$ может быть не 3-нильпотентной. Примером служит симметрическая группа S_4 степени 4.

Литература

[1] *Huppert B.* Endliche Gruppen I / Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

[2] *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr. 1954. V. 60. P. 409–434.

[3] *Каморников С.Ф.* К теореме Ф. Холла // Вопросы алгебры. 1990. Вып. 5. С. 45–52.

[4] *Монахов В.С., Грибовская Е.Е.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Матем. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 603–612.

[5] *Монахов В.С., Селькин М.В., Грибовская Е.Е.* О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 940–950.

[6] *Ходанович Д.А.* О p-разрешимости конечной группы с ограниченными индексами ненильпотентных максимальных подгрупп // Вестник ПГУ, серия С — «Фундаментальные науки». 2005, № 4. С. 18–22.

[7] *Lu J., Pang L., Zhong X.* Finite groups with non-nilpotent maximal subgroups // Monatsh. math. 2013. V. 171. P. 425–431.

T-кольца и их аддитивные группы

Царев А.В. (Москва)

Ассоциативное кольцо K с единицей называется *E-кольцом*, если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

1) отображение, ставящее в соответствие элементу $a \in K$ эндоморфизм левого умножения $\lambda_a \in \mathsf{E}(K^+)$, где $\lambda_a(x) = ax$, является изоморфизмом колец K и $\mathsf{E}(K^+)$;

2) K — коммутативное кольцо и $K \cong \mathsf{E}(K^+)$;

3) если $f \in \mathsf{E}(K^+)$ и $f(1) = 0$, то $f = 0$.

Аддитивные группы E-колец называются *E-группами*.

В 1977 году Р. Боушел и Ф. Шульц [1] рассмотрели и описали E-кольца специального вида, которые они назвали T-кольцами.

Определение 1. Ассоциативное кольцо с единицей K называется *T-кольцом*, если умножение

$$\mu\colon K \otimes_{\mathbb{Z}} K \to K,\ \ \mu(a \otimes b) = ab,$$

является изоморфизмом аддитивных групп.

Теорема 1 [1]. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *K — T-кольцо;*

2. *K — E-кольцо и $K \otimes K = K \otimes_K K$;*

3. *$K/t(K)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbb{Q}$ и если $t_p(K^+) \neq 0$, то $t_p(K^+)$ — циклическая группа и $K/t(K)$ делится на p.*

В связи с последней теоремой Ш. Фейгельсток в своей книге "Additive groups of rings" [2] поставил следующий

Вопрос [2, 4.7.30]. *Пусть группа A удовлетворяет условиям:*

1) *$r(A/t(A)) = 1$;*

2) *$A/t(A)$ имеет идемпотентный тип;*

3) *$t_p(A)$ — циклическая группа при любом p;*

4) *если $t_p(A) \neq 0$, то $A/t_p(A)$ — p-делимая группа.*

Верно ли, что тогда A является аддитивной группой T-кольца?

Условия из вопроса Фейгельстока, конечно же, являются необходимыми для аддитивных групп T-колец, но не являются достаточными. Проиллюстрируем это с помощью следующей сравнительно простой конструкции. Пусть $\chi = (2, 2, \ldots)$ — характеристика, состоящая из одних двоек, и $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}$, где P — множество всех простых чисел. Обозначим через ε_p единицу кольца $\mathbb{Z}_{p^2}$ и рассмотрим в $\mathbb{Z}_\chi$ подгруппу A, сервантно порожденную элементом $\alpha = (p\varepsilon_p)_{p \in P}$,

$$A = \langle \alpha \rangle_* \subset \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}.$$

Нетрудно проверить, что группа A удовлетворяет всем условиям вопроса Фейгельстока, но при этом на группе A нельзя задать структуру кольца с 1, а значит, A не является аддитивной группой никакого T-кольца.

Отрицательное решение вопроса Фейгельстока не означает невозможности описания аддитивных групп T-колец на языке элементарных групповых терминов. Более того, такое описание было получено разными способами Дж. Уилсоном в 1987 г. [3] и автором в 2013 г. [4]. Дж. Уилсон дополнил условия Фейгельстока следующим образом.

Теорема 2 [3]. *Группа A является аддитивной группой T-кольца, тогда и только тогда, когда для нее выполняются следующие условия:*

1. *A удовлетворяет всем условиям из вопроса Фейгельстока;*
2. *В группе A существует элемент a, такой что при любой проекции $\pi_p\colon A \to t_p(A)$ элемент $\pi_p(a)$ порождает группу $t_p(A)$.*

Описание Уилсона интересно еще и тем, что его 2-е условия, по видимому, является первым примером использования так называемого *условия на проекции* (projection condition), которое с середины 1990-х гг. широко используется при работе со смешанными самомалыми группами. Кроме того, Дж. Уилсон заметил, что любая группа A, удовлетворяющая условиям из вопроса Фейгельстока, допускает структуру кольца $(A, \cdot)$, при которой отображение $\mu\colon A\otimes A \to A$, действующее по закону $\mu(a\otimes b) = ab$, является изоморфизмом. Дополнительное условие (условие 2 из теоремы 2) необходимо для того, чтобы гарантировать существования на группе A структуры кольца с единицей.

В статье [4] для характеризации аддитивных групп T-колец мы использовали факторно делимые группы.

Теорема 3 [4]. *Если K — бесконечное T-кольцо, то его аддитивная группа — факторно делимая группа ранга* 1. *Если A — факторно делимая группа ранга* 1*, то на ней существует умножение, превращающее группу A в T-кольцо.*

Литература

[1] *Bowshell R.A., Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. V. 228, No. 3. P. 197–214.

[2] *Feigelstock S.* Additive Groups of Rings / Pitman Rsearch Notes in Math. Pitman. London, 1983.

[3] *Wilson G.V.* Additive groups of T-rings // Proc. AMS. 1987. V. 99, No. 2. P. 219–220.

[4] *Царев А.В.* T-кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестник томского гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. №4(24). С. 50–53.

О кольцах квазиэндоморфизмов некоторых квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 4

Чередникова А.В. (Кострома)

В работе под словом «группа» подразумевается абелева группа без кручения конечного ранга, записанная аддитивно.

Напомним, что *псевдоцоколем* $Soc\,G$ группы G называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами. Группа называется *неприводимой*, если она не обладает собственными сервантными вполне характеристическими подгруппами. Другие используемые в работе понятия общеприняты и соответствуют монографии [1].

Через $\mathbb{Q}$ обозначим поле рациональных чисел, а через $IT(G)$ и $OT(G)$ — соответственно внутренний и внешний типы группы G. Для групп G и H запись $G \doteq H$ означает, что G квазиравна H.

Если группа R ранга 1 имеет тип τ, то будем писать $t(R) = \tau$. Пусть R_i и R_j — группы ранга 1 такие, что $t(R_i) = \tau_i$ и $t(R_j) = \tau_j$. Тогда запись $\tau_i \xi \tau_j$ означает, что тип τ_i несравним с типом τ_j.

В работе получено описание колец квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2 в случае, когда группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\otimes\mathrm{Hom}(A_i, B)$ и $\mathbb{Q}\otimes\mathrm{Hom}(B, A_i)$ для любого $i = 1, 2$ имеют ранг 1 или являются нулевыми. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существуют 34 алгебры и 3 бесконечных серии алгебр, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов таких групп. В частности, справедлива следующая

Теорема. *Пусть G — группа ранга 4, для которой имеет место квазиразложение*

$$G \doteq A_1 \oplus A_2 \oplus B,$$

где $t(A_1) = \tau_1$, $t(A_2) = \tau_2$, $IT(B) = \tau_3$, $OT(B) = \tau_4$. Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(A_i, B)$ и $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(B, A_i)$ $(i = 1, 2)$ имеют ранг 1. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов

$\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A_8^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \ \mathbf{A_8^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_9^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}, \ \mathbf{A_{10}^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_{10}^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом:

1) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_8^{(1)}} \Leftrightarrow$ *выполняются следующие условия:*
a) $\tau_1 \xi \tau_2, \tau_3 < \tau_1 < \tau_4, \tau_3 < \tau_2 < \tau_4$ и существуют однозначно определенные сервантные подгруппы C, C', D и D' ранга 1 группы B такие, что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$ и $t(B/D') \leqslant \tau_2 \leqslant t(C')$;
b) $B = Soc\ B$ и B не является неприводимой группой;

2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_8^{(2)}} \Leftrightarrow \tau_1 \xi \tau_2, \tau_3 < \tau_1 < \tau_4, \tau_3 < \tau_2 < \tau_4, B \neq Soc\ B$ *и существуют однозначно определенные сервантные подгруппы C, C', D и D' ранга 1 группы B такие, что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$ и $t(B/D') \leqslant \tau_2 \leqslant t(C')$;*

3) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_9^{(1)}} \Leftrightarrow \tau_1 < \tau_2, \tau_3 < \tau_1 < \tau_4, \tau_3 < \tau_2 < \tau_4, B \neq Soc\,B$ *и существуют однозначно определенные сервантные подгруппы C, C', D и D' ранга 1 группы B такие, что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$ и $t(B/D') \leqslant \tau_2 \leqslant t(C')$;*

4) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_{10}^{(1)}} \Leftrightarrow$ *выполняются следующие условия:*
a) $\tau_1 = \tau_2, \tau_3 < \tau_1 < \tau_4, \tau_3 < \tau_2 < \tau_4$ и существуют однозначно определенные сервантные подгруппы C, C', D и D' ранга 1 группы B такие, что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$ и $t(B/D') \leqslant \tau_2 \leqslant t(C')$;
b) $B = Soc\ B$ и B не является неприводимой группой;

5) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_{10}^{(2)}} \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2, \tau_3 < \tau_1 < \tau_4, \tau_3 < \tau_2 < \tau_4, B \neq Soc\,B$ *и существуют однозначно определенные сервантные подгруппы C, C', D и D' ранга 1 группы B такие, что $t(B/D) \leq \tau_1 \leq t(C)$ и $t(B/D') \leq \tau_2 \leq t(C')$.*

Замечание. В обозначении алгебры $\mathbf{A_i^{(j)}}$ нижний индекс $\mathbf{i}$ есть ее размерность над $\mathbb{Q}$, а верхний индекс $\mathbf{j}$ — порядковый номер алгебры.

Литература

[1] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы / М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т.2.

О проективно вполне транзитивных абелевых группах

Чехлов А.Р. (Томск)

Обозначим через $H_G(g)$ — высотную матрицу элемента g группы G. В случае, если группа G является p-группой вместо $H_G(g)$ рассматриваем индикатор $U_G(g)$ элемента g; аналогично, если G — группа без кручения, рассматриваем его характеристику $\chi_G(g)$. Через $o(g)$ обозначается порядок элемента g; $\mathrm{E}(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G; $\mathrm{End}(G) = \mathrm{E}(G)^+$ — ее группа эндоморфизмов; $\mathrm{Proj}(G)$ — подкольцо в $\mathrm{E}(G)$, порожденное всеми идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G)$; $\Pi(G)$ — подгруппу в $\mathrm{End}(G)$, порожденную всеми идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G)$. Если m — некоторое кардинальное число, то $A^{(m)}$ — прямая сумма m числа копий группы A. $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — кольцо (аддитивная группа) всех рациональных чисел. $r(A)$ — ранг, а $T(A)$ — периодическая часть группы A.

На множестве $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ рассмотрим следующее отношение $\preccurlyeq$: полагаем $m \preccurlyeq n \Leftrightarrow m, n \in \mathbb{N}$ и $n \mid m$ или $m = \infty$.

Рядом авторов изучались различные классы вполне транзитивных групп (см., например, [1]). Напомним, что группа G называется *вполне транзитивной*, если для любых $x, y \in G$ с условием $H_G(x) \leqslant H_G(y)$ и $o(x) \preccurlyeq o(y)$ найдется $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ со свойством $\alpha(x) = y$. Если группа G редуцирована, то условие $o(x) \preccurlyeq o(y)$ можно опустить.

Следуя [2] группу G назовем *проективно вполне транзитивной* (кратко, pft-*группой*), если для любых $x, y \in G$ с условием $H_G(x) \leqslant H_G(y)$ и $o(x) \preccurlyeq o(y)$ найдется $\alpha \in \mathrm{Proj}(G)$ со свойством $\alpha(x) = y$; если α можно выбрать из $\Pi(G)$, то группу назовем spft-*группой*. Если $\mathrm{E}(G) = \mathrm{Proj}(G)$, то группа G называется IG-*группой*, а если $\mathrm{E}(G) = \Pi(G)$, то — IS-*группой*. В [2] изучались IG-группы и IS-группы, а также примарные pft-группы и spft-группы.

Предложение 1. *Делимая группа $D = D_0 \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi} D_p)$ является IG-группой тогда и только тогда, когда, если $D_0 \neq 0$, то $r(D_0) \geqslant 2$; и для каждого $p \in \Pi$, если $D_p \neq 0$, то $r(D_p) \geqslant 2$.*

Предложение 2. *Вполне разложимая группа без кручения G является IG-группой тогда и только тогда, когда каждая ее однородная компонента, делимая хотя бы на одно простое число, имеет ранг $\geqslant 2$; множество же однородных компонент, имеющих ранг 1, конечно.*

Предложение 3. *Векторная группа без кручения $G = \prod_{t\in\Omega} G_t$, где G_t — прямое произведение групп ранга 1 типа t, а Ω — некоторое мно-*

жество типов, является IG-группой тогда и только тогда, когда каждая группа G_t, делимая хотя бы на одно простое число, имеет ранг $\geqslant 2$; множество же групп G_t, имеющих ранг 1, конечно.

Предложение 4. *Делимая группа $D = D_0 \oplus T(D)$ является pft-группой если и только если $D_0 \neq 0$, то $r(D_0) > 1$.*

Предложение 5. *Если $G = D \oplus A$, где D — делимая, а A — редуцированная части группы G, то G является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда D и A — pft-группы (соответственно, spft-группы).*

Предложение 6. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где каждая A_i является pft-группой (соответственно, spft-группой), то A является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда A вполне транзитивна.*

Следствие 7. *Если $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ редуцированная группа без кручения и $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$ или $\mathrm{Hom}(A_j, A_i) = 0$ для любых $i \neq j$, то G является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда каждая A_i является pft-группой (соответственно, spft-группой) и если $pA_i \neq A_i$, то $pA_j = A_j$ для каждого простого числа p и любых $i \neq j$, где $i, j \in I$.*

Следствие 8.*Пусть $\kappa > 1$ и G является p-группой или однородной группой без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *G вполне транзитивна;*

(b) *$G^{(\kappa)}$ вполне транзитивна;*

(c) *$G^{(\kappa)}$ является pft-группой.*

Лемма 9. *Если A — вполне транзитивная группа, все ненулевые эндоморфизмы которой суть мономорфизмы, то A является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(A) \cong \mathbb{Z}$.*

Напомним следующее понятие. Говорят, что p-группы G_1 и G_2 образуют *вполне транзитивную пару*, если для любых ненулевых $x \in G_i$, $y \in G_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$ условие $U_{G_i}(x) \leqslant U_{G_j}(y)$ влечет существование такого гомоморфизма $\alpha \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$, что $\alpha(x) = y$.

Предложение 10. *Если $\{G_i\}_{i \in I}$ — p-группы, являющиеся pft-группами (соответственно, spft-группами), то периодическая часть $H = T(\prod_{i \in I} G_i)$ будет pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда для любых $i, j \in I$ пара (G_i, G_j) вполне транзитивна.*

Следствие 11. *Пусть* $\{G_i\}_{i\in I}$ *— p-группы, являющиеся либо сепарабельными, либо тотально проективными pft-группами (соответственно, spft-группами). Тогда периодическая часть* $H = T(\prod_{i\in I} G_i)$ *будет pft-группой (соответственно, spft-группой).*

Теорема 12. *Пусть* $G = A \oplus T$, *где* A *— редуцированная группа без кручения, а* T *— редуцированная периодическая группа. Тогда* G *будет pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда* A *и* T *являются pft-группами (соответственно, spft-группами).*

Лемма 13. *Пусть* A *— вполне транзитивная группа, а* G *— такая группа, что каждый ее элемент содержится в прямом слагаемом, изоморфном группе* A, *причем дополнительное прямое слагаемое отлично от* 0 *и также обладает указанным свойством. Тогда* G *является spft-группой.*

Следствие 14. *Делимая группа* $D = D_0 \oplus T(D)$ *является spft-группой тогда и только тогда, когда, если* $D_0 \neq 0$, *то* $r(D_0) > 1$.

Следствие 15. *Алгебраически компактная группа без кручения* $G = \prod_{p\in\Pi} G_p$ *является pft-группой тогда и только тогда, когда* $r_p(G_p) > 1$ *для каждого* $p \in \Pi$.

Напомним, что группа называется *сепарабельной*, если каждый ее элемент содержится в прямом слагаемом, являющимся прямой суммой групп ранга 1.

Следствие 16. *Редуцированная сепарабельная группа ранга без кручения* $\geqslant 2$ *является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда для любых ее неизоморфных прямых слагаемых* G_1, G_2 *ранга* 1 *и каждого простого числа* p, *если* $pG_1 \neq G_1$, *то* $pG_2 = G_2$, *причем если* A *— прямое слагаемое ранга* 1 *группы* G, *то в* G *найдется такая подгруппа* $B \cong A$, *что* $A \oplus B$ *— прямое слагаемое группы* G.

Литература

[1] *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / Факториал Пресс, 2007.

[2] *Danchev P., Goldsmith B.* On projectively fully transitive Abelian p-groups // Results Math. 2013. V. 63. P. 1109–1130.

Абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов и их однородные отображения

Чистяков Д.С. (Москва)

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, A, B — унитарные левые R-модули. Отображение $f\colon A \to B$, удовлетворяющее условию $f(ra) = rf(a)$ для всех $a \in A$, $r \in R$ называется *R-однородным.* Множество всех R-однородных отображений из модуля A в модуль B обозначим $M_R(A, B)$. Очевидно, что $\mathrm{Hom}_R(A, B) \subseteq M_R(A, B)$. В случае, когда $A = B$, будем писать $M_R(A)$ вместо $M_R(A, A)$. Пусть n — натуральное число. R-модуль A называется *n-эндоморфным*, если $M_R(A^n) = \mathrm{End}_R(A^n)$. R-модуль A называется *эндоморфным*, если он n-эндоморфен для всех $n \in \mathbb{N}$.

Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (*UA-кольцом*), если на его мультипликативной полугруппе $(R, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, \cdot, +)$. Кольцо R является UA-кольцом, если любой изоморфизм мультипликативных полугрупп колец $\alpha\colon R \to S$ является изоморфизмом колец.

Обобщением понятия UA-кольца является понятие UA-модуля. Модуль A называется *модулем с однозначным сложением* (*UA-модулем*), если невозможно задать новое сложение на множестве A, не изменяя при этом действия кольца R на A. R-модуль A является модулем с однозначным сложением тогда и только тогда, когда все взаимно однозначные отображения из $M_R(A, B)$ являются изоморфизмами модулей A и B для любого R-модуля B.

Предложение 1. *Любой эндоморфный модуль является UA-модулем.*

Предложение 2. *Пусть A — периодическая абелева группа такая, что $t_2(A) \ncong \mathbb{Z}(2)$ и $t_3(A) \ncong \mathbb{Z}(3)$. Группа A является эндоморфным модулем над кольцом* $\mathrm{End}(A)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{End}(A)$ — *UA-кольцо.*

Предложение 3. *Пусть A — sp-группа, $t_2(A) \ncong \mathbb{Z}(2)$ и $t_3(A) \ncong \mathbb{Z}(3)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — эндоморфный модуль над кольцом* $\mathrm{End}(A)$*;*

2) $\mathrm{End}(A)$ — *UA-кольцо;*

3) *если p-компонента $t_p(A)$ группы A отлична от нуля, то она содержит прямое слагаемое $\mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(p^k)$, где p^k — наибольший из порядков элементов группы $t_p(A)$, либо $t_p(A)$ имеет неограниченную базисную подгруппу.*

Абелевы группы без кручения ранга 1 не являются эндоморфными модулями над своим кольцом эндоморфизмов. Кроме того, кольцо эндоморфизмов группы без кручения ранга 1 не обладает свойством однозначности сложения. Пусть A — сепарабельная абелева группа без кручения. Прямое слагаемое B ранга 1 группы A назовем *полусвязанным*, если в его дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое ранга 1, тип которого сравним с типом B. Группу A назовем *полусвязанной*, если всякое ее прямое слагаемое ранга 1 полусвязанно.

Предложение 4. *Пусть A — сепарабельная абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — эндоморфный модуль над кольцом* $\mathrm{End}(A)$*;*

2) $\mathrm{End}(A)$ — *UA-кольцо;*

3) *A — полусвязанная группа.*

Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга, удовлетворяющая условию $N(\mathrm{End}(A)) = 0$. В этой ситуации группа A квазиравна прямой сумме $\bigoplus\limits_{i=1}^{l} A_i^{n(i)}$ сильно неразложимых групп A_i, при этом каждое из колец $\mathbb{Q}\mathrm{End}(A_i)$ является телом и группы $A_1, \ldots, A_l$ образуют жесткую систему.

Предложение 5. *Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга и $N(\mathrm{End}(A)) = 0$.*

1) $\mathrm{End}(A)$-*модуль A эндоморфен тогда и только тогда, когда $n(i) > 1$ для всех $i = 1, \ldots, l$.*

2) *Если* $\mathrm{End}(A)$-*модуль A не является эндоморфным, то кольцо* $\mathrm{End}(A)$ *не обладает свойством однозначности сложения.*

Теорема 6. *Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга такая, что $\mathbb{Q}\mathrm{End}(A)/\mathbb{Q}N(\mathrm{End}(A)) \cong \mathbb{Q}$. Тогда* $\mathrm{End}(A)$ *не является UA-кольцом и группа A не является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов.*

Заметим, что условиям теоремы удовлетворяют все сильно неразложимые группы без кручения конечного простого ранга с ненулевым нильрадикалом кольца эндоморфизмов.

Работа выполнена при поддержке совместной программы «Михаил Ломоносов, III» Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD: научно-исследовательские стипендии и научные стажировки (Michail Lomonosov III – Forschungsstipendien und Aufenthalte).

Подгруппы групп с интерполяционным условием

Ширшова Е.Е. (Москва)

Пусть G — частично упорядоченная группа, e — единица группы G, множество $G^+ = \{x \in G \mid e \leqslant x\}$ — положительный конус группы G.

Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

Подмножество M частично упорядоченной группы G называется *выпуклым*, если из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует $g \in M$ для всех $a, b \in M$ и $g \in G$. Подгруппа, являющаяся выпуклым подмножеством, называется *выпуклой подгруппой*.

Частично упорядоченная группа G называется *направленной*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in G^+$ [1].

Обозначим символом $N(A)$ нормализатор подгруппы A в группе G.

Пусть G — интерполяционная группа, A и B — выпуклые направленные подгруппы группы G, $A \in N(B)$ и $B \in N(A)$.

Теорема 1. *Если $x \in (AB)^+$, то $x = ab$ для некоторых элементов $a \in A^+$, $b \in B^+$.*

Действительно, $x = uv$ для некоторых элементов $u \in A$ и $v \in B$.
Из направленности групп A и B следует, что $u = u_1 {u_2}^{-1}$ и $v = v_1 {v_2}^{-1}$ для некоторых элементов $u_i \in A^+$ и $v_i \in B^+$. Тогда $e \leqslant x \leqslant u_1 v_1$, откуда, по теореме 1 [2] заключаем, что $x = ab$ для некоторых элементов $e \leqslant a \leqslant u_1$ и $e \leqslant b \leqslant v_1$. Но подгруппы A и B выпуклы.

Выпуклая направленная нормальная подгруппа частично упорядоченной группы называется *о-идеалом*.

В указанных выше условиях из леммы 6 [3] следует, что $M = A \cap B$ — o-идеал группы G, и, по теореме 1 [3], существует интерполяционная группа G/M с o-идеалами A/M и B/M.

Говорят, что элементы a и b частично упорядоченной группы G *ортогональны*, если множество $L(a, b)$ нижних граней этих элементов является подмножеством множества $L(e)$ нижних граней единицы.

Теорема 2. *Положительный класс группы A/M ортогонален каждому положительному классу группы B/M.*

Действительно, пусть $U \in (A/M)^+$ и $V \in (B/M)^+$. По лемме 5 [3] существуют элементы $a \in A^+$ и $b \in B^+$, для которых $U = aM$ и $V = bM$.

Пусть класс $X \leqslant U$ и $X \leqslant V$ в группе G/M, тогда найдутся элементы $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющие неравенствам $x_1 \leqslant a$ и $x_2 \leqslant b$.

Так как, по предложению 2 [3], X — направленное множество, то существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий неравенствам $x \leqslant x_1, x_2$. Значит, $x \leqslant a, b$.

В интерполяционной группе существует элемент $c \in G$, для которого верны неравенства $e, x \leqslant c \leqslant a, b$. Так как подгруппы выпуклы, то $c \in A$ и $c \in B$, т.е. $c \in M$. Следовательно, $X \leqslant M$ и $L(U, V) \subset L(M)$ в группе G/M.

Литература

[1] *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы / М.: Мир, 1965.

[2] *Ширшова Е.Е.* О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием // Фундам. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17, № 7. С. 187–199.

[3] *Ширшова Е.Е.* О свойствах интерполяционных групп // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 2. С. 295–304.

Абелевы группы

Материалы Международного симпозиума,
посвященного 100-летию Л.Я. Куликова
(Москва, 2–6 ноября 2014 г.)

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования МПГУ

119571 Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446
Тел.: (499) 730-38-61
E-mail: izdat@mpgu.edu

Подписано в печать 14.10.2014.
Формат 60x90/16. Объем 5 п.л.
Тираж 120 экз. Заказ № 361.

ISBN 978-5-4263-0193-1

9 785426 301931