Содержание

Предисловие

Леонид Яковлевич Куликов родился 2 ноября 1914 года в семье железнодорожного служащего (ст. Никитовка, Донецкая область). После окончания Московского государственного педагогического института в 1938 году он был оставлен в аспирантуре, где под руководством профессора Г. М. Шапиро подготовил и в мае 1941 года защитил кандидатскую диссертацию на тему «К теории абелевых групп произвольной мощности». В том же году и под тем же названием в журнале «Математический сборник» была опубликована его первая статья, которая сразу принесла автору международную известность.

Благодаря интенсивной научной работе к середине 50-х годов Л. Я. Куликов стал самым авторитетным специалистом по теории абелевых групп. Собственно говоря, данная область алгебры выделилась из общей теории групп в отдельное направление именно под влиянием работ Л. Я. Куликова, которые наиболее полным образом представлены в этой книге.

В 1951 году Л. Я. Куликов защищает докторскую диссертацию на тему «Обобщенные примарные группы», и в дальнейшем все развитие теории абелевых групп в Советском Союзе происходит при его непосредственном участии и под его руководством.

Леонид Яковлевич не был первым, кто стал изучать абелевы группы. Начало положил немецкий математик Э. П. Х. Прюфер (1896–1934) своей диссертацией «Unendliche Abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung» (Берлин, 1921). Также на раннем этапе существенный вклад в теорию абелевых групп внесли такие немецкие и советские математики, как Ф. В. Леви (1888–1966), Р. Бэр (1902–1979), Г. Ульм (1908–1975), Л. С. Понтрягин (1908–1988), А. Г. Курош (1908–1971), А. И. Мальцев (1909–1967), Л. А. Калужнин (1914–1990), Е. С. Ляпин (1914–2005), С. В. Фомин (1917–1975). Однако Леонид Яковлевич Куликов был первым, кто всю свою научную жизнь посвятил изучению именно абелевых групп.

В военные и послевоенные годы Леонид Яковлевич сменил несколько мест работы. Он работал в Ивановском текстильном институте, в Ленинградском государственном педагогическом институте имени А. И. Герцена, в Ленинградском институте авиационного приборостроения, в Математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР. С 1962 года Леонид Яковлевич работал в Московском государственном педагогическом институте имени В. И. Ленина, где заведовал кафедрой алгебры в течение 25 лет, руководил научно-исследовательским семинаром, был председателем ученого совета по присуждению ученых степеней. В то время МГПИ имени В. И. Ленина был крупнейшим центром по теории абелевых групп. Вокруг семинара Л. Я. Куликова возникла научная школа, которая существует и поныне.

В Советском Союзе были и другие центры по изучению абелевых групп: в Томском государственном университете под руководством И. Х. Беккера, в Московском государственном университете под руководством А. П. Мишиной, в Ленинградском государственном университете под руководством А. В. Яковлева. Разумеется, все эти центры работали в тесном взаимодействии друг с другом. Большинство кандидатских диссертаций по абелевым группам защищалось в МГПИ на совете под председательством Л. Я. Куликова. Двадцать аспирантов подготовили и защитили свои кандидатские диссертации под его непосредственным руководством.

В 70-е – 80-е годы томские специалисты по теории абелевых групп регулярно ездили в Москву, чтобы выступить в МГПИ на семинаре по абелевым группам, руководителем которого много лет был Леонид Яковлевич. К докладу тщательно готовились, сильно волновались. Л. Я. Куликов слушал докладчика внимательно. Он не высказывал похвал, не задавал много вопросов. Однако его вопросы были неожиданными и позволяли взглянуть на предмет доклада с принципиально новой стороны. Вернувшись в Томск, докладчик еще долго вспоминал о своем выступлении на семинаре и думал о вопросах Леонида Яковлевича.

Леонид Яковлевич пользовался большим авторитетом и уважением у советских алгебраистов. В 1984 году в связи с 70-летием Л. Я. Куликова очередной Всесоюзный симпозиум по теории групп был проведен на базе МГПИ. На открытии симпозиума выдающийся отечественный математик Ю. Л. Ершов сказал много теплых слов о Леониде Яковлевиче. А один из участников симпозиума прочитал стихи собственного сочинения о юбиляре. Они заканчивались так: «...абелев, но не примарный Куликов». Лучше и точнее не скажешь!

Для зарубежных алгебраистов фигура Леонида Яковлевича Куликова была одной из знаковых среди советских математиков. Его хорошо знали, особенно специалисты, работающие в теории абелевых групп; они часто цитировали его известные работы. В 1989 году в Новосибирске прошла первая большая алгебраическая конференция с широким участием математиков из других стран. Приехали и многие специалисты по теории абелевых групп (работала секция «Абелевы группы»). Было хорошо заметно, с каким почтением они относятся к Леониду Яковлевичу.

В 2001 году в Гонолулу (США, штат Гавайи) прошла представительная конференция, посвященная 80-летию теории бесконечных абелевых групп. На конференции были собственно научные доклады, а также доклады по истории изучения абелевых групп в различных странах мира: России, Польше, Венгрии, Германии, Великобритании, Италии, США. Эти доклады опубликованы в специальном номере журнала «The Rocky Mountain Journal of Mathematics» (2002, том 32, номер 4). Вклад России, отраженный в статье А. А. Фомина «Abelian groups in Russia», выглядит весьма внушительно. В статье упоминаются около ста российских математиков, библиография насчитывает 160 наименований.

Так получилось, что год проведения этой конференции совпал с годом кончины Л. Я. Куликова (11 февраля 2001 года). Упомянутая выше статья как бы подводит итог его научной жизни, показывает масштаб этого математика, создателя отечественной школы теории абелевых групп.

Теория абелевых групп продолжает успешно развиваться. В ней работают прямые и косвенные ученики Леонида Яковлевича Куликова, в том числе десять докторов наук, имеющих уже собственные научные школы. Настоящее издание избранных научных трудов Л. Я. Куликова к его столетнему юбилею – это наша дань уважения и благодарность основателю теории абелевых групп.

П. А. Крылов
Е. А. Тимошенко
А. А. Фомин
А. В. Царев

От редактора

Книга, предлагаемая вниманию читателя, представляет собой сборник избранных работ выдающегося советского алгебраиста Л. Я. Куликова. Внутри каждого из двух разделов книги («Статьи» и «Тезисы докладов») работы расположены в хронологическом порядке. При подготовке книги исправлен ряд неточностей и опечаток, имевшихся в исходном тексте. Кроме того, некоторые излишне лаконичные доказательства были снабжены разъясняющими примечаниями. На с. 9 приводится перечень трудов, вошедших в эту книгу.

Работы [1] и [2] посвящены преимущественно p-группам и содержат результаты из кандидатской диссертации Л. Я. Куликова. В них введено понятие базисной подгруппы и установлены основные свойства таких подгрупп; показано, что неизоморфные p-группы могут иметь изоморфные ульмовские факторы. Кроме того, введен важный класс групп, за которыми впоследствии закрепилось название «периодически полные».

В [3] и [4] рассматривается вопрос о существовании изоморфных продолжений для двух заданных прямых разложений группы. Примененный автором оригинальный топологический подход позволил выявить ряд случаев, для которых данный вопрос решается положительно. В частности, удалось доказать, что прямое слагаемое вполне разложимой счетной группы само будет вполне разложимой группой.

В статьях [5] и [6] содержится изложение результатов докторской диссертации Л. Я. Куликова. Ключевым результатом является теорема, дающая необходимые и достаточные условия для существования редуцированной обобщенной p-примарной группы (класс обобщенных p-примарных групп включает в себя все p-адические модули), имеющей заданные мощность, тип и последовательность ульмовских факторов.

Работа [7] представляет собой фрагмент, взятый из второго издания книги «Теория групп»; ее автор А. Г. Курош отмечал, что построенный Л. Я. Куликовым пример публикуется впервые. Статья [8] дает пример редуцированной смешанной группы, во всяком разложении которой в прямую сумму двух подгрупп одно прямое слагаемое должно быть конечным.

Работы [9] и [10] первоначально были опубликованы в закрытой печати. Они посвящены случайным системам неравенств по некоторому модулю и решению вопроса о трудоемкости нахождения множества всех решений таких систем.

В статье [11] ищутся условия, при которых $\mathrm{Ext}(F, A)$ есть нулевая группа.

В книгу также включены избранные тезисы докладов, содержащие результаты, не отраженные в основных публикациях Л. Я. Куликова.

Е. А. Тимошенко

1. *К теории абелевых групп произвольной мощности. I*, Мат. сб., **9(51):1** (1941), с. 165–181.

2. *К теории абелевых групп произвольной мощности. II*, Мат. сб., **16(58):2** (1945), с. 129–162.

3. *О прямых разложениях групп. I*, Укр. мат. журн., **4:3** (1952), с. 230–275.

4. *О прямых разложениях групп. II*, Укр. мат. журн., **4:4** (1952), с. 347–372.

5. *Обобщенные примарные группы. I*, Тр. Моск. мат. о-ва, **1** (1952), с. 247–326.

6. *Обобщенные примарные группы. II*, Тр. Моск. мат. о-ва, **2** (1953), с. 85–167.

7. *Пример неизоморфных групп типа* 2 *с изоморфными ульмовскими факторами.* В кн.: К у р о ш А. Г., *Теория групп*, М.: Гостехиздат, 1953, с. 183–185.

8. *О прямых разложениях одной смешанной абелевой группы*, Publ. Math. (Debrecen), **4 : 3–4** (1956), с. 512–516.

9. *Случайные системы неравенств по модулю* (М., 1961).

10. *Системы соотношений несравнимости по модулю* (М., 1963).

11. *Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой*, Учен. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, **375** (1971), с. 41–55.

. . . .

12. *Универсально полные абелевы группы* // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда (Москва, 1956), том 1. М., 1956, с. 26–28.

13. *Группы расширений абелевых групп* // Труды 4-го Всесоюзного математического съезда (Ленинград, 1961), том 2. Л., 1964, с. 9–11.

14. *Группа абелевых расширений алгебраически компактной группы при помощи любой абелевой группы* // 2-й Всесоюзный симпозиум по теории групп (Батуми, 1966): Резюме сообщений и докладов. Тбилиси, 1967, с. 24–25.

15. *Базисные подмодули модулей над локальными кольцами главных идеалов* // 11-й Всесоюзный алгебраический коллоквиум (Кишинев, 1971): Резюме сообщений и докладов. Кишинев, 1971, с. 148–149.

16. *Группа абелевых расширений группы без кручения первого ранга* // 3-й Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей (Тарту, 1976): Резюме сообщений. Тарту, 1976, с. 63–64.

17. *Группа абелевых расширений группы без кручения с помощью периодической группы* // 5-й Всесоюзный симпозиум по теории групп (Краснодар, 1976): Тезисы докладов. Новосибирск, 1976, с. 47–48.

18. *Группа абелевых расширений сервантной подгруппы аддитивной группы целых p-адических чисел* // 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция (Новосибирск, 1977): Тезисы докладов, часть 1. Новосибирск, 1977, с. 34.

19. *О группах расширений абелевых групп* // 6-й Всесоюзный симпозиум по теории групп (Черкассы, 1978): Тезисы докладов. Киев, 1978, с. 34.

20. *О p-длине группы* $\mathrm{Ext}(F, A)$ *в случае, когда F и A – счетные p-примарные группы* // 9-й Всесоюзный симпозиум по теории групп (Москва, 1984): Тезисы докладов. М., 1984, с. 149.

21. *О p-длине группы сервантных расширений абелевых групп* // 18-я Всесоюзная алгебраическая конференция (Кишинев, 1985): Тезисы сообщений, часть 1. Кишинев, 1985, с. 299.

22. *Об универсальном пополнении абелевой группы* // Симпозиум «Абелевы группы» (Бийск, 1994): Тезисы выступлений участников. Бийск, 1994, с. 5.

СТАТЬИ

К теории абелевых групп произвольной мощности. I

Введение

В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы теории абелевых групп произвольной мощности.

Первый параграф носит подготовительный характер. В § 2 доказываются теоремы, связанные с важным понятием сервантной подгруппы [1]. В § 3 рассматривается вопрос о разложимости абелевых групп в прямую сумму циклических подгрупп. В § 4 дается условие, при котором группа, порядки элементов которой в совокупности ограничены, является прямым слагаемым произвольной содержащей ее абелевой группы. Полученный результат применяется к вопросу о разложимости абелевых групп в прямую сумму неразложимых групп. В § 5 рассматривается вопрос о существовании примарных абелевых групп без элементов бесконечной высоты [2], имеющих заданную мощность $\aleph_\alpha$ и неразложимых в прямую сумму групп меньшей мощности, чем $\aleph_\alpha$.

§ 1

В этом параграфе приведены основные понятия и некоторые хорошо известные факты из теории абелевых групп, которые будут необходимы в следующих параграфах.

Так как в работе рассматриваются только абелевы группы, то везде будем пользоваться аддитивной записью.

Абелева группа называется *группой без кручения*, если все ее элементы, отличные от нуля, имеют бесконечный порядок. Если же группа не содержит элементов бесконечного порядка, то она называется *периодической.*

I [3]. *Если порядки элементов периодической группы в совокупности ограничены, то она разложима в прямую сумму циклических групп.*

Абелева группа называется *примарной*, если порядок каждого ее элемента есть степень одного и того же простого числа p. Всякая абелева периодическая группа разлагается в прямую сумму примарных групп.

---

[1] Определение дается в § 1.

[2] Определение дается в § 1.

[3] См. H. Prüfer [1].

Абелева группа A называется *полной*, если уравнение $nx = a$, где $a \in A$, имеет решение в A для каждого целого числа n, отличного от нуля.

II[4]. *Полная подгруппа абелевой группы A является прямым слагаемым A.*

Квазициклической группой называется группа, изоморфная факторгруппе аддитивной группы рациональных чисел, знаменатели которых суть степени одного и того же простого числа p, по подгруппе целых чисел.

III[5]. *Полная примарная группа является прямой суммой квазициклических групп.*

Большую роль в дальнейших рассуждениях играет понятие сервантной подгруппы, введенное Прюфером. Подгруппа C абелевой группы A называется *сервантной* в A, если из разрешимости уравнения $nx = c$ в группе A, где c – элемент C, следует его разрешимость в C. Примером сервантных подгрупп могут служить прямые слагаемые группы.

Для примарных групп важным является понятие *высоты* элемента. Отличный от нуля элемент a примарной группы H (по отношению к простому числу p) называется *элементом конечной высоты* n, если уравнение

$$p^k x = a$$

разрешимо в H при $k \leqslant n$ и неразрешимо при $k > n$. Если же это уравнение имеет решение в H для любого k, то a называется *элементом бесконечной высоты.*

В группе, примарной по отношению к простому числу p, из разрешимости уравнения $p^k x = a$ всегда следует разрешимость уравнения $n'p^k x = a$, если только n' не делится на p. Действительно, если решение первого уравнения x_1 имеет порядок p^m, то найдется целое число l, удовлетворяющее равенству $n'l = 1 + p^m q$, и элемент lx_1 будет решением второго уравнения.

Из этого следует, что примарная группа будет полной в том и только в том случае, если каждый ее элемент является элементом бесконечной высоты. Равным образом и подгруппа C примарной группы H будет сервантной в H тогда и только тогда, если элементы C имеют в H ту же высоту, что и в C.

Если $M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$ – множества элементов некоторой группы A, то через $[M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots]$ будем обозначать наименьшую подгруппу A, содержащую элементы всех этих множеств.

Лемма 1. *Элемент a примарной группы H, имеющий порядок p и конечную высоту m, можно включить в циклическую сервантную в H подгруппу порядка p^{m+1}.*

Доказательство. Пусть y_1 – решение уравнения $p^m y = a$. Докажем, что циклическая группа $[y_1]$ сервантна в H, т.е. элементы группы $[y_1]$ имеют в H ту же высоту, что и в $[y_1]$. Можно ограничиться элементами из $[y_1]$ вида $p^k y_1$, где $p^k \leqslant p^m$, ибо элементы $n'p^k y_1$ и $p^k y_1$ имеют одинаковую высоту, если n' не делится на p. Элемент $p^k y_1$ имеет в $[y_1]$ высоту k. Если допустить, что элемент

[4] См. R. Baer [2].

[5] См. H. Prüfer [1].

$p^k y_1$ имеет в H высоту $k' > k$, тогда элемент $p^{m-k}(p^k y_1) = p^m y_1 = a$ имел бы в H высоту, бо́льшую или равную $m - k + k' > m$, что противоречит условиям леммы.

Докажем, что неполная примарная абелева группа H содержит хоть один элемент порядка p конечной высоты. В H найдется элемент a конечной высоты. Пусть a имеет порядок p^{k+1}. Предположим, что $k \geqslant 1$ и $p^k a$ есть элемент бесконечной высоты, ибо иначе нечего доказывать. Пусть l такое число $(1 \leqslant l \leqslant k)$, что $p^{l-1}a$ имеет еще конечную высоту, но $p^l a$ уже элемент бесконечной высоты. Так как $p^l a$ имеет бесконечную высоту, то существует в H такой элемент a', что его высота больше высоты элемента $p^{l-1}a$ и $pa' = p^l a$. Тогда элемент $a' - p^{l-1}a$ имеет конечную высоту и порядок p.

Из этого на основании леммы 1 следует, что *неполная примарная абелева группа H содержит сервантные в H циклические подгруппы* (отличные от нулевой подгруппы).

§ 2

Теорема 1. *Если B – сервантная подгруппа абелевой группы A и факторгруппа $\overline{A} = A/B$ разложима в прямую сумму циклических групп, то B является прямым слагаемым группы A.*

Доказательство. Пусть

$$\overline{A} = \bigoplus_{\alpha} [\bar{a}_\alpha] \tag{1}$$

– одно из разложений группы $\overline{A}$ в прямую сумму циклических групп. Будем через $\bar{a}$ обозначать смежный класс $a + B$, где a – элемент A. Выберем в каждом смежном классе $\bar{a}_\alpha$ элемент a_α группы A, имеющий тот же порядок, что и порядок $\bar{a}_\alpha$ в группе $\overline{A}$. Если $\bar{a}_\alpha$ имеет в $\overline{A}$ бесконечный порядок, то в качестве a_α можно взять любой элемент из смежного класса $\bar{a}_\alpha$. Если же $\bar{a}_\alpha$ имеет в $\overline{A}$ конечный порядок n и a'_α – какой-нибудь элемент из смежного класса $\bar{a}_\alpha$, то $na'_\alpha = b \in B$. Так как B сервантна в A, то существует элемент $b' \in B$ такой, что $nb' = b$. Тогда элемент $a'_\alpha - b'$ содержится в смежном классе $\bar{a}_\alpha$ и имеет порядок n. Поэтому можно положить a_α равным $a'_\alpha - b'$.

Обозначим через C подгруппу A, порожденную всеми выбранными элементами a_α. Тогда, очевидно, $A = [B, C]$. Докажем, что $B \cap C = 0$. Предположим, что элемент

$$c = n_1 a_{\alpha_1} + \ldots + n_k a_{\alpha_k}$$

содержится как в B, так и в C. Тогда в группе $\overline{A}$ имеет место равенство

$$n_1 \bar{a}_{\alpha_1} + \ldots + n_k \bar{a}_{\alpha_k} = \bar{0},$$

которое в силу (1) влечет за собой равенства

$$n_i \bar{a}_{\alpha_i} = \bar{0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Из этих равенств следуют равенства

$$n_i a_{\alpha_i} = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k),$$

ибо каждый элемент a_{α_i} имеет тот же порядок, что и порядок $\bar{a}_{\alpha_i}$ в группе $\overline{A}$. Поэтому $c = 0$ и $B \cap C = 0$, т.е.

$$A = B \oplus C.$$

Для доказательства следующей теоремы будет нужна

Лемма 2. *Если C – сервантная подгруппа абелевой группы A и группа $\overline{B} = B/C$ сервантна в $\overline{A} = A/C$, то группа B сервантна в A.*

Доказательство. Пусть уравнение $ny = b$, где $b \in B$, имеет решение y в A. Докажем, что оно разрешимо также в B. Если $\bar{b} = b + C$ и $\bar{y} = y + C$, то $n\bar{y} = \bar{b}$ и, так как $\overline{B}$ сервантна в $\overline{A}$, существует элемент $\bar{b}'$ такой, что $n\bar{b}' = \bar{b}$. Если b' – элемент из смежного класса $\bar{b}'$, то $nb' = b + c$, где $c \in C$. Отсюда, так как $ny = b$, $n(b' - y) = c$. Группа C сервантна в A, поэтому существует элемент $c' \in C$ такой, что $nc' = c$. Но тогда элемент $b' - c' \in B$ и $n(b' - c') = b$. Следовательно, B сервантна в A.

Теорема 2. *Примарная группа H не содержит элементов бесконечной высоты тогда и только тогда, когда каждое конечное множество элементов из H можно включить в конечную подгруппу, сервантную в H.*

Необходимость условия. Пусть H – примарная группа, не содержащая элементов бесконечной высоты. Так как H содержит (лемма 1) конечные сервантные подгруппы, то каждое конечное множество элементов H можно включить в конечную сервантную подгруппу в силу следующего предложения:

(a) Если даны в H конечная сервантная подгруппа C и элемент $a \notin C$, то существует конечная сервантная в H подгруппа, содержащая как a, так и C.

Докажем это предложение, когда a имеет порядок p. В этом случае в группе $\overline{H} = H/C$ элемент $\bar{a} = a + C$ имеет порядок p и конечную высоту m, ибо C – конечная группа и H не содержит элементов бесконечной высоты. Если $\bar{b}$ – решение уравнения $p^m \bar{y} = \bar{a}$, то циклическая группа $[\,\bar{b}\,]$ сервантна в $\overline{H}$ (лемма 1). Если $[\,\bar{b}\,] = B/C$, то подгруппа B сервантна в H (лемма 2), конечна и содержит как a, так и C.

Предположим, что предложение (a) уже доказано для случая, когда порядок элемента a будет $\leqslant p^n$, $n > 0$. Тогда если a имеет порядок p^{n+1}, то существует конечная сервантная в H группа $C' \supset [pa,\, C]$, ибо pa имеет порядок p^n. Если a еще не содержится в C', то так как C' сервантна в H, то в C' существует элемент c такой, что $pc = pa$. Элемент $a - c$ имеет порядок p и потому (по индуктивному предположению) существует конечная сервантная в H группа $C'' \supset [a - c,\, C'] \supset [a,\, C]$.

Достаточность условия. Пусть группа H такова, что каждое конечное множество элементов этой группы можно включить в конечную сервантную в H подгруппу. Если бы H содержала элемент бесконечной высоты, то его можно было бы включить в конечную сервантную в H подгруппу. Но это невозможно, ибо каждый элемент такой группы имеет конечную высоту в H.

§ 3

Теорема 3. *Для того чтобы счетная абелева группа A разлагалась в прямую сумму циклических групп, необходимо и достаточно, чтобы всякое конечное число элементов A можно было включить в подгруппу с конечным числом образующих, сервантную в A.*

Достаточность условия. Пусть B_α – сервантная в A подгруппа с конечным числом образующих $b_1, \ldots, b_k$ и x – элемент A, не содержащийся в B_α; на основании условия теоремы в A найдется подгруппа $B_{\alpha+1}$ с конечным числом образующих, сервантная в A и содержащая элементы $b_1, \ldots, b_k, x$, т.е. $B_{\alpha+1} \supset [B_\alpha, x]$. Отсюда следует, что группа A, будучи счетной, будет объединением возрастающей последовательности групп с конечным числом образующих и сервантных в A

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$$

Таким образом,

$$A = [B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots]. \tag{1}$$

Каждая факторгруппа B_{n+1}/B_n допускает конечное число образующих и потому разложима в прямую сумму циклических групп. Поэтому (теорема 1) B_n есть прямое слагаемое B_{n+1}:

$$B_{n+1} = B_n \oplus C_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Если положить $B_1 = C_1$, то из (2) следует

$$B_{n+1} = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_{n+1}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) находим

$$A = [C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots]$$

и

$$[C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_{n+1}, \ldots] \cap C_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому группа A есть прямая сумма групп $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Но каждая группа C_n допускает конечное число образующих. Следовательно, группа A может быть разложена в прямую сумму циклических групп.

Необходимость условия. Если группа A разложима в прямую сумму циклических групп, то любое конечное множество элементов A можно включить в группу с конечным числом образующих, являющуюся прямым слагаемым A. Но прямое слагаемое A представляет собою сервантную подгруппу A.

Из теорем 2 и 3 непосредственно следует

Теорема Прюфера [6]. *Для того чтобы счетная примарная группа разлагалась в прямую сумму циклических групп, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала элементов бесконечной высоты.*

Из теоремы 3 также легко следует

[6] См. H. Prüfer [1].

Теорема [7] (критерий Понтрягина). *Пусть A – счетная абелева группа без кручения. Если каждая возрастающая цепочка подгрупп A, имеющих один и тот же конечный ранг, обрывается, то A разложима в прямую сумму циклических групп.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ – произвольное конечное множество элементов A и группа $B_0 = [x_1, \ldots, x_k]$ имеет ранг r. Если B_0 еще не сервантна в A, то в A существует элемент $y_1 \notin B_0$, но

$$ny_1 \in B_0 \quad \text{при } n \neq 0. \tag{4}$$

Группа $B_1 = [B_0, y_1]$ в силу (4) также имеет ранг r. Если B_1 еще не сервантна в A, то в A найдется элемент $y_2 \notin B_1$, но $ny_2 \in B_1$ при $n \neq 0$. Группа $B_2 = [B_1, y_2]$ также имеет ранг r. Продолжая процесс, получим возрастающую цепочку подгрупп ранга r, допускающих конечное число образующих

$$B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \tag{5}$$

По условию эта цепочка имеет только конечное число членов. Если B_m – последний член в цепочке (5), то не существует в A элемента y такого, что $y \notin B_m$, а $ny \in B_m$ при $n \neq 0$, т.е. B_m сервантна в A. Таким образом, группа A удовлетворяет условию теоремы 3 и потому разложима в прямую сумму циклических групп.

Для примарных абелевых групп произвольной мощности может быть доказана

Теорема 4. *Для того чтобы абелева примарная группа H разлагалась в прямую сумму циклических групп, необходимо и достаточно, чтобы она была объединением счетной возрастающей цепочки сервантных в H подгрупп B_n, где $n = 1, 2, \ldots$, таких, что порядки элементов каждой из них в совокупности ограничены.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть H – объединение возрастающей цепочки подгрупп

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots,$$

причем каждая подгруппа B_n сервантна в H и состоит из элементов, порядки которых в совокупности ограничены. Порядки элементов всякой факторгруппы B_{n+1}/B_n также в совокупности ограничены и, следовательно, она разложима в прямую сумму циклических групп (см. §1, I); поэтому (теорема 1) B_n есть прямое слагаемое B_{n+1}:

$$B_{n+1} = B_n \oplus C_{n+1}.$$

Но тогда, если положить $B_1 = C_1$,

$$H = [C_1, \ldots, C_n, \ldots]$$

и

$$[C_1, \ldots, C_{n-1}, C_{n+1}, \ldots] \cap C_n = 0,$$

[7] См. Л. С. Понтрягин [3].

т.е.

$$H = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus \ldots$$

Следовательно, группа H разложима в прямую сумму циклических групп, так как порядки элементов каждой подгруппы C_n в совокупности ограничены.

Теорема Прюфера следует также из теорем 2 и 4, ибо в силу теоремы 2 счетная примарная абелева группа без элементов бесконечной высоты является объединением возрастающей цепочки конечных сервантных подгрупп.

§ 4

Известно, что полная подгруппа абелевой группы всегда является ее прямым слагаемым. Оказывается, что этим же свойством обладают сервантные подгруппы, порядки элементов которых в совокупности ограничены.

Теорема 5. *Пусть B – сервантная подгруппа абелевой группы A и порядки элементов B ограничены в совокупности; тогда B является прямым слагаемым группы A.*

Доказательство. По условию существует такое целое число n, $n \neq 0$, что $nb = 0$ для каждого элемента $b \in B$. Обозначим через nA подгруппу всех элементов A вида na. Тогда порядок каждого элемента факторгруппы $\overline{A} = A/nA$ не превосходит n. Кроме того, $B \cap nA = 0$. Действительно, если $na \in B$, то, так как B сервантна в A, существует элемент $b \in B$ такой, что $nb = na$. Но $nb = 0$, следовательно, и $na = 0$.

Положим $B^* = B \oplus nA$ и $\overline{B}^* = B^*/nA$. Докажем, что группа $\overline{B}^*$ сервантна в $\overline{A}$. Пусть уравнение $m\bar{y} = \bar{b}$, где $\bar{b} \in \overline{B}^*$, имеет решение $\bar{y}$ в $\overline{A}$. Пусть $\bar{y} = y + nA$ и $\bar{b} = b + nA$, где $b \in B$ и $y \in A$. Тогда $my = b + na$, ибо $m\bar{y} = \bar{b}$. Если $(m, n) = d$, то найдутся целые числа α и β такие, что $\alpha m + \beta n = d$. Из равенства $my = b + na$ следует $d\bigl(\frac{m}{d}y - \frac{n}{d}a\bigr) = b$. Но B сервантна в A, поэтому существует элемент $b' \in B$ такой, что $db' = b$, т.е. $(\alpha m + \beta n)b' = b$. Так как $nb' = 0$, то $m(\alpha b') = b$ и $\alpha b' \in B$. Положив $\overline{\alpha b'} = \alpha b' + nA$, имеем

$$m(\overline{\alpha b'}) = \bar{b} \quad \text{и} \quad \overline{\alpha b'} \in \overline{B}^*.$$

Следовательно, группа $\overline{B}^*$ сервантна в $\overline{A}$.

Порядки элементов факторгруппы $\overline{A}/\overline{B}^*$ не превосходят n, так как порядки элементов $\overline{A}$ не превосходят n; следовательно, факторгруппа $\overline{A}/\overline{B}^*$ разложима в прямую сумму циклических групп (см. § 1, I). Поэтому (теорема 1) $\overline{B}^*$ есть прямое слагаемое $\overline{A}$

$$\overline{A} = \overline{B}^* \oplus \overline{C}.$$

Пусть C – подгруппа A, соответствующая $\overline{C}$. Тогда

$$A = [B^*, C] \quad \text{и} \quad B^* \cap C = nA.$$

Но $B^* = B \oplus nA$, поэтому

$$A = [B, C] \quad \text{и} \quad B \cap C = 0,$$

т.е.

$$A = B \oplus C.$$

Следствие 1. *Если примарная группа H не содержит элементов бесконечной высоты и неразложима в прямую сумму циклических групп, то H содержит циклические подгруппы как угодно большого порядка, являющиеся прямыми слагаемыми H.*

Доказательство. В силу теоремы 5 достаточно доказать, что H содержит сервантные циклические подгруппы как угодно большого порядка. В группе H существуют элементы порядка p, имеющие как угодно большую высоту в H, ибо иначе порядки элементов H будут ограничены в совокупности и H будет разложима в прямую сумму циклических групп. Но тогда (лемма 1) H содержит циклические сервантные в H подгруппы как угодно большого порядка.

Так как максимальная периодическая подгруппа абелевой группы A является сервантной в A, то частным случаем теоремы 5 является

Теорема 5а[8]. *Если максимальная периодическая подгруппа абелевой группы A состоит из элементов, порядки которых в совокупности ограничены, то она является прямым слагаемым A.*

Группу будем называть *неразложимой*, если она не может быть разложена в прямую сумму своих подгрупп.

Из теоремы 5 легко вытекает следующая теорема, доказанная ранее только для счетных групп[9].

Теорема 6. *Примарная абелева группа произвольной мощности, неразложимая в прямую сумму циклических и квазициклических групп, не может быть разложена в прямую сумму неразложимых групп.*

Доказательство. Допустим, что примарная абелева группа P, неразложимая в прямую сумму циклических и квазициклических групп, может быть разложена в прямую сумму неразложимых групп и

$$P = \bigoplus_{\alpha} P_\alpha \tag{1}$$

– одно из таких разложений. Тогда найдется хоть одно прямое слагаемое $P_{\alpha'}$, не являющееся ни циклической, ни квазициклической группой. Группа $P_{\alpha'}$ должна или быть полной группой, или содержать хоть один элемент порядка p конечной высоты (см. § 1). В первом случае $P_{\alpha'}$, не будучи квазициклической группой, должна быть прямой суммой квазициклических групп (§ 1, III). Во втором случае $P_{\alpha'}$ содержит (лемма 1) циклическую сервантную подгруппу, которая по теореме 5 является прямым слагаемым $P_{\alpha'}$.

Теорема 7. *Среди смешанных групп, т.е. групп, содержащих как отличные от нуля элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка, не существует неразложимых групп.*

[8] Была доказана Бэром [2] и Фоминым [4].

[9] См., например, R. Baer [5].

Доказательство. Пусть абелева группа H содержит как элементы конечного порядка $\neq 0$, так и элементы бесконечного порядка. Периодическая подгруппа группы H либо является полной и, следовательно, есть прямое слагаемое H (§1, II), либо содержит циклическую сервантную подгруппу (см. §1), которая по теореме 5 будет прямым слагаемым H.

Следствие. *Если абелева группа A неразложима в прямую сумму периодической группы и группы без кручения, то A также не может быть разложена в прямую сумму неразложимых групп.*

Доказательство. Если допустить, что A разложима в прямую сумму неразложимых групп, тогда каждое прямое слагаемое в таком разложении должно быть или периодической группой, или группой без кручения. Из этого следует, что A может быть разложена в прямую сумму периодической группы и группы без кручения, что противоречит условию следствия.

§5

Важным классом примарных абелевых групп являются группы без элементов бесконечной высоты, так как изучение произвольных примарных абелевых групп в значительной степени сводится к изучению примарных абелевых групп без элементов бесконечной высоты.

Теорема Прюфера утверждает, что счетные примарные группы, не содержащие элементов бесконечной высоты, разлагаются в прямую сумму циклических групп. Для несчетных групп эта теорема неверна, т.е. существуют несчетные примарные абелевы группы без элементов бесконечной высоты, неразложимые в прямую сумму циклических групп. Сложный пример такого рода группы был найден Прюфером. Более простые примеры построили H. Ulm[10] и А. Г. Курош[11].

Естественно возникает вопрос о существовании примарных абелевых групп произвольной заданной мощности без элементов бесконечной высоты, которые не могут быть разложены в прямую сумму подгрупп, каждая из которых имеет меньшую мощность, чем мощность самой группы. Вопрос этот рассматривается в настоящем параграфе. Для всех мощностей вида $\aleph_{\alpha+1}$ вопрос решается положительно, т.е. доказывается существование примарных абелевых групп заданной мощности $\aleph_{\alpha+1}$ без элементов бесконечной высоты, которые при любом разложении в прямую сумму содержат хотя бы одно прямое слагаемое, равномощное всей группе.

1. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ – счетная последовательность абелевых групп, примарных по отношению к одному и тому же простому числу p. Рассмотрим последовательности вида

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \tag{1}$$

[10] См. H. Ulm [6].

[11] См. А. Г. Курош [7].

где x_i – элемент группы P_i. Элемент x_i, стоящий на i-м месте последовательности x, будем называть i-й компонентой x. Если даны две последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots)$, то последовательность

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_i + y_i, \ldots)$$

будем называть *суммой* последовательностей x и y и обозначать через $x + y$; здесь сложение i-х компонент x_i и y_i производится в группе P_i. При таком определении сложения последовательностей имеет место соотношение

$$mx = (mx_1, mx_2, \ldots, mx_i, \ldots). \tag{2}$$

Если через 0 обозначать нулевой элемент в каждой группе P_i, то последовательность $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ будем называть *нулевой последовательностью*. Порядок и высоту x_i в P_i будем называть соответственно порядком и высотой i-й компоненты последовательности x. Если в последовательности типа (1) порядки всех компонент в совокупности ограничены, то будем ее называть *ограниченной последовательностью*.

Множество всех ограниченных последовательностей (1) образует примарную абелеву группу, если за групповую операцию принять определенное выше сложение последовательностей. Обозначим эту группу через P и будем писать

$$P = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots).$$

Нулевым элементом группы P будет нулевая последовательность. Пусть

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$$

– элемент группы P, т.е. ограниченная последовательность, и x_i имеет порядок p^{k_i} и высоту h_i в группе P_i. Обозначим через p^k наименьшее число, для которого $p^{k_i} \leqslant p^k$, и через h – наибольшее число, для которого $h_i \geqslant h$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Если же все компоненты x_i имеют бесконечную высоту, полагаем $h = \infty$. На основании (2) легко показать, что элемент x в P имеет порядок p^k и высоту h. Из этого следует, что *если группы $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ не содержат элементов бесконечной высоты, то группа P также не содержит элементов бесконечной высоты.*

2. Пусть группа H_i $(i = 1, 2, \ldots)$ – прямая сумма циклических групп порядка p^i и мощность ее $\aleph_\alpha$. Тогда мощность группы

$$H = (H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots)$$

будет $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Группа H *не содержит элементов бесконечной высоты*, ибо ни одна из групп H_i не содержит таковых.

Отметим, что высота в группе H элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots)$ порядка p равна числу первых нулевых компонент элемента x. Действительно, если $x_1 = \ldots = x_k = 0$ и $x_{k+1} \neq 0$, то высота x в H не меньше k, ибо высота каждой не равной 0 компоненты $\geqslant k$. С другой стороны, высота x в H не больше k, так как x_{k+1} есть элемент порядка p группы H_{k+1} и, следовательно, имеет в H_{k+1} высоту k.

3. Докажем, что *группа H не имеет разложений вида*

$$H = B \oplus C, \tag{3}$$

где B – прямая сумма счетного множества циклических групп растущих порядков, т.е.

$$B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} [y^{(n)}], \tag{4}$$

причем

$$p^{k_n} y^{(n)} = 0, \quad p^{k_n - 1} y^{(n)} \neq 0 \quad \textit{и} \quad 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

Допустим обратное, т.е. допустим, что имеет место разложение вида (3). Положим $z^{(n)} = p^{k_n - 1} y^{(n)}$. Элемент $z^{(n)}$ имеет в H высоту $k_n - 1$ и порядок p, поэтому

$$z^{(n)} = (z_1^{(n)}, \ldots, z_{k_n - 1}^{(n)}, z_{k_n}^{(n)}, \ldots) = (0, \ldots, 0, z_{k_n}^{(n)}, \ldots),$$

т.е.

$$z_{k_n}^{(n)} \neq 0 \quad \text{и при } i < k_n \quad z_i^{(n)} = 0 \tag{5}$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots$

В силу (4) каждый элемент $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ порядка p группы B однозначно может быть записан в виде

$$x = c_1 z^{(1)} + c_2 z^{(2)} + \ldots + c_n z^{(n)}, \tag{6}$$

где c_i – целые числа, $0 \leqslant c_i < p$, и $c_n \neq 0$. Следовательно, i-я компонента элемента x равна

$$x_i = c_1 z_i^{(1)} + c_2 z_i^{(2)} + \ldots + c_n z_i^{(n)}. \tag{7}$$

Но отбрасывая, в силу (5), в сумме (7) равные нулю слагаемые, стоящие в конце, получим для $i = 1, 2, \ldots, k_{n+1} - 1$

$$x_i = 0, \quad \text{если } i < k_1,$$

и

$$x_i = c_1 z_i^{(1)} + \ldots + c_m z_i^{(m)}, \quad \text{если } k_m \leqslant i < k_{m+1} \quad \text{и} \quad i < k_{n+1}. \tag{8}$$

Рассмотрим элемент $z = (z_1, \ldots, z_i, \ldots)$ порядка p группы H со следующими компонентами:

$$z_i = 0, \quad \text{если } i < k_1,$$

и

$$z_i = z_i^{(1)} + \ldots + z_i^{(m)}, \quad \text{если } k_m \leqslant i < k_{m+1}. \tag{9}$$

Очевидно, $z \neq 0$, ибо $z_{k_1} = z^{(1)}_{k_1} \neq 0$. Если положить

$$x^{(n)} = z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots + z^{(n)},$$

то из равенств (8) и (9) видно, что элементы $x^{(n)}$ и z имеют равные первые $(k_{n+1} - 1)$ компонент. Но k_{n+1}-е компоненты элементов $x^{(n)}$ и z уже различны, ибо

$$x^{(n)}_{k_{n+1}} = z^{(1)}_{k_{n+1}} + z^{(2)}_{k_{n+1}} + \ldots + z^{(n)}_{k_{n+1}}$$

и из (9)

$$z_{k_{n+1}} = z^{(1)}_{k_{n+1}} + z^{(2)}_{k_{n+1}} + \ldots + z^{(n)}_{k_{n+1}} + z^{(n+1)}_{k_{n+1}},$$

т.е.

$$z_{k_{n+1}} - x^{(n)}_{k_{n+1}} = z^{(n+1)}_{k_{n+1}} \neq 0 \qquad [\text{см. } (5)].$$

В силу этого элемент $z - x^{(n)}$ имеет в H высоту $k_{n+1} - 1 \geqslant n$. Кроме того, из неравенства k_{n+1}-х компонент элементов $x^{(n)}$ и z следует невозможность равенства

$$z = x^{(n)}.$$

Невозможность равенства (3) будет доказана, если доказать, что $z \notin B$. Ибо тогда смежный класс $\bar{z} = z + B$ содержит элементы $z - x^{(n)}$ высоты $\geqslant n$, т.е. содержит элементы как угодно большой высоты. Поэтому элемент $\bar{z}$ группы $\overline{H} = H/B$ будет иметь бесконечную высоту в $\overline{H}$. Но это невозможно, ибо H не содержит элементов бесконечной высоты и B – прямое слагаемое группы H.

Докажем, что $z \notin B$. Допустим противное, т.е. что $z \in B$. Каждый элемент порядка p группы B может быть записан в виде (6). Поэтому мы можем написать

$$z = c_1 z^{(1)} + c_2 z^{(2)} + \ldots + c_n z^{(n)}. \tag{10}$$

С одной стороны, из равенства (8) имеем

$$z_{k_m} = c_1 z^{(1)}_{k_m} + \ldots + c_m z^{(m)}_{k_m}, \tag{8$'$}$$

если $k_m < k_{n+1}$; с другой стороны, из равенства (9) находим

$$z_{k_m} = z^{(1)}_{k_m} + \ldots + z^{(m)}_{k_m}. \tag{9$'$}$$

Сравнивая равенства (8′) и (9′) последовательно при $m = 1$, $m = 2$, …, $m = n$, получим $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, …, $c_n = 1$. Поэтому равенство (10) переходит в равенство

$$z = z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots + z^{(n)},$$

т.е. в

$$z = x^{(n)}.$$

Но невозможность последнего равенства была доказана раньше.

4. Докажем, что *любое разложение группы H в прямую сумму содержит хотя бы одно слагаемое, равномощное H.*

Допустим обратное, т.е. допустим, что

$$H = \bigoplus_{\alpha} C_\alpha,$$

причем каждое прямое слагаемое C_α имеет меньшую, чем H, мощность. Обозначим через M_1 множество индексов α, для которых группа C_α разложима в прямую сумму циклических. Тогда

$$H = \Big(\bigoplus_{\alpha\in M_1} C_\alpha\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\notin M_1} C_\alpha\Big) = D \oplus F, \tag{11}$$

где

$$D = \bigoplus_{\alpha\in M_1} C_\alpha \quad \text{и} \quad F = \bigoplus_{\alpha\notin M_1} C_\alpha.$$

Группа D разложима в прямую сумму циклических подгрупп. Порядки элементов группы D в совокупности ограничены, ибо иначе для группы H существовало бы разложение вида (3).

Докажем, что группы F и H равномощны. Пусть порядки элементов группы D не больше числа p^m. Группа D не содержит элементов высоты $\geqslant m$. Следовательно, все элементы группы H высоты $\geqslant m$ содержатся в группе F. Но согласно определению группы H множество элементов H высоты $\geqslant m$ имеет ту же мощность, что и группа H. Поэтому группы F и H равномощны.

Так как группы C_α имеют мощность, меньшую мощности группы H (или F), то наверное число прямых слагаемых в разложении $F = \bigoplus\limits_{\alpha} C_\alpha$ не может быть конечным. Выберем из прямых слагаемых C_α группы F счетное множество групп $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_i}, \ldots$ Группы C_{α_i} неразложимы в прямую сумму циклических подгрупп, поэтому (см. § 4, следствие 1) содержат циклические прямые слагаемые как угодно большого порядка. Следовательно, каждую группу C_{α_i} можно представить в виде

$$C_{\alpha_i} = [z_{\alpha_i}] \oplus C'_{\alpha_i},$$

причем циклическое прямое слагаемое $[z_{\alpha_i}]$ выбираем так, чтобы порядок z_{α_i} был больше порядка $z_{\alpha_{i-1}}$, $i > 1$; циклическую группу $[z_{\alpha_1}]$ выбираем порядка $\geqslant p$. Если положить теперь $B = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} [z_{\alpha_i}]$, то группу F можно представить в виде

$$F = B \oplus C_1.$$

Поэтому, если положить еще $C = D \oplus C_1$, то

$$H = B \oplus C. \tag{12}$$

Но равенство (12) есть равенство типа (3), невозможность которого была доказана. Следовательно, наше допущение неверно, т.е. любое разложение группы H в прямую сумму содержит прямое слагаемое, равномощное H.

Таким образом, доказано существование групп без элементов бесконечной высоты мощности $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$, неразложимых в прямую сумму групп мощности, меньшей $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$. При этом мощность $\aleph_\alpha$ можно выбрать произвольно.

В частности, так как $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, существуют примарные группы континуальной мощности без элементов бесконечной высоты, неразложимые в прямую сумму групп мощности, меньшей $\mathfrak{c}$.

5. Лемма 3. *Пусть примарная группа A мощности $\aleph_{\alpha+1}$ не содержит элементов бесконечной высоты и имеет подгруппу B мощности, меньшей $\aleph_{\alpha+1}$, такую, что $\overline{A} = A/B$ является полной примарной группой. Тогда A неразложима в прямую сумму подгрупп мощности, меньшей $\aleph_{\alpha+1}$.*

Доказательство. Допустим обратное, т.е. что

$$A = \bigoplus_\alpha C_\alpha, \tag{13}$$

причем каждое слагаемое C_α имеет мощность, меньшую $\aleph_{\alpha+1}$. Каждый элемент y группы B может быть однозначно записан в виде

$$y = z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \ldots + z_{\alpha_n}, \tag{14}$$

где $z_{\alpha_i} \in C_{\alpha_i}$. Обозначим через M множество всех индексов α_i, встречающихся в равенствах (14), когда y пробегает множество всех элементов группы B. Множество M имеет мощность, меньшую или равную $\aleph_\alpha$, ибо B имеет мощность, меньшую или равную $\aleph_\alpha$. Следовательно, так как каждое C_α имеет мощность, меньшую или равную $\aleph_\alpha$, группа $A' = \bigoplus_{\alpha \in M} C_\alpha$ имеет мощность, меньшую или равную $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Группы A и $A'' = \bigoplus_{\alpha \notin M} C_\alpha$ равномощны, ибо из (13) следует

$$A = A' \oplus A''. \tag{15}$$

По условию факторгруппа A/B является полной, но $B \subset A'$, поэтому A/A' также будет полной примарной группой, ибо она изоморфна факторгруппе группы A/B. Тогда в силу (15)

$$A/A' \cong A'',$$

т.е. A'' также будет полной примарной группой. Но это невозможно, ибо A, следовательно, и A'' по условию не содержат элементов бесконечной высоты.

6. Предположим, что существуют мощности $\aleph_\alpha$ такие, что

$$\aleph_{\alpha+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_0}.$$

Докажем, что существует группа без элементов бесконечной высоты мощности $\aleph_{\beta+1}$, неразложимая в прямую сумму групп мощности, меньшей $\aleph_{\beta+1}$, если мощность $\aleph_{\beta+1}$ удовлетворяет условию

$$\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_0}.$$

Рассмотрим группу $H = (H_1,\, H_2,\, \ldots,\, H_i,\, \ldots)$, где H_i – прямая сумма циклических групп порядка p^i и имеет мощность $\aleph_\alpha$. Группа H не содержит элементов бесконечной высоты и имеет мощность $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$.

Обозначим через K группу всех тех элементов из H, которые имеют только конечное число компонент, отличных от нуля. Группа K, как легко видеть, имеет мощность $\aleph_\alpha$. Докажем, что факторгруппа $\overline{H} = H/K$ является полной примарной группой, т.е. группа $\overline{H}$ не содержит элементов нулевой высоты. Пусть $\bar{z}$ – произвольный элемент из $\overline{H}$ и z – какой-нибудь элемент $\notin K$ из смежного класса $\bar{z}$, т.е. $\bar{z} = z + K$. Пусть

$$z = (z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_i,\, \ldots).$$

Так как порядки компонент z_i должны быть в совокупности ограничены, то при достаточно большом k компоненты z_i будут иметь отличную от нуля высоту для каждого $i \geqslant k$. Поэтому элемент

$$z' = z - (z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_{k-1},\, 0,\, 0,\, \ldots) = (0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, z_k,\, z_{k+1},\, \ldots)$$

имеет высоту в H, отличную от нуля. Но

$$z' \in \bar{z} = z + K,$$

поэтому $\bar{z}$ также имеет в $\overline{H}$ высоту, отличную от нуля. Этим доказано, что $\overline{H}$ есть полная примарная группа.

Так как $\overline{H}$, будучи полной примарной группой, разложима в прямую сумму квазициклических подгрупп (§ 1, III), то ее можно представить в виде

$$\overline{H} = \overline{\Gamma} \oplus \overline{D},$$

где $\overline{\Gamma}$ и $\overline{D}$ также полные примарные группы и $\overline{\Gamma}$ имеет мощность $\aleph_{\beta+1}$,

$$\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_0}.$$

Обозначим через Γ подгруппу группы H, для которой $\overline{\Gamma} = \Gamma/K$.

Группа Γ (как и $\overline{\Gamma}$) имеет мощность $\aleph_{\beta+1}$, не содержит элементов бесконечной высоты и имеет подгруппу K мощности $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}$ такую, что $\overline{\Gamma} = \Gamma/K$ является полной группой.

Следовательно, по доказанной лемме *группа* Γ *неразложима в прямую сумму групп мощности, меньшей* $\aleph_{\beta+1}$.

7. Лемма 4. *Если* $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, *то* $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$.

Доказательство. Обозначим через $W(\beta)$ множество всех порядковых чисел $< \beta$ и через Φ_β – множество всех счетных подмножеств множества $W(\beta)$. Через $\omega_{\alpha+1}$ обозначим наименьшее порядковое число, для которого множество $W(\omega_{\alpha+1})$ имеет мощность $\aleph_{\alpha+1}$.

Докажем, что

$$\Phi_{\omega_{\alpha+1}} = \bigcup_{\beta<\omega_{\alpha+1}} \Phi_\beta. \tag{16}$$

Так как
$$\Phi_{\omega_{\alpha+1}} \supset \bigcup_{\beta<\omega_{\alpha+1}} \Phi_\beta,$$
то достаточно доказать, что
$$\Phi_{\omega_{\alpha+1}} \subset \bigcup_{\beta<\omega_{\alpha+1}} \Phi_\beta.$$
Пусть M – элемент из $\Phi_{\omega_{\alpha+1}}$, т.е. какое-нибудь счетное множество порядковых чисел, меньших $\omega_{\alpha+1}$. Ближайшее следующее за этим множеством число β также меньше $\omega_{\alpha+1}$ [12]. Поэтому множество M есть также элемент Φ_β, $\beta < \omega_{\alpha+1}$. Следовательно,
$$\Phi_{\omega_{\alpha+1}} \subset \bigcup_{\beta<\omega_{\alpha+1}} \Phi_\beta.$$

Множество $W(\omega_{\alpha+1})$ имеет мощность $\aleph_{\alpha+1}$, следовательно, $\Phi_{\omega_{\alpha+1}}$ есть множество мощности $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}$. Множество $W(\beta)$ имеет мощность, меньшую или равную $\aleph_\alpha$, при $\beta < \omega_{\alpha+1}$, следовательно, Φ_β имеет мощность, меньшую или равную $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Поэтому из (16) получаем
$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \leqslant \sum_{\beta<\omega_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

Так как по условию $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, то
$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_{\alpha+1}^2 = \aleph_{\alpha+1}, \quad \text{т.е. } \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}.$$

8. Теорема 8. *Существуют примарные группы любой непредельной мощности $\aleph_{\alpha+1}$, не содержащие элементов бесконечной высоты и неразложимые в прямую сумму групп мощности, меньшей $\aleph_{\alpha+1}$.*

Доказательство. Для случая, когда $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}$, теорема доказана раньше (п. 4). Если
$$\aleph_{\alpha+1} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}, \tag{17}$$
то, на основании доказанного в п. 6, теорема также верна, когда выполняется неравенство
$$\aleph_{\alpha+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_0}. \tag{18}$$

Докажем, что неравенство (17) всегда влечет за собой неравенство (18). Действительно, равенство $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$ невозможно, так как иначе
$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1},$$
что противоречит (17). Кроме того, $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_0}$, ибо, если бы $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$, то по доказанной лемме было бы также $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}$, что снова противоречит (17). Следовательно, $\aleph_{\alpha+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Теорема доказана.

(Поступило в редакцию 16/VI 1940 г.)

[12] См. Ф. Хаусдорф [8]; с. 77.

Литература

1. Prüfer H., *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **17** (1923), 35–61.

2. Baer R., *The subgroup of the elements of finite order of an Abelian group*, Ann. Math., **37:4** (1936), 766–781.

3. Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы*, М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938.

4. Fomin S., *Über periodische Untergruppen der unendlichen Abelschen Gruppen*, Мат. сб., **2(44):5** (1937), 1007–1009.

5. Baer R., *The decomposition of enumerable primary Abelian groups into direct summands*, Quart. J. Math., Oxford series, **6** (1935), 217–221.

6. Ulm H., *Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **40** (1935), 205–207.

7. Курош А. Г., *Несколько замечаний к теории бесконечных групп*, Мат. сб., **5(47):2** (1939), 347–354.

8. Хаусдорф Ф., *Теория множеств*, М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.

К теории абелевых групп произвольной мощности. II

Настоящая работа является продолжением моей работы под тем же названием [1]. Она посвящена изучению главным образом примарных абелевых групп. Абелева группа называется *примарной*, если порядки всех ее элементов являются степенями одного и того же простого числа p.

В § 1 дан критерий разложимости примарной группы произвольной мощности в прямую сумму циклических подгрупп. Его частными случаями являются критерии Прюфера [2]. Из этого критерия выводится ряд важных следствий; в частности, доказывается, что если абелева группа разлагается в прямую сумму циклических групп, то этим же свойством обладает и каждая ее подгруппа.

В § 2 вводится понятие базисной подгруппы примарной группы. Базисные подгруппы разлагаются в прямую сумму циклических подгрупп и факторгруппа группы по базисной подгруппе есть полная примарная группа [3], т.е. является прямой суммой квазициклических подгрупп. В § 2 доказывается, что базисные подгруппы содержатся в каждой примарной группе, причем различные базисные подгруппы одной и той же группы изоморфны. Следовательно, каждая примарная группа является расширением группы, разложимой в прямую сумму циклических подгрупп, с помощью некоторой полной примарной группы.

Согласно теореме Ульма [4] строение счетной примарной группы однозначно определяется некоторой полной группой и некоторой последовательностью счетных примарных групп, не содержащих элементов бесконечной высоты (система инвариантов Ульма). Счетные же примарные группы, не содержащие элементов бесконечной высоты, по теореме Прюфера разлагаются в прямую сумму циклических подгрупп. Поэтому теорема Ульма в сочетании с теоремой Прюфера позволяет дать классификацию всех счетных примарных групп. В связи с этим возникла проблема о справедливости теоремы Ульма для несчетных примарных групп [5]. В § 6 доказано, что эта проблема имеет отрицательное решение, т.е. система инвариантов Ульма в случае несчетных примарных групп будет уже неполной.

Изучение счетных примарных групп с помощью теоремы Ульма сводится к изучению счетных примарных групп, не содержащих элементов бесконечной

[1] См. Л. Я. Куликов [1].
[2] См. H. Prüfer [2].
[3] См. А. Г. Курош [3].
[4] См. H. Ulm [4].
[5] См. А. Г. Курош [5].

высоты. Вероятно, изучение несчетных примарных групп также в значительной степени будет сводиться к изучению примарных групп, которые не содержат элементов бесконечной высоты. Строение счетных примарных групп без элементов бесконечной высоты полностью определяется теоремой Прюфера. Выяснению строения примарных групп произвольной мощности, не содержащих элементов бесконечной высоты, посвящены параграфы третий, четвертый и пятый.

§ 1

При изучении примарных групп важную роль играет понятие *высоты* элемента. Пусть A – примарная группа по отношению к простому числу p. Будем говорить, что элемент a имеет в A высоту n, если уравнение $p^k x = a$, где k – целое число $\geqslant 0$, разрешимо в A при $k \leqslant n$ и неразрешимо при $k > n$. Отличный от нуля элемент a называется *элементом бесконечной высоты*, если уравнение $p^k x = a$ разрешимо в A при любом k.

Будем обозначать через $p^n A$ подгруппу группы A, образованную элементами $p^n x$, где $x \in A$. Тогда, очевидно, a имеет в A высоту n, если a содержится в $p^n A$, но не содержится в $p^{n+1} A$. Отличный от нуля элемент a будет иметь бесконечную высоту в A, если $a \in p^n A$ при любом натуральном n.

Теорема 1. *Примарная абелева группа A тогда и только тогда разлагается в прямую сумму циклических групп, когда она является объединением возрастающей последовательности подгрупп, у каждой из которых высоты элементов в A ограничены в совокупности.*

1. Достаточность условия. Пусть A – объединение возрастающей последовательности подгрупп

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\beta \subset A_{\beta+1} \subset \ldots, \tag{1}$$

причем в каждой подгруппе A_α высоты элементов в A ограничены в совокупности. Образуем последовательность групп $B_1, B_2, \ldots, B_\alpha, \ldots$ следующим образом: группа B_1 образована элементом порядка p из A_1; если группы $B_{\alpha'}$ уже построены для всех $\alpha' < \alpha$, то находим в последовательности (1) группу с наименьшим индексом, содержащую элемент y_α порядка p, не содержащийся в группах $B_{\alpha'}$ с $\alpha' < \alpha$; через B_α обозначаем группу, образованную всеми группами $B_{\alpha'}$ с индексами $\alpha' < \alpha$ и элементом y_α. Очевидно, объединение построенной возрастающей последовательности групп B_α дает подгруппу $\overline{A}$, образованную всеми элементами порядка p группы A, причем в каждой из групп B_α высоты элементов в A также ограничены в совокупности.

В каждой группе B_α выберем среди элементов, не содержащихся в группах $B_{\alpha'}$, $\alpha' < \alpha$, элемент x_α порядка p с наибольшей высотой в A. Тогда, так как

$$B_\alpha = [x_1, x_2, \ldots, x_\alpha] \quad \text{и} \quad B_\alpha \cap [x_{\alpha+1}] = 0,$$

$$\overline{A} = [x_1] \oplus [x_2] \oplus \ldots \oplus [x_\alpha] \oplus [x_{\alpha+1}] \oplus \ldots \tag{2}$$

Если x_α имеет в A высоту h_α, то ввиду выбора элемента x_α каждый элемент из B_α, не содержащийся в группах $B_{\alpha'}$ с $\alpha' < \alpha$, имеет в A высоту, не бо́льшую h_α. Пусть x'_α – элемент A такой, что $p^{h_\alpha} x'_\alpha = x_\alpha$. Ввиду (2) можно образовать прямую сумму всех циклических групп $[x'_\alpha]$.

Положим
$$G = [x'_1] \oplus \ldots \oplus [x'_\alpha] \oplus [x'_{\alpha+1}] \oplus \ldots \tag{3}$$

Докажем, что $G = A$. Очевидно, $G \subset A$.

Докажем, что любой элемент x порядка p из A имеет в группах A и G одинаковую высоту.

На основании (2)
$$x = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_n},$$
где a_{α_i} – элемент порядка p группы $[x_{\alpha_i}]$, следовательно, как и элемент x_{α_i}, имеет высоту h_{α_i} в группах A и G. Высота h элемента x в группе G в силу (3) равна наименьшему из чисел h_{α_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Остается доказать, что высота x в A не больше h. Пусть k – наибольший индекс такой, что $h_{\alpha_k} = h$ и $h_{\alpha_i} > h$ при $i > k$. Тогда в сумме $x = (a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_k}) + (a_{\alpha_{k+1}} + \ldots + a_{\alpha_n})$ второе слагаемое имеет в A высоту, бо́льшую h (или отсутствует, когда $k = n$), а первое слагаемое имеет в A высоту, не бо́льшую $h_{\alpha_k} = h$, ибо элемент $(a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_k})$ содержится в B_{α_k} и не содержится в $B_{\alpha'}$ с $\alpha' < \alpha_k$. Поэтому высота x в A не больше h. Таким образом, x имеет в группах A и G одинаковую высоту.

Пусть уже доказано, что *каждый элемент группы A порядка p^n содержится в G и имеет в группах G и A одинаковую высоту.* Докажем, что это же имеет место для любого элемента y из A порядка p^{n+1}.

Элемент py имеет порядок p^n и потому в группах A и G имеет, согласно индуктивному предположению, одинаковую высоту. Пусть $k+1$ эта высота и z – элемент из G такой, что $p^{k+1}z = py$. Элемент y содержится в G, ибо иначе $p^k z - y$ будет элементом порядка p и не будет содержаться в G, что по доказанному невозможно. Докажем, что y имеет в группах A и G одинаковую высоту. Так как в группах A и G py имеет высоту $k+1$ и $p^{k+1}z = py$, то в этих группах $p^k z$ имеет высоту k, а высота y не больше k. Поэтому, если $y = p^k z$, то утверждение доказано. Предположим, что $y \neq p^k z$, и пусть k_1 – высота y в A. Так как $k_1 \leqslant k$, то высота $p^k z - y$ в A не меньше k_1. Если бы высота y в G была меньше k_1, то высота элемента $p^k z - y$ в G была бы меньше k_1. Но это невозможно, ибо $p^k z - y$ как элемент порядка p имеет в группах A и G одинаковую высоту. Следовательно, элемент y имеет в группах A и G одинаковую высоту.

2. Необходимость условия. Пусть A – прямая сумма циклических примарных групп. Обозначим через A_i подгруппу, образованную циклическими прямыми слагаемыми, порядок которых не больше p^i. Тогда группа A будет объединением возрастающей последовательности подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$ причем у каждой из групп A_i высоты элементов в A ограничены в совокупности.

Частными случаями этой теоремы являются следующие две теоремы Прюфера[6].

[6] См. H. Prüfer [2].

Теорема (Прюфера). *Счетная примарная абелева группа, не содержащая элементов бесконечной высоты, разлагается в прямую сумму циклических подгрупп,* –

так как счетная группа есть объединение возрастающей последовательности конечных подгрупп, у каждой из которых высоты элементов в группе ограничены в совокупности, так как группа не содержит элементов бесконечной высоты.

Теорема (Прюфера). *Если порядки элементов примарной группы ограничены в совокупности, то она разлагается в прямую сумму циклических подгрупп,* –

так как в этом случае высоты всех элементов группы также ограничены в совокупности.

Теорема 2. *Каждая подгруппа абелевой группы, разложимой в прямую сумму циклических подгрупп, также разлагается в прямую сумму циклических групп.*

Доказательство. Разобьем доказательство на три части. Сначала докажем теорему для периодических групп, затем для групп без кручения и, наконец, для смешанных групп.

1. Пусть P – прямая сумма примарных циклических групп и P_n – ее подгруппа, образованная прямыми слагаемыми, порядок которых не больше p^n. Группа P есть объединение возрастающей последовательности подгрупп

$$P_1,\, P_2,\, \ldots,\, P_n,\, \ldots$$

Поэтому если H – подгруппа P и $H_n = H \cap P_n$, то подгруппа H есть объединение возрастающей последовательности подгрупп $H_1,\, H_2,\, \ldots,\, H_n,\, \ldots$ Кроме того, высоты элементов из H_n в группе P ограничены в совокупности, ибо это имеет место для P_n и $H_n \subset P_n$. Следовательно, по теореме 1 группа H есть прямая сумма циклических подгрупп.

Теорема также верна для периодических групп, так как последние разлагаются в прямую сумму примарных подгрупп.

2. Пусть G – прямая сумма бесконечных циклических групп C_α, $G = \bigoplus\limits_{\alpha<\gamma} C_\alpha$, и A – произвольная ее подгруппа. Докажем, что A также разлагается в прямую сумму циклических групп. Пусть

$$G_\beta = \bigoplus_{\alpha<\beta} C_\alpha, \qquad A_\beta = A \cap G_\beta \qquad (0 < \beta \leqslant \gamma).$$

Имеем возрастающую последовательность подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_\beta, \ldots$ $(\beta \leqslant \gamma)$, причем $A = A_\gamma$. Так как $[G_\beta,\, A_{\beta+1}] \subset G_{\beta+1}$, то

$$A_{\beta+1}/A_\beta = A_{\beta+1}/(G_\beta \cap A_{\beta+1}) \cong [G_\beta,\, A_{\beta+1}]/G_\beta \subset G_{\beta+1}/G_\beta \cong C_\beta,$$

т.е. факторгруппа $A_{\beta+1}/A_\beta$ есть циклическая группа, так как она изоморфна подгруппе циклической группы C_β; поэтому для каждого β в группе $A_{\beta+1}$ найдется элемент $y_{\beta+1}$ такой, что

$$A_{\beta+1} = [A_\beta,\, y_{\beta+1}] \quad \text{и} \quad A_\beta \cap [y_{\beta+1}] = 0 \qquad (1 \leqslant \beta < \gamma). \tag{4}$$

Если обозначить через y_1 элемент, образующий циклическую группу A_1, то равенства (4) показывают, что группа A представляет собою прямую сумму циклических групп, образованных элементами $y_{\beta+1}$, $\beta = 0, 1, \ldots, \alpha, \ldots$ $(\beta < \gamma)$.

3. Пусть B – смешанная абелева группа, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп, и C – ее подгруппа. Обозначим через B^* и C^* максимальные периодические подгруппы, соответственно, групп B и C. Тогда

$$B/B^* \supset [B^*, C]/B^* \cong C/(B^* \cap C) = C/C^*, \tag{5}$$

т.е. факторгруппа C/C^* изоморфна подгруппе группы $\overline{B} = B/B^*$, разложимой в прямую сумму бесконечных циклических групп. Поэтому по доказанному в п. 2 факторгруппа C/C^* также разлагается в прямую сумму циклических групп. Следовательно, C^* является прямым слагаемым C ([1]; § 2, теорема 1), $C = C^* \oplus C'$, причем второе слагаемое C' разлагается в прямую сумму циклических групп, так как $C' \cong C/C^*$. Группа C разлагается в прямую сумму циклических групп, ибо и первое прямое слагаемое C^* разлагается, по доказанному в п. 1, в прямую сумму циклических групп, так как является подгруппой периодической группы B^*, разложимой в прямую сумму циклических групп. Теорема доказана.

Два прямых разложения группы называются *изоморфными*, если прямые слагаемые первого и второго разложений можно поставить во взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответствующие прямые слагаемые были изоморфны.

Теорема 3. *Любые два прямых разложения группы, разложимой в прямую сумму циклических подгрупп, можно подразбить до изоморфных разложений. В частности, изоморфны любые два разложения группы в прямую сумму неразложимых циклических подгрупп.*

Доказательство. Пусть дано произвольное разложение группы, разложимой в прямую сумму циклических подгрупп. Согласно теореме 2 каждое прямое слагаемое такой группы можно разложить в прямую сумму циклических подгрупп. Таким образом, если группа разложима в прямую сумму циклических подгрупп, то всякое ее прямое разложение можно подразбить до разложения в прямую сумму циклических подгрупп. Поэтому достаточно доказать, что изоморфны любые два разложения группы в прямую сумму неразложимых циклических подгрупп.

Пусть B – примарная группа, разложимая в прямую сумму циклических подгрупп, и R – одно из таких разложений. Обозначим через C_i подгруппу, образованную теми элементами порядка p группы B, высота которых в B не меньше $i-1$, и через $\overline{B}_i$ – подгруппу B, образованную элементами порядка p циклических прямых слагаемых порядка p^i в разложении R. Если в разложении R нет прямых слагаемых порядка p^i, то через $\overline{B}_i$ будем обозначать нулевую подгруппу. Легко видеть, что $C_i = \overline{B}_i \oplus C_{i+1}$. Число циклических прямых слагаемых порядка p^i в разложении R определяется мощностью подгруппы $\overline{B}_i$. Так как $\overline{B}_i \cong C_i/C_{i+1}$ и мощность факторгруппы C_i/C_{i+1} не зависит от выбора разложения R, то число прямых слагаемых порядка p^i будет одним и тем же в любом разложении группы B в прямую сумму циклических подгрупп. Поэтому любые два разложения примарной группы в прямую сумму циклических примарных подгрупп изоморфны. Это же утверждение верно и для периодических групп, ибо они разлагаются в прямую сумму примарных.

Пусть теперь A – произвольная абелева группа, разложимая в прямую сумму циклических подгрупп, и D – ее максимальная периодическая подгруппа. Число бесконечных циклических слагаемых в любом разложении A в прямую сумму циклических подгрупп равно рангу факторгруппы A/D, т.е. также не зависит от выбора разложения. Поэтому любые два разложения A в прямую сумму неразложимых циклических подгрупп изоморфны. Теорема доказана.

Абелева группа A называется *полной*, если уравнение $nx = a$ $(a \in A)$ имеет решение в A для каждого целого числа n, отличного от нуля. Легко видеть, что факторгруппа полной группы также будет полной группой. Прямая сумма полных групп есть также полная группа.

Теорема 4[7]. *Каждая абелева группа содержится в некоторой полной абелевой группе.*

Доказательство. Пусть A – произвольная абелева группа и $\mathfrak{m}$ – ее мощность. Построим группу $B = \bigoplus\limits_{\alpha} R_\alpha$, где каждое прямое слагаемое R_α изоморфно аддитивной группе рациональных чисел и индекс α пробегает множество мощности $\mathfrak{m}$. Будучи прямой суммой полных групп, группа B будет полной группой. Выберем в каждой группе R_α какую-нибудь бесконечную циклическую подгруппу C_α и положим $C = \bigoplus\limits_{\alpha} C_\alpha$. Но прямая сумма $\mathfrak{m}$ бесконечных циклических групп может быть гомоморфно отображена на любую абелеву группу мощности $\mathfrak{m}$. Следовательно, группа A изоморфна некоторой факторгруппе группы C, т.е. существует подгруппа $D \subset C$ такая, что $A \cong C/D$. Но группа $\overline{C} = C/D$ содержится в группе $\overline{B} = B/D$, которая является полной группой как факторгруппа полной группы B. Таким образом, группа A изоморфна подгруппе $\overline{C}$ полной группы $\overline{B}$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Каждая абелева группа является объединением счетной возрастающей последовательности подгрупп, разложимых в прямую сумму циклических групп.*

Доказательство. Эта теорема верна для полных групп. Ибо полную группу можно разложить в прямую сумму подгрупп так, что каждое прямое слагаемое будет либо квазициклической группой, либо группой, изоморфной аддитивной группе рациональных чисел[8]. В таком разложении каждое прямое слагаемое есть объединение счетной возрастающей последовательности циклических подгрупп. Из этого легко следует, что полную группу можно представить как объединение счетной возрастающей последовательности подгрупп, разлагающихся в прямую сумму циклических групп.

Пусть теперь A – произвольная абелева группа. Согласно теореме 4 она содержится в некоторой полной группе C. Группу C можно представить как

[7] Для случая примарных абелевых групп эта теорема была установлена А. Г. Курошем [3].

[8] См. А. Г. Курош [3].

объединение счетной возрастающей последовательности подгрупп $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, разложимых в прямую сумму циклических групп. Группы $A_n = A \cap C_n$ разлагаются по теореме 2 в прямую сумму циклических групп. Группа A есть объединение счетной возрастающей последовательности подгрупп

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n,\ \dots,$$

разложимых в прямую сумму циклических групп.

§ 2

Подгруппа C абелевой группы A называется *сервантной* в A, если из разрешимости уравнения $nx = c$ в группе A, где c – произвольный элемент C, следует его разрешимость в C.

Если A – примарная группа и C – ее подгруппа, то C будет сервантной в A тогда и только тогда, когда каждый элемент из C имеет в группах C и A одинаковую высоту ([1], § 1).

Можно дать еще другое определение сервантной подгруппы. Подгруппа C абелевой группы A называется *сервантной* в A, если в каждом смежном классе $\bar{a} = a + C$ $(a \in A)$ имеется элемент группы A того же порядка, что и порядок $\bar{a}$ в факторгруппе $\overline{A} = A/C$.

Докажем эквивалентность этих определений.

Допустим, что C сервантна в A по первому определению и докажем, что в смежном классе $\bar{a} = a + C$ $(a \in A)$ имеется элемент того же порядка, что и порядок $\bar{a}$ в группе $\overline{A} = A/C$. Если $\bar{a}$ имеет в $\overline{A}$ бесконечный порядок, то в качестве такого элемента можно взять любой элемент из смежного класса $\bar{a} = a + C$. Если же $\bar{a}$ имеет в $\overline{A}$ конечный порядок n, то $na = c \in C$. Так как C сервантна в A согласно первому определению, то в группе C найдется такой элемент z, что $nz = c$. Тогда элемент $a - z$ содержится в смежном классе $\bar{a}$ и имеет порядок n.

Пусть теперь C – сервантная подгруппа A по второму определению. Допустим, что уравнение $nx = c$ разрешимо в A $(c \in C)$. Согласно второму определению в смежном классе $\bar{x} = x + C$ найдется элемент, имеющий в A тот же порядок, что и порядок $\bar{x}$ в факторгруппе $\overline{A} = A/C$. Если y – такой элемент, то $ny = 0$. Очевидно, элемент $x - y$ содержится в группе C и $n(x - y) = c$. Таким образом, из разрешимости уравнения $nx = c$ в группе A следует его разрешимость в подгруппе C.

Этим доказана эквивалентность первого и второго определений сервантной подгруппы.

В дальнейших рассуждениях будут использованы следующие свойства сервантных подгрупп, доказанные в работе [1].

I. *Если C – сервантная подгруппа абелевой группы A и порядки элементов C ограничены в совокупности, то C является прямым слагаемым группы A* ([1]; § 4, теорема 5).

II. *Если C – сервантная подгруппа абелевой группы A и факторгруппа $\overline{A} = A/C$ разложима в прямую сумму циклических групп, то C является прямым слагаемым A* ([1]; § 2, теорема 1).

III. *Если C – сервантная подгруппа абелевой группы A и группа $\overline{B} = B/C$ сервантна в $\overline{A} = A/C$, то подгруппа B сервантна в A* ([1]; § 2, лемма 2).

При изучении примарных абелевых групп важную роль играет понятие базисной подгруппы.

Определение. Группа B называется *базисной подгруппой* примарной абелевой группы A, если

(1) B разлагается в прямую сумму циклических групп,

(2) B есть сервантная подгруппа A,

(3) факторгруппа A/B является полной группой.

В группах, у которых порядки элементов ограничены в совокупности, существует единственная базисная подгруппа, совпадающая со всей группой. Но уже в группах, разложимых в прямую сумму циклических и содержащих элементы как угодно большого порядка, есть бесконечно много различных базисных подгрупп.

Каждая ли примарная группа содержит базисные подгруппы? Что общего имеют различные базисные подгруппы одной и той же группы?

Теорема 6. *Каждая примарная абелева группа содержит базисные подгруппы и все они изоморфны между собой.*

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Элемент примарной абелевой группы G, имеющий в G высоту n и порядок p, можно включить в циклическую подгруппу порядка p^{n+1}, являющуюся прямым слагаемым G.*

Пусть элемент x имеет в G высоту n и порядок p и y – элемент из G такой, что $p^n y = x$. Докажем, что циклическая подгруппа $[y]$ порядка p^{n+1} является сервантной подгруппой G, т.е. элементы группы $[y]$ имеют в G ту же высоту, что и в $[y]$. Элементы порядка p циклической группы $[y]$ имеют в группах $[y]$ и G одинаковую высоту, равную n. Если z – произвольный элемент подгруппы $[y]$, имеющий в $[y]$ высоту h и порядок p^{k+1}, то, очевидно, $h+k+1 = n+1$ и $h = n-k$. Если бы элемент z имел в G высоту, бóльшую $n-k$, то высота элемента $p^k z$ в G была бы больше n. Но это невозможно, так как $p^k z$, будучи элементом порядка p группы $[y]$, имеет в G высоту n. Но сервантная подгруппа, у которой порядки элементов ограничены в совокупности, согласно свойству I является прямым слагаемым группы. Поэтому циклическая подгруппа $[y]$ порядка p^{n+1} и будет искомым прямым слагаемым группы G.

Лемма 2. *Примарная группа, у которой каждый элемент порядка p имеет бесконечную высоту, является полной группой.*

Пусть каждый элемент порядка p группы G имеет в ней бесконечную высоту. Докажем, что G – полная группа. Достаточно доказать, что каждый элемент G имеет в G бесконечную высоту. Допустим, что в группе G имеются элементы конечной высоты и x – такой элемент наименьшего порядка. Пусть k – высота x в G. Тогда px уже будет элементом бесконечной высоты и поэтому в G найдется элемент y такой, что $p^{k+2}y = px$. Элемент $p^{k+1}y$ имеет высоту, бо́льшую k, и потому отличен от x. Поэтому элемент $x - p^{k+1}y$ имеет в G порядок p и высоту k. Но это невозможно, так как по условию элементы порядка p имеют в G бесконечную высоту. Следовательно, в группе G нет элементов конечной высоты и, значит, она является полной группой.

Доказательство теоремы. Прежде всего докажем существование по крайней мере одной базисной подгруппы в любой примарной абелевой группе. Это достаточно доказать для неполных групп, потому что в полных группах нулевая подгруппа является базисной. Пусть A – произвольная неполная примарная группа. Согласно лемме 2 в A есть элементы порядка p конечной высоты. Поэтому согласно лемме 1 в A имеются сервантные подгруппы, отличные от нулевой, с элементами, порядки которых ограничены в совокупности. Обозначим через M_i, $i = 1, 2, \dots$, множество всех сервантных в A подгрупп, у которых порядки элементов не превосходят p^i.

Из первого определения сервантных подгрупп вытекает, что объединение любой возрастающей последовательности сервантных в A подгрупп также является сервантной подгруппой группы A.

Следовательно, объединение возрастающей последовательности групп из множества M_i также принадлежит этому множеству. Поэтому в M_i найдется подгруппа C_i, которая не содержится ни в какой большей подгруппе из множества M_i. При этом будем считать, что при $i > 1$ C_i есть объединение возрастающей последовательности подгрупп, содержащих подгруппу C_{i-1}. Обозначим через B объединение возрастающей последовательности сервантных в A подгрупп $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ Докажем, что B является базисной подгруппой группы A. Группа B будет сервантной в A подгруппой, так как она представляет собою объединение возрастающей последовательности сервантных в A подгрупп. Так как C_i сервантна в A и порядки элементов C_i ограничены в совокупности, то и высоты элементов C_i в группе A (а значит, и в B) ограничены в совокупности. Поэтому согласно теореме 1 группа B разлагается в прямую сумму циклических групп. Необходимо еще доказать, что факторгруппа $\overline{A} = A/B$ есть полная группа.

В группе C_i порядки элементов не превосходят p^i и она сервантна в A. Поэтому (свойство I) C_i является прямым слагаемым группы A:

$$A = C_i \oplus A_i \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{1}$$

Высота каждого элемента порядка p из прямого слагаемого A_i больше или равна i. Если бы элемент x из A_i порядка p имел в A_i высоту $k < i$, то согласно лемме 1 его можно было бы включить в циклическую группу C порядка $p^{k+1} \leqslant p^i$, являющуюся прямым слагаемым A_i. Но тогда группа C_i содержалась бы в большей подгруппе $C_i \oplus C$, которая сервантна в A и порядки элементов которой не превосходят p^i, а это противоречит выбору C_i. В факторгруппе $\overline{A} = A/B$ каждый элемент $\bar{x}$ порядка p имеет бесконечную высоту. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что при любом наперед заданном натуральном i в смежном классе $\bar{x}$ найдется элемент группы A, имеющий в A высоту, бóльшую или равную i. Так как B – сервантная подгруппа A, то в смежном классе $\bar{x}$ найдется элемент x группы A порядка p, $\bar{x} = x + B$. Согласно (1) $x = y + z$, где $y \in C_i$ и $z \in A_i$. Элемент z имеет порядок p, ибо иначе $z = 0$ и $x \in B$, а это противоречит тому, что $\bar{x}$ имеет в $\overline{A}$ порядок p. Поэтому z как элемент порядка p из A_i имеет в A высоту, бóльшую или равную i. Так как $z = x - y$ и $y \in C_i \subset B$, то z содержится в смежном классе $\bar{x} = x + B$. Следовательно, каждый элемент порядка p факторгруппы $\overline{A} = A/B$ имеет бесконечную высоту. Поэтому согласно лемме 2 $\overline{A}$ есть полная группа. Этим доказано, что B есть базисная подгруппа A.

Докажем, что любые две базисные подгруппы примарной группы A изоморфны. Если B – произвольная базисная подгруппа A, то она обладает следующим важным свойством:

$$A = [B,\, p^n A], \tag{2}$$

причем n – любое натуральное число. Действительно, пусть x – произвольный элемент A и $\bar{x} = x + B$. В факторгруппе $\overline{A} = A/B$ найдется элемент $\bar{y} = y + B$ такой, что $p^n \bar{y} = \bar{x}$, ибо $\overline{A}$ – полная группа. Тогда $p^n y = x + b$, где $b \in B$, и $x = -b + p^n y$, что и доказывает равенство (2).

Из теоремы об изоморфизме следует

$$A/p^n A = [B,\, p^n A]/p^n A \cong B/(B \cap p^n A) = B/p^n B.$$

Равенство

$$B \cap p^n A = p^n B$$

следует из того, что B – сервантная подгруппа A. Если B' – другая базисная подгруппа A, то также

$$A = [B',\, p^n A] \quad \text{и} \quad A/p^n A \cong B'/p^n B'.$$

Поэтому для любого натурального числа

$$B/p^n B \cong B'/p^n B' \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{3}$$

В факторгруппах $B/p^n B$ и $B'/p^n B'$ порядки элементов ограничены в совокупности и потому (§ 1) они разлагаются в прямую сумму циклических подгрупп. В силу (3) и теоремы 3 (§ 1) любые два таких разложения факторгрупп $B/p^n B$ и $B'/p^n B'$ содержат одинаковое число циклических прямых слагаемых порядка p^i. Легко видеть, что при $n > i$ любые два разложения в прямую сумму циклических групп B и $B/p^n B$ также содержат одинаковое число прямых слагаемых порядка p^i. То же имеет место для разложений B' и $B'/p^n B'$. Поэтому в любых двух разложениях групп B и B' в прямую сумму циклических подгрупп содержится одинаковое число циклических прямых слагаемых порядка p^i, $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, базисные подгруппы B и B' изоморфны. Теорема доказана.

Если порядки элементов базисной подгруппы B группы A ограничены в совокупности, то A разлагается в прямую сумму групп B и некоторой полной группы.

Это предложение легко следует из равенства (2) $A=[B,\,p^nA]$. Действительно, так как в этом случае высоты элементов B в группе A также ограничены в совокупности, то при достаточно большом n будет $B\cap p^nA=0$. Поэтому $A=B\oplus p^nA$, причем p^nA есть полная группа, так как $p^nA\cong A/B$ и B – базисная подгруппа A.

В частности, *если порядки элементов базисной подгруппы B примарной группы A ограничены в совокупности и A не содержит элементов бесконечной высоты, то A совпадает со своей базисной подгруппой B, $A=B$.*

Если базисная подгруппа B группы A бесконечна, то она имеет ту же мощность, что и факторгруппа A/pA.

Так как B – бесконечная группа и разлагается в прямую сумму конечных циклических подгрупп, то она имеет ту же мощность, что и факторгруппа B/pB. Но из равенства $A=[B,\,pA]$ в силу теоремы об изоморфизме следует

$$A/pA\cong B/(B\cap pA)=B/pB.$$

Поэтому базисная подгруппа B имеет ту же мощность, что и группа A/pA.

Теорема 7. *Если C – сервантная подгруппа примарной абелевой группы A, то A/C тогда и только тогда будет полной группой, когда C содержит базисную подгруппу группы A.*

Доказательство. Допустим, что A/C – полная группа, и докажем, что C содержит базисную подгруппу группы A. Обозначим через B базисную подгруппу группы C и докажем, что B будет базисной подгруппой также и группы A. Так как B – сервантная подгруппа C, а C сервантна в A, то из первого определения сервантной подгруппы вытекает, что B – сервантная подгруппа A. Группа B разлагается в прямую сумму циклических подгрупп, так как является базисной подгруппой C. Докажем еще, что A/B есть полная группа. Так как B – базисная подгруппа C, то C/B будет полной группой. Но полная группа является прямым слагаемым каждой абелевой группы, в которой она содержится. Поэтому C/B есть прямое слагаемое факторгруппы A/B:

$$A/B=C/B\oplus D/B.$$

Следовательно,

$$D/B\cong(A/B)/(C/B)\cong A/C.$$

Но по условию A/C есть полная группа. Поэтому полной будет и группа D/B. Следовательно, A/B – полная группа (как прямая сумма двух полных групп).

Обратно, если B – базисная подгруппа A и $B\subset C$, то легко доказать, что A/C есть полная группа. Действительно, группа $\overline{A}=A/B$ является полной, так как B – базисная подгруппа A. Если положить $\overline{C}=C/B$, то $A/C\cong\overline{A}/\overline{C}$. Но факторгруппа полной группы также есть полная группа. Следовательно, группа A/C, изоморфная факторгруппе полной группы $\overline{A}$, есть полная группа.

§ 3

В этом и следующих двух параграфах будут рассмотрены примарные абелевы группы, не содержащие элементов бесконечной высоты. Среди этого класса групп естественно выделяются p-замкнутые группы, которые в некотором смысле являются максимальными среди групп с одной и той же базисной подгруппой (теорема 9).

Определение. Пусть

$$y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n,\, \dots \tag{1}$$

– последовательность элементов примарной группы A, не содержащей элементов бесконечной высоты. Последовательность (1) будет называться *сходящейся* в A, если в группе A есть элемент y такой, что $y - y_i \in p^i A$, $i = 1, 2, 3, \dots$ Элемент y будем называть *предельным* для последовательности (1).

Пересечение подгрупп $pA, p^2A, \dots, p^nA, \dots$ равно нулю, ибо группа A не содержит элементов бесконечной высоты. Отсюда следует, что для сходящейся последовательности существует только один предельный элемент. Действительно, если элементы y и z будут предельными для последовательности (1), то $y - y_i \in p^iA$, $z - y_i \in p^iA$, т.е. $y - z \in p^iA$, $i = 1, 2, \dots$; значит, $y - z = 0$ и $y = z$. Таким образом, последовательность (1) будет сходящейся, если существует один и только один элемент, принадлежащий смежным классам $y_1 + pA$, $y_2 + p^2A, \dots, y_n + p^nA, \dots$

Для того чтобы последовательность (1) сходилась, необходимо, чтобы

$$y_{i+1} - y_i \in p^iA, \quad i = 1, 2, \dots$$

Это следует из того, что $y - y_i \in p^iA$, $i = 1, 2, \dots$

Определение. Примарная группа A, не содержащая элементов бесконечной высоты, называется *p-замкнутой*, если сходится в A каждая последовательность

$$y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n,\, \dots,$$

у которой порядки элементов y_i ограничены в совокупности и $y_{i+1} - y_i \in p^iA$, $i = 1, 2, \dots$

Определение. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ – счетное множество абелевых групп. Построим из этих групп группу $\overline{H}$ следующим образом. Элементом группы $\overline{H}$ будем считать всякую последовательность

$$x = (x_1,\, \dots,\, x_n,\, \dots),$$

где $x_i \in H_i$, $i = 1, 2, \dots$ Сумма двух элементов x и y группы $\overline{H}$,

$$y = (y_1,\, \dots,\, y_n,\, \dots),$$

определяется формулой

$$x + y = (x_1 + y_1,\, \dots,\, x_n + y_n,\, \dots). \tag{2}$$

Группу $\overline{H}$ будем называть *бесконечной прямой суммой групп* H_i.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ – примарные по отношению к простому числу p группы, не содержащие элементов бесконечной высоты. Если $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ есть элемент группы $\overline{H}$, то из (2) следует

$$mx = (mx_1, mx_2, \ldots, mx_n, \ldots). \tag{3}$$

Элемент $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ в группе $\overline{H}$ имеет конечный порядок, если порядки компонент x_i как элементов групп H_i ограничены в совокупности. Действительно, если x_i имеет порядок p^{k_i} в группе H_i и p^k – наибольшее из чисел p^{k_i}, $i = 1, 2, \ldots$, то из равенства (3) следует, что элемент x имеет в $\overline{H}$ порядок p^k. Если же порядки компонент x_i в совокупности не ограничены, то элемент $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ имеет в $\overline{H}$ бесконечный порядок. Обозначим через A *максимальную периодическую подгруппу* группы $\overline{H}$, т.е. подгруппу, образованную элементами конечного порядка группы $\overline{H}$. Подгруппа A примарна по отношению к простому числу p и образована всеми теми элементами $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, у которых порядки компонент x_i как элементов H_i ограничены в совокупности. Обозначим через h_i высоту x_i в H_i и через h – наименьшее из чисел h_i, $i = 1, 2, \ldots$ На основании равенства (3) легко показать, что элемент $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ имеет в A высоту h. Следовательно, подгруппа A, как и группы H_i, не содержит элементов бесконечной высоты.

Пусть B – примарная группа, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп, и $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots$ такое ее разложение, при котором прямое слагаемое B_i, $i = 1, 2, \ldots$, есть прямая сумма циклических групп порядка p^i или, если B не имеет прямых слагаемых порядка p^i, нулевая подгруппа; будем называть всякое такое разложение группы B *каноническим*.

Лемма 3. *Каноническому разложению*

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots \tag{4}$$

базисной подгруппы B примарной группы A, не содержащей элементов бесконечной высоты, соответствуют разложения группы A

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

причем $A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Каждому элементу x группы A поставим в соответствие последовательность $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_i – компонента x в прямом слагаемом B_i разложений (5). При этом элементу $x + y$ будет соответствовать последовательность $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$ и различным элементам A соответствуют различные последовательности.

Доказательство. Так как B есть базисная подгруппа A, то равенство $A = [B, p^n A]$ будет выполняться для всякого натурального числа n [§ 2, равенство (2)]. Если положить $C_n = B_{n+1} \oplus B_{n+2} \oplus \ldots$, то ввиду (4)

$$B = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n) \oplus C_n.$$

Положим $A_n = [C_n, p^n A]$, $n = 1, 2, \ldots$, и докажем, что

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $A = [B_1 \oplus \ldots \oplus B_n, A_n]$. Пересечение подгрупп $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ и A_n равно нулю, ибо, если $b \in B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ и $b \in A_n = [C_n, p^n A]$, то $b = c + p^n a$, где $c \in C_n$ и $p^n a \in p^n A$. Так как b и c – элементы B, то и $p^n a$ содержится в B. Из $B = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n) \oplus C_n$ следует $p^n B = p^n C_n$, так как порядки элементов подгруппы $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ не выше p^n. Следовательно, элементы B, высота которых не меньше n, содержатся в C_n. Высота $p^n a$ в B не меньше n, так как B – сервантная подгруппа A. Следовательно, $p^n a \in C_n$. Но тогда и $b \in C_n$, ибо $b = c + p^n a$. Отсюда следует, что $b = 0$, так как в разложении

$$B = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n) \oplus C_n$$

элемент b принадлежит и первому, и второму слагаемому. Таким образом, доказано существование разложений (5).

Так как $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus B_{n+1} \oplus A_{n+1}$ и, очевидно, B_{n+1} и A_{n+1} являются подгруппами A_n, то $A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Равенство $A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}$ показывает, что каждое следующее разложение (5) является подразбиением предыдущего, именно, каждый раз подразбивается последнее слагаемое. Поэтому компонента данного элемента x группы A в прямом слагаемом B_i, $i = 1, 2, \ldots$, будет одной и той же во всех прямых разложениях (5).

Каждому элементу x группы A поставим в соответствие последовательность $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_i – компонента x в прямом слагаемом B_i разложений (5), $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, если элементу y соответствует последовательность $(y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, то элементу $x + y$ будет соответствовать последовательность $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$.

Докажем, что отличному от нуля элементу y соответствует последовательность $(y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, у которой по крайней мере одна компонента y_i отлична от нуля. Пусть y имеет в A высоту k. Так как $A = [B, p^{k+1} A]$, то $y = b + c$, где $b \in B$ и $c \in p^{k+1} A$. Элемент b, равный $y - c$, имеет в A высоту k, ибо y имеет высоту k, c – высоту, бóльшую k. Поэтому в разложениях (5) найдется прямое слагаемое B_i, в котором компонента b_i элемента b имеет высоту k. Компонента c_i элемента c в прямом слагаемом B_i равна нулю или имеет высоту в A, бóльшую k, так как высота элемента c в A больше k. Поэтому компонента y_i элемента y, равная элементу $b_i + c_i$, отлична от нуля.

Теперь легко видеть, что различным элементам группы A соответствуют различные последовательности. Ибо, если различным элементам x и z соответствуют одинаковые последовательности, то элементу $y = x - z$ будет соответствовать последовательность, у которой все компоненты y_i равны нулю, так как $y_i = x_i - z_i$ и $x_i = z_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Но согласно доказанному выше это невозможно, так как элемент y отличен от нуля. Лемма доказана.

Условимся отождествлять элемент x с соответствующей ему по лемме 3 последовательностью и писать $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, если фиксирована базисная подгруппа B и ее каноническое разложение.

Следствие 1. *Если* $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots$ – *каноническое разложение базисной подгруппы* B *примарной группы* A, *не содержащей элементов бесконечной высоты, то* A *содержится в максимальной периодической подгруппе бесконечной прямой суммы групп* $B_1, \ldots, B_n, \ldots$

Действительно, если выбрано каноническое разложение

$$B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots$$

группы B, то каждый элемент x из A согласно лемме 3 изображается последовательностью $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in B_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Мы условились отождествлять x с соответствующей ему последовательностью и писать

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots).$$

Отметим, что порядки компонент $x_i \in B_i$ ограничены в совокупности, так как не превосходят порядка x. Кроме того, различные элементы изображаются различными последовательностями и сумма $x + y$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, определяется формулой

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots). \qquad (*)$$

Теперь легко убедиться в справедливости доказываемого следствия, так как максимальная периодическая подгруппа бесконечной прямой суммы групп $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ образована всевозможными последовательностями

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

где порядки компонент $x_i \in B_i$ ограничены в совокупности, причем сложение этих последовательностей определяется формулой $(*)$.

Теорема 8. *Максимальная периодическая подгруппа бесконечной прямой суммы групп* $B_1, \ldots, B_n, \ldots$, *где* B_k – *прямая сумма циклических групп порядка* p^k *или нулевая группа,* $k = 1, 2, \ldots$, *есть* p-*замкнутая группа, у которой* B, $B = \bigoplus_k B_k$, *будет базисной подгруппой. Обратно, если* A *есть* p-*замкнутая группа и* $B = \bigoplus_k B_k$ – *каноническое разложение какой-нибудь ее базисной подгруппы* B, *то* A *является максимальной периодической подгруппой бесконечной прямой суммы групп* $B_1, \ldots, B_n, \ldots$

Доказательство. **1.** Обозначим через H максимальную периодическую подгруппу бесконечной прямой суммы групп $B_1, \ldots, B_n, \ldots$, где B_k – прямая сумма циклических групп порядка p^k или нулевая группа. Если

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

$x_k \in B_k$, $k = 1, 2, \ldots$, есть элемент H, то легко видеть, что x будет содержаться в $p^i H$ тогда и только тогда, когда $x_k \in p^i B_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Докажем, что H есть p-замкнутая группа. Пусть задана последовательность элементов группы H

$$y^1,\, y^2,\, \ldots,\, y^i,\, \ldots, \tag{6}$$

где $y^i = (y^i_1,\, \ldots,\, y^i_n,\, \ldots)$, $y^i_k \in B_k$, $k = 1,\, 2,\, \ldots$ Докажем, что эта последовательность сходится в H, если порядки элементов y^i ограничены в совокупности и

$$y^{i+1} - y^i \in p^i H \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{7}$$

Из (7) легко получить соотношения

$$y^k - y^i \in p^i H \quad \text{при } k > i. \tag{8}$$

Теперь легко установить, что

$$y^k_k - y^i_k \in p^i B_k \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{9}$$

Если $k > i$, то соотношения (9) следуют из (8). Если же $k < i$, то $y^k_k - y^i_k = 0$. Действительно, при $k < i$ ввиду (8) $y^i - y^k \in p^k H$ и, значит, $y^i_k - y^k_k \in p^k B_k$. Но $p^k B_k = 0$, так как порядки элементов B_k не превосходят p^k, и поэтому $y^i_k - y^k_k = 0$.

Порядки компонент $y^1_1,\, y^2_2,\, \ldots,\, y^n_n,\, \ldots$ как элементов групп B_k ограничены в совокупности, так как по предположению порядки элементов последовательности (6) ограничены в совокупности. Поэтому в группе H имеется элемент $y = (y^1_1,\, y^2_2,\, \ldots,\, y^n_n,\, \ldots)$, где $y^k_k \in B_k$, $k = 1,\, 2,\, \ldots$ Элемент y будет предельным для последовательности (6), так как

$$y - y^i \in p^i H \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots)$$

в силу соотношений (9). Таким образом, H – p-замкнутая группа.

Докажем, что группа B, $B = \bigoplus\limits_k B_k$, является базисной подгруппой H. Элементы $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$, у которых $x_k = 0$ при $k > n$, образуют подгруппу $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$. Обозначим через H_n подгруппу H, образованную элементами $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$, у которых $x_k = 0$ при $k \leqslant n$. Тогда, очевидно,

$$H = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n) \oplus H_n \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Следовательно, подгруппа $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ сервантна в H, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, как прямое слагаемое H. Группа B, $B = \bigoplus\limits_k B_k$, является объединением возрастающей последовательности подгрупп B_1, $B_1 \oplus B_2,\, \ldots,\, B_1 \oplus \ldots \oplus B_n,\, \ldots$, сервантных в H. Поэтому B – сервантная подгруппа H. Надо еще доказать, что факторгруппа $\overline{H} = H/B$ есть полная группа. Выберем в $\overline{H}$ произвольный смежный класс $\bar{x}$. Если $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$ – произвольный элемент из $\bar{x}$, то $\bar{x} = x + B$. Так как порядки компонент $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots$ $(x_k \in B_k,\ k = 1,\, 2,\, \ldots)$ ограничены в совокупности, то для заданного n можно найти такое N, что $x_k \in p^n B_k$ при $k \geqslant N$. В смежном классе $\bar{x} = x + B$ содержится элемент $(0, \ldots, 0, x_N, x_{N+1}, \ldots)$, имеющий в H высоту, бо́льшую или равную n, ибо $x_k \in p^n B_k$, $k \geqslant N$. Таким образом, смежный класс $\bar{x} = x + B$ содержит элементы как угодно большой высоты, ибо в качестве n можно взять любое натуральное число. Поэтому смежный класс $\bar{x}$ как элемент факторгруппы $\overline{H} = H/B$ имеет в $\overline{H}$ бесконечную высоту. Следовательно, $\overline{H}$ есть полная группа. Этим доказано, что B, $B = \bigoplus_k B_k$, есть базисная подгруппа группы H.

2. Пусть A – p-замкнутая группа. Выберем в A произвольную базисную подгруппу B и пусть

$$B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots \tag{10}$$

– какое-нибудь каноническое разложение B. Пусть, далее,

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots) \tag{11}$$

– разложения, соответствующие разложению (10) по лемме 3. Докажем, что A является максимальной периодической подгруппой бесконечной прямой суммы групп $B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_n,\, \ldots$ Для этого достаточно доказать, что в A существует элемент x, изображающийся последовательностью $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$ относительно базисной подгруппы B и ее разложения (10), для любой заданной последовательности $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots$ $(x_k \in B_k)$, у которой порядки элементов ограничены в совокупности.

Для каждого i, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, существует наименьшее число n_i такое, что $x_k \in p^i A$ при $k > n_i$. Положим $y_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_i}$, $i = 1,\, 2,\, \ldots$ Из разложений (11) следуют равенства $p^n A = p^n A_n$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$ Легко видеть, что

$$y_i + p^i A \subset x_1 + \ldots + x_i + A_i,$$

где A_i – прямое слагаемое разложения (11). Поэтому каждый элемент из смежного класса $y_i + p^i A$ имеет компоненту x_i в прямом слагаемом B_i разложений (11). Так как A – p-замкнутая группа, то в A существует элемент x, принадлежащий всем смежным классам

$$y_1 + pA,\, y_2 + p^2 A,\, \ldots,\, y_n + p^n A,\, \ldots,$$

ибо порядки элементов $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n,\, \ldots$ ограничены в совокупности и

$$y_{i+1} - y_i \in p^i A.$$

Компонента элемента x в прямом слагаемом B_i разложений (11) равна x_i, так как $x \in y_i + p^i A$. Следовательно, элемент x изображается последовательностью $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$ относительно базисной подгруппы B и разложения (10). Таким образом, доказана и вторая часть теоремы.

Следствие 1. *Если задана произвольная примарная группа B, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп, то существует p-замкнутая группа, для которой B служит базисной подгруппой.*

Действительно, если $B = \bigoplus_i B_i$ – каноническое разложение группы B, то по теореме 8 максимальная периодическая подгруппа бесконечной прямой суммы групп $B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_n,\, \ldots$ будет p-замкнутой группой, у которой B будет базисной подгруппой.

Отметим, что *p-замкнутая группа тогда и только тогда совпадает со своей базисной подгруппой B, когда порядки элементов B ограничены в совокупности* (§ 2).

Следствие 2. *Две p-замкнутые группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их базисные подгруппы.*

Пусть A и A' будут p-замкнутые группы, у которых базисные подгруппы B и B' изоморфны. Если $B = \bigoplus\limits_i B_i$ и $B' = \bigoplus\limits_i B'_i$ – канонические разложения этих подгрупп, то из изоморфизма B и B' следует, согласно теореме 3 (§ 1), изоморфизм прямых слагаемых B_i и B'_i, $i = 1, 2, \ldots$ Группа A по теореме 8 является максимальной периодической подгруппой бесконечной прямой суммы групп $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, также A' является максимальной периодической подгруппой бесконечной прямой суммы групп $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n, \ldots$ Следовательно, группы A и A' изоморфны, так как изоморфны группы B_i и B'_i, $i = 1, 2, \ldots$

Теорема 9. *Пусть B – базисная подгруппа p-замкнутой группы A. В факторгруппе $\overline{A} = A/B$, которая является полной группой, выделим произвольное прямое слагаемое $\overline{C}$ и обозначим через C подгруппу A такую, что $\overline{C} = C/B$. Обозначим через M множество всех получающихся таким образом подгрупп C группы A. Каждая группа этого множества сервантна в A, и B является для нее базисной подгруппой. Группа A является универсальной для всех примарных групп, имеющих базисные подгруппы, изоморфные группе B, и не содержащих элементов бесконечной высоты, т.е. каждая такая группа изоморфна одной из групп множества M.*

Доказательство. **1.** Пусть C' – произвольная примарная группа, имеющая базисные подгруппы, изоморфные B, и не содержащая элементов бесконечной высоты. Докажем, что группа C' изоморфна некоторой подгруппе из множества M. Пусть B' – базисная подгруппа C' и $B' = \bigoplus\limits_i B'_i$ ее каноническое разложение. По предположению B' изоморфна B. Обозначим через A' максимальную периодическую подгруппу бесконечной прямой суммы групп $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n, \ldots$ Согласно следствию 1 леммы 3 группа C' будет подгруппой A'. В силу теоремы 8 группа A' есть p-замкнутая группа, у которой B', $B' = \bigoplus\limits_i B'_i$, является базисной подгруппой. Факторгруппа $\overline{C}' = C'/B'$ есть полная группа, так как B' – базисная подгруппа C'. Поэтому $\overline{C}'$ будет прямым слагаемым факторгруппы $\overline{A}' = A'/B'$. Группы A и A' изоморфны, так как они p-замкнуты и изоморфны их базисные подгруппы B и B' (следствие 2 теоремы 8). Обозначим через φ изоморфизм между группами A' и A, при котором B' отображается на B. Пусть при изоморфизме φ подгруппа C', $C' \subset A'$, отображается на подгруппу C, $C \subset A$. Тогда, очевидно, факторгруппа $\overline{C} = C/B$ будет прямым слагаемым факторгруппы $\overline{A} = A/B$, ибо $\overline{C}'$ является прямым слагаемым $\overline{A}'$. Следовательно, подгруппа C принадлежит множеству M и данная группа C' изоморфна C.

2. Пусть C – произвольная группа из множества M. Докажем, что C – сервантная подгруппа A и B – базисная подгруппа C. По условию теоремы B есть базисная подгруппа A. Поэтому B сервантна в C, так как она сервантна в A, и разлагается в прямую сумму циклических подгрупп. Кроме того, $\overline{C} = C/B$ есть полная группа, так как по условию теоремы является прямым слагаемым полной группы $\overline{A} = A/B$. Следовательно, B будет базисной подгруппой C.

Докажем еще, что C, $C \in M$, является сервантной подгруппой A. Группа B сервантна в A как базисная подгруппа, и факторгруппа $\overline{C}$, $\overline{C} = C/B$, будучи прямым слагаемым $\overline{A}$, $\overline{A} = A/B$, сервантна в $\overline{A}$. Согласно свойству III (см. § 2) подгруппа C будет сервантной в A. Теорема доказана.

Теорема 10. *Изоморфное отображение примарной группы, не содержащей элементов бесконечной высоты, однозначно определяется заданием образов элементов какой-нибудь ее базисной подгруппы.*

Доказательство. Пусть B – базисная подгруппа примарной группы A, не содержащей элементов бесконечной высоты. Обозначим через φ изоморфное отображение A на группу A'. Очевидно, при этом B отображается на группу B', являющуюся базисной подгруппой A'. Так как B – базисная подгруппа A, то для любого натурального числа n будет $A = [B, p^n A]$ (см. доказательство теоремы 6). Поэтому элемент x группы A для каждого n однозначно определяет смежный класс $K_n = b_n + p^n A$, $b_n \in B$, содержащий x. Пересечение смежных классов $K_1, K_2 \dots, K_n, \dots$ содержит только один элемент x, ибо, если бы в этом пересечении содержался еще другой элемент y, то отличный от нуля элемент $(x - y)$ при любом n содержался бы в $p^n A$ и потому имел бы в A бесконечную высоту. Но это невозможно, так как A не содержит элементов бесконечной высоты. Очевидно, при изоморфном отображении A на A' подгруппа $p^n A$ отображается на $p^n A'$. Поэтому смежный класс $K_n = b_n + p^n A$ отображается на смежный класс $K'_n = \varphi(b_n) + p^n A'$, $n = 1, 2, \dots$ ($\varphi(b_n)$ – элемент B', являющийся образом b_n при изоморфизме φ). В каждом из смежных классов содержится $\varphi(x)$ – образ элемента x.

Как и выше, легко убедиться, что пересечение смежных классов K'_n содержит не более одного элемента. Следовательно, образ $\varphi(x)$ данного элемента x определяется совершенно однозначно как единственный элемент, принадлежащий смежным классам $K'_1, K'_2, \dots, K'_n, \dots$ Но эти смежные классы для данного x определяются, и притом однозначно, как только известны $\varphi(b_n)$ – образы элементов базисной подгруппы B. Таким образом, если изоморфное отображение B на B' можно продолжить до изоморфного отображения A на A', то только одним способом.

§ 4

Этот параграф посвящен некоторым свойствам замкнутых групп.

Очевидно, каждое прямое слагаемое группы является ее сервантной подгруппой. Но существуют сервантные подгруппы, не являющиеся прямыми слагаемыми группы. Возникает вопрос: когда группа C будет прямым слагаемым любой примарной группы, в которой она является сервантной подгруппой? Ответ на этот вопрос в том случае, когда C не содержит элементов бесконечной высоты, дает следующая

Теорема 11. *Примарная группа C, не содержащая элементов бесконечной высоты, будет прямым слагаемым любой примарной группы, в которой она является сервантной подгруппой, тогда и только тогда, когда она p-замкнута.*

Доказательство. **1.** Докажем достаточность условия. Пусть C – p-замкнутая сервантная подгруппа примарной группы A, не содержащей элементов бесконечной высоты. Докажем, что в этом случае C будет прямым слагаемым A. Обозначим через B' какую-нибудь базисную подгруппу C и через $\overline{B}$ – базисную подгруппу факторгруппы $\overline{A} = A/B'$. Пусть B обозначает ту подгруппу A, для которой $\overline{B} = B/B'$. Группа B' будет сервантной подгруппой A, ибо она сервантна в C, а C – сервантная подгруппа A. Следовательно, B' – сервантная подгруппа B. Кроме того, факторгруппа $\overline{B} = B/B'$ разлагается в прямую сумму циклических групп как базисная подгруппа $\overline{A}$. Поэтому B' является прямым слагаемым B (свойство II, § 2), $B = B' \oplus B''$, причем B'' разлагается в прямую сумму циклических групп, ибо она изоморфна факторгруппе $\overline{B} = B/B'$. Группа B есть базисная подгруппа A. Действительно, она разлагается в прямую сумму циклических подгрупп, так как $B = B' \oplus B''$ и B' и B'' разложимы в прямую сумму циклических групп. Кроме того, по свойству III (см. § 2) B есть сервантная подгруппа A, ибо B' сервантна в A и факторгруппа $\overline{B} = B/B'$ сервантна в $\overline{A} = A/B'$. Наконец, факторгруппа A/B есть полная группа, ибо $A/B \cong \overline{A}/\overline{B}$ и $\overline{A}/\overline{B}$ есть полная группа, потому что $\overline{B}$ – базисная подгруппа $\overline{A}$.

Пусть $B' = \bigoplus B_i'$ и $B'' = \bigoplus B_i''$ – канонические разложения групп B' и B''. Если положить $B_i = B_i' \oplus B_i''$, то $B = \bigoplus\limits_i B_i$ будет каноническим разложением базисной подгруппы B. Пусть x – произвольный элемент группы A и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ – его запись относительно канонического разложения $B = \bigoplus\limits_i B_i$. Множество элементов $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ группы A, у которых все компоненты x_i являются элементами подгруппы B'', т.е. $x_i \in B_i''$, образует группу, которую обозначим через D. Множество всех элементов $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ группы A, у которых $x_i \in B_i'$, т.е. все компоненты содержатся в B', образует, очевидно, подгруппу C, ибо C – p-замкнутая группа, B' – ее базисная подгруппа. Если бы элемент x принадлежал и C, и D, то его компоненты x_i принадлежали бы и B', и B''. Но пересечение групп B' и B'' равно нулю. Следовательно, элемент, принадлежащий и C, и D, должен быть равен нулю. Поэтому можно образовать прямую сумму групп C и D. Докажем, что группа A равна прямой сумме подгрупп C и D. Докажем, что произвольный элемент x, $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, группы A содержится в прямой сумме $C \oplus D$. Так как $x_i \in B_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и $B_i = B_i' \oplus B_i''$, то $x_i = x_i' + x_i''$, где $x_i' \in B_i'$ и $x_i'' \in B_i''$. Порядки элементов $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$ ограничены в совокупности. Так как C есть p-замкнутая подгруппа, то в C имеется такой элемент x', что $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots)$ будет его записью относительно канонического разложения $B' = \bigoplus\limits_i B_i'$. Рассмотрим элемент $x'' = x - x'$. Он изображается последовательностью $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'', \ldots)$, так как $x_i = x_i' + x_i''$. Согласно определению группы D элемент x'' содержится в D, так как все его компоненты x_i'' содержатся в B''. Следовательно, $x \in C \oplus D$, ибо $x' \in C$ и $x'' \in D$. Этим доказано, что $A = C \oplus D$.

2. Пусть теперь примарная группа A содержит элементы бесконечной высоты и C – ее p-замкнутая сервантная подгруппа. Докажем, что и в этом случае C будет прямым слагаемым A. Обозначим через A^1 подгруппу, образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в A. Тогда факторгруппа $\overline{A} = A/A^1$ уже не содержит элементов бесконечной высоты. Так как C не содержит элементов бесконечной высоты, то пересечение групп A^1 и C равно нулю, $C \cap A^1 = 0$, и можно образовать прямую сумму $C \oplus A^1$. Факторгруппа $\overline{C} = (C \oplus A^1)/A^1$ будет p-замкнутой, ибо она изоморфна p-замкнутой C. Докажем, что $\overline{C}$ – сервантная подгруппа $\overline{A}$, т.е. что из разрешимости уравнения $n\bar{y} = \bar{c}$ $(\bar{c} \in \overline{C})$ в $\overline{A}$ следует его разрешимость в $\overline{C}$. Пусть $c \in C$ – произвольный элемент из смежного класса $\bar{c}$, $\bar{c} = c + A^1$, и y – элемент из смежного класса $\bar{y}$, $\bar{y} = y + A^1$. Тогда $ny = c + a$, где $a \in A^1$. В группе A существует элемент b такой, что $nb = a$, ибо a имеет в A бесконечную высоту или равен нулю. Так как $n(y - b) = c$ и C сервантна в A, то существует в C элемент z такой, что $nz = c$. Если положить $\bar{z} = z + A^1$, то $n\bar{z} = \bar{c}$, причем $\bar{z} \in \overline{C}$. Этим доказано, что $\overline{C}$ – сервантная подгруппа $\overline{A}$. Таким образом, $\overline{C}$ есть p-замкнутая сервантная в $\overline{A}$ подгруппа и $\overline{A}$ не содержит элементов бесконечной высоты. Поэтому по доказанному в п. 1 $\overline{C}$ является прямым слагаемым $\overline{A}$, $\overline{A} = \overline{C} \oplus \overline{H}$. Обозначим через H подгруппу A, для которой $\overline{H} = H/A^1$. Тогда $A = [C, H]$ и $C \cap H = 0$. Следовательно, A разлагается в прямую сумму групп C и H, $A = C \oplus H$.

3. Докажем необходимость условия. Если C не является p-замкнутой группой, то легко указать примарную группу, для которой C не будет прямым слагаемым, хотя и будет ее сервантной подгруппой. Пусть B – базисная подгруппа C. Согласно теореме 9 C можно рассматривать как сервантную подгруппу p-замкнутой группы G, для которой B также будет базисной подгруппой. Будучи p-замкнутой, группа G не содержит элементов бесконечной высоты, по теореме же 7 факторгруппа G/C будет полной примарной группой. Поэтому C не может быть прямым слагаемым группы G. Теорема доказана.

Теорема 12. *Если данное прямое разложение* $A = \bigoplus_\alpha A_\alpha$ *p-замкнутой группы A имеет бесконечное число прямых слагаемых A_α, то существует такое натуральное число N, что $p^N A_\alpha \neq 0$ только для конечного числа прямых слагаемых A_α. Если B – базисная подгруппа p-замкнутой группы A, то каждому данному ее прямому разложению* $B = \bigoplus_\alpha B_\alpha$ *будет соответствовать прямое разложение* $A = \bigoplus_\alpha A_\alpha$, *при котором B_α есть базисная подгруппа A_α, если существует натуральное число N такое, что $p^N B_\alpha \neq 0$ только для конечного числа индексов α. Каждое прямое слагаемое p-замкнутой группы есть также p-замкнутая группа.*

Доказательство. **1.** Докажем, что прямое слагаемое C p-замкнутой группы A, $A = C \oplus D$, есть также p-замкнутая группа. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ – последовательность элементов из C, для которой $y_{i+1} - y_i \in p^i C$ и порядки элементов y_i ограничены в совокупности. Для этой последовательности существует в A такой элемент y, что $y - y_i \in p^i A$, так как A является p-замкнутой группой. Надо доказать, что $y \in C$. Так как $A = C \oplus D$, то $y = x + z$, где $x \in C$ и $z \in D$. Допустим, что элемент z не равен нулю и имеет в A высоту k. Тогда элемент $y - y_i$, равный элементу $x - y_i + z$, имеет в A высоту, не бо́льшую k, ибо $x - y_i \in C$, $z \in D$ и $A = C \oplus D$. Но это противоречит тому, что элемент $y - y_i$ имеет при $i > k$ высоту, бо́льшую, чем k, ибо $y - y_i \in p^i A$. Следовательно, $z = 0$ и, значит, y есть элемент группы C.

2. Докажем, что если данное прямое разложение $A = \bigoplus\limits_{\alpha} A_\alpha$ p-замкнутой группы A имеет бесконечное число прямых слагаемых, то существует такое натуральное число N, что $p^N A_\alpha \neq 0$ только для конечного числа прямых слагаемых A_α. Допустим, что такого N нет, т.е. для каждого n существует бесконечно много прямых слагаемых A_α таких, что $p^n A_\alpha \neq 0$. Тогда легко построить последовательность $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}, \ldots$ прямых слагаемых разложения $A = \bigoplus\limits_{\alpha} A_\alpha$ таких, что $p^n A_{\alpha_n} \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Образуем прямую сумму групп A_{α_i}, $C = \bigoplus\limits_{i} A_{\alpha_i}$. Согласно доказанному в п. 1 группа C p-замкнута, ибо является прямым слагаемым p-замкнутой группы A. Для каждого натурального числа n выберем в $p^n A_{\alpha_n}$ элемент x_n порядка p. Пусть $y_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, следовательно, $y_{n+1} - y_n \in p^n C$. Так как группа C p-замкнута, то в ней существует элемент y такой, что $y - y_n \in p^n C$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как $C = \bigoplus\limits_{i} A_{\alpha_i}$ и $y \in C$, то найдется такое число k, что $y \in A_{\alpha_1} \oplus A_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus A_{\alpha_k}$. Так как $y_n = y_k + (x_{k+1} + \ldots + x_n)$, то $y - y_n = (y - y_k) - (x_{k+1} + \ldots + x_n)$. Пусть высота $y - y_k$ в C равна h. Тогда при $n > k$ высота элемента $y - y_n$ в C не больше h, ибо $y - y_k \in A_{\alpha_1} \oplus A_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus A_{\alpha_k}$, $x_{k+1} + \ldots + x_n \in \bigoplus\limits_{i>k} A_{\alpha_i}$ и $C = A_{\alpha_1} \oplus A_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus A_{\alpha_k} \oplus \big(\bigoplus\limits_{i>k} A_{\alpha_i}\big)$. Но это противоречит тому, что элемент $y - y_n$, когда n больше h и k, имеет высоту, бо́льшую h, ибо $y - y_n \in p^n C$. Следовательно, допущение было неверным и, значит, искомое N существует.

3. Пусть B – базисная подгруппа p-замкнутой группы A. Докажем, что каждому разложению B, $B = B^1 \oplus B^2 \oplus \ldots \oplus B^n$, в прямую сумму конечного числа прямых слагаемых соответствует прямое разложение $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$, при котором B^i является базисной подгруппой A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажем это предложение сначала для $n = 2$, т.е. когда B разлагается в прямую сумму двух слагаемых, $B = B^1 \oplus B^2$. Пусть $B^1 = \bigoplus\limits_{i} B_i^1$ и $B^2 = \bigoplus\limits_{i} B_i^2$ суть канонические разложения групп B^1 и B^2. Если положить $B_i = B_i^1 \oplus B_i^2$, то $B = \bigoplus\limits_{i} B_i$ будет каноническим разложением базисной подгруппы B. Пусть y – элемент A и $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ – его запись относительно канонического разложения $B = \bigoplus\limits_{i} B_i$. Обозначим через A_1 группу, образованную элементами

$$y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots),$$

у которых $y_i \in B_i^1 \subset B^1$, т.е. все компоненты y_i суть элементы B^1. Через A_2

обозначим группу, образованную элементами $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$, у которых $y_i \in B_i^2 \subset B^2$, $i = 1, 2, \dots$ Очевидно, B^1 и B^2 будут базисными подгруппами соответственно групп A_1 и A_2. Группы A_1 и A_2 не имеют общих элементов, кроме нуля, так как пересечение групп B^1 и B^2 равно нулю. Теперь легко видеть, что $A = A_1 \oplus A_2$. Действительно, пусть x – произвольный элемент A и $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ – его запись относительно канонического разложения $B = \bigoplus\limits_i B_i$. Так как $B_i = B_i^1 \oplus B_i^2$, то $x_i = x_i^1 + x_i^2$, $i = 1, 2, \dots$ Порядки элементов x_i^1 и x_i^2 ограничены в совокупности и так как A p-замкнута, то в A существуют элементы $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1, \dots)$ и $x^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2, \dots)$. Так как $x_i^1 \in B_i^1$ и $x_i^2 \in B_i^2$, $i = 1, 2, \dots$, то, согласно определению групп A_1 и A_2, x^1 – элемент A^1 и x^2 – элемент A^2. Кроме того, $x = x^1 + x^2$, ибо $x_i = x_i^1 + x_i^2$, $i = 1, 2, \dots$ Следовательно, A разлагается в прямую сумму групп A_1 и A_2.

Докажем теперь, что разложению $B = B^1 \oplus \dots \oplus B^n$ базисной подгруппы в прямую сумму n слагаемых соответствует разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, при котором B^i – базисная подгруппа A_i. При этом допустим, что это предложение уже доказано для случая, когда в разложении B число прямых слагаемых меньше n. По доказанному, разложению $B = \overline{B} \oplus B^n$, где $\overline{B} = B^1 \oplus \dots \oplus B^{n-1}$, базисной подгруппы B в прямую сумму двух слагаемых соответствует разложение $A = \overline{A} \oplus A_n$, при котором $\overline{B}$ – базисная подгруппа $\overline{A}$ и B^n – базисная подгруппа A_n. Группа $\overline{A}$ p-замкнута, ибо является прямым слагаемым p-замкнутой группы A. Поэтому по индуктивному предположению разложению $\overline{B} = B^1 \oplus B^2 \oplus \dots \oplus B^{n-1}$ соответствует разложение $\overline{A} = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{n-1}$, при котором B^i есть базисная подгруппа A_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Так как еще $A = \overline{A} \oplus A_n$, то получаем искомое разложение $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$, при котором B^i есть базисная подгруппа A_i.

4. Рассмотрим теперь разложение $B = \bigoplus\limits_\alpha B^\alpha$, содержащее бесконечное множество прямых слагаемых, но такое, что при достаточно большом N $p^N B^\alpha \neq 0$ только для конечного числа прямых слагаемых B^α. Найдем соответствующее разложение $A = \bigoplus\limits_\alpha A_\alpha$ p-замкнутой группы A, для которой B есть базисная подгруппа. Пусть B^{α_1}, $B^{\alpha_2}, \dots, B^{\alpha_n}$ – те прямые слагаемые, для которых $p^N B^\alpha \neq 0$. Если обозначить через B^* прямую сумму тех B^α, для которых $p^N B^\alpha = 0$, то $B = B^{\alpha_1} \oplus B^{\alpha_2} \oplus \dots \oplus B^{\alpha_n} \oplus B^*$. По доказанному (п. 3), разложению

$$B = B^{\alpha_1} \oplus B^{\alpha_2} \oplus \dots \oplus B^{\alpha_n} \oplus B^*$$

соответствует разложение $A = A_{\alpha_1} \oplus A_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus A_{\alpha_n} \oplus A^*$, при котором B^{α_i} – базисная подгруппа A_{α_i} и B^* – базисная подгруппа A^*. Так как A^* не содержит элементов бесконечной высоты и порядки элементов в ее базисной подгруппе B^* ограничены в совокупности, то A^* совпадает со своей базисной подгруппой, $A^* = B^*$ (§ 2). Для тех индексов α, для которых $p^N B^\alpha = 0$, положим $A_\alpha = B^\alpha$. Тогда $A^* = \bigoplus\limits_\alpha A_\alpha$, где суммирование распространяется на все индексы α, отличные от α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Если еще в разложении $A = A_{\alpha_1} \oplus A_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus A_{\alpha_n} \oplus A^*$ заменить A^* через $\bigoplus\limits_\alpha A_\alpha$, то получим разложение $A = \bigoplus\limits_\alpha A_\alpha$, где суммирование уже происходит по всем индексам α. Разложение $A = \bigoplus_\alpha A_\alpha$ будет искомым разложением, соответствующим разложению базисной подгруппы $B = \bigoplus_\alpha B^\alpha$, ибо для каждого α B^α будет базисной подгруппой A_α. Теорема доказана.

Теорема 13. *Любые два прямых разложения p-замкнутой группы можно подразбить до изоморфных разложений.*

Доказательство. Пусть

$$A = \bigoplus_\alpha A_\alpha \tag{1}$$

и

$$A = \bigoplus_\beta A'_\beta \tag{2}$$

– два заданных прямых разложения p-замкнутой группы A. В силу теоремы 12 прямые слагаемые A_α и A'_β будут p-замкнутыми группами. Обозначим через B_α и B'_β базисные подгруппы групп A_α и A'_β. Тогда, очевидно, прямая сумма

$$B = \bigoplus_\alpha B_\alpha \tag{3}$$

будет базисной подгруппой A. Точно так же и прямая сумма

$$B' = \bigoplus_\beta B'_\beta \tag{4}$$

является базисной подгруппой A. В разложениях (3) и (4) каждое прямое слагаемое B_α и B'_β разложим в прямую сумму циклических подгрупп; полученные таким образом разложения групп B и B' в прямую сумму циклических подгрупп обозначим соответственно через R и R'.

Ввиду теоремы 6 группы B и B' изоморфны, так как они являются базисными подгруппами одной и той же группы A. Следовательно, их разложения R и R' в прямую сумму циклических подгрупп по теореме 3 будут изоморфны. Обозначим через φ соответствие, устанавливающее изоморфизм разложений R и R'. Через $B_{\alpha\beta}$ обозначим прямую сумму всех тех циклических прямых слагаемых группы B_α в разложении R, которые при изоморфизме φ отображаются в группу B'_β, и через $B'_{\beta\alpha}$ образ группы $B_{\alpha\beta}$ при этом отображении; $B_{\alpha\beta} \subset B_\alpha$, $B'_{\beta\alpha} \subset B'_\beta$ и

$$B_{\alpha\beta} \cong B'_{\beta\alpha}. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$B_\alpha = \bigoplus_\beta B_{\alpha\beta} \tag{6}$$

и

$$B'_\beta = \bigoplus_\alpha B'_{\beta\alpha}. \tag{7}$$

В силу предыдущей теоремы существует такое целое положительное число N, что только для конечного числа прямых слагаемых разложений (1) и (2) будет $p^N A_\alpha \neq 0$ и $p^N A'_\beta \neq 0$; значит, только для конечного числа индексов α и β будет $p^N B_\alpha \neq 0$ и $p^N B'_\beta \neq 0$. Группа $B_{\alpha\beta}$ является подгруппой B_α и изоморфна подгруппе $B'_{\beta\alpha}$ группы B'_β. Поэтому группа $p^N B_{\alpha\beta}$ может быть отлична от нулевой группы только для тех индексов α и β, для которых $p^N B_\alpha \neq 0$ и $p^N B'_\beta \neq 0$. Следовательно, в разложениях (6) и (7) может встретиться только конечное число прямых слагаемых $B_{\alpha\beta}$ и $B'_{\beta\alpha}$ таких, что $p^N B_{\alpha\beta} \neq 0$ и $p^N B'_{\beta\alpha} \neq 0$. Применим теперь предыдущую теорему, согласно которой разложениям (6) и (7) групп B_α и B'_β соответствуют прямые разложения p-замкнутых групп A_α и A'_β

$$A_\alpha = \bigoplus_\beta A_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

$$A'_\beta = \bigoplus_\alpha A'_{\beta\alpha} \tag{9}$$

такие, что $B_{\alpha\beta}$ будет базисной подгруппой $A_{\alpha\beta}$ и $B'_{\beta\alpha}$ – базисной подгруппой $A'_{\beta\alpha}$. Если в разложениях (1) и (2) прямые слагаемые A_α и A'_β заменим прямыми суммами (8) и (9), то получим разложения

$$A = \bigoplus_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

$$A = \bigoplus_{\alpha,\beta} A'_{\beta\alpha}. \tag{11}$$

Разложения (10) и (11) являются соответственно подразбиениями разложений (1) и (2) и притом изоморфными подразбиениями, ибо из соотношений (5) следует для любых α и β

$$A_{\alpha\beta} \cong A'_{\beta\alpha},$$

так как p-замкнутые группы $A_{\alpha\beta}$ и $A'_{\beta\alpha}$ изоморфны в силу того, что изоморфны их базисные подгруппы $B_{\alpha\beta}$ и $B'_{\beta\alpha}$.

§ 5

Известно, что счетные примарные группы, не содержащие элементов бесконечной высоты, согласно теореме Прюфера разлагаются в прямую сумму циклических подгрупп.

Иная картина имеет место для несчетных групп, как показывает следующая теорема, доказанная в первой части этой работы [9]:

Существуют примарные группы любой непредельной мощности $\aleph_{\alpha+1}$, не содержащие элементов бесконечной высоты и обладающие следующим свойством: в любом прямом разложении группы содержится по крайней мере одно прямое слагаемое, имеющее ту же мощность, что и группа.

[9] См. [1]; § 5, теорема 8.

Следующая теорема 14 является обобщением этой теоремы, так как она имеет место для групп любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$, а не только для мощностей вида $\aleph_{\alpha+1}$ и в случае, когда мощность $\mathfrak{m}$ непредельна, т.е. равна одному из алефов $\aleph_{\alpha+1}$, теорема 14 эквивалентна приведенной выше теореме.

Теорема 14. *Среди примарных групп, не содержащих элементов бесконечной высоты и имеющих данную бесконечную мощность* $\mathfrak{m}$, *существуют группы со следующим свойством*: *в любом прямом разложении группы для каждой наперед заданной мощности* $\mathfrak{m}^*$, *меньшей* $\mathfrak{m}$, *можно найти прямое слагаемое*, *мощность которого больше* $\mathfrak{m}^*$.

Доказательство. Легко убедиться, что теорема верна, когда данная бесконечная мощность $\mathfrak{m}$ счетная. Пусть H – счетная примарная группа, в которой имеются элементы как угодно большого порядка и нет элементов бесконечной высоты. Если бы в некотором прямом разложении группы H каждое прямое слагаемое имело мощность, не бóльшую, чем заданная конечная мощность $\mathfrak{m}^*$, то порядки элементов группы H были бы ограничены в совокупности, а это противоречило бы тому, что H содержит элементы как угодно большого порядка. Следовательно, в том случае, когда данная мощность $\mathfrak{m}$ счетная, теорема верна.

Когда данная мощность $\mathfrak{m}$ такова, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$, где $\aleph_0$ – счетная мощность, то существует примарная группа H мощности $\mathfrak{m}$, не содержащая элементов бесконечной высоты и обладающая следующим свойством: в любом прямом разложении группы H содержится прямое слагаемое, равномощное H. Это предложение было доказано в работе [1] (§ 5, п. 4, с. 176).

Поэтому нуждается в доказательстве только тот случай, когда данная мощность $\mathfrak{m}$ несчетна и $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Здесь могут представиться только две возможности:

(1) существует бесконечная мощность $\mathfrak{m}'$ такая, что $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$; $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}'^{\aleph_0}$;

(2) $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ и из неравенства $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ всегда следует неравенство $\mathfrak{m}'^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$.

Докажем теорему отдельно для каждого из этих двух случаев.

Случай 1. Предположим, что для данной мощности $\mathfrak{m}$ существует бесконечная мощность $\mathfrak{m}'$ такая, что $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m} < \mathfrak{m}'^{\aleph_0}$. Пусть для каждого натурального числа i построена примарная группа B_i мощности $\mathfrak{m}'$, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп порядка p^i. Обозначим через H максимальную периодическую подгруппу бесконечной прямой суммы групп $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ Группа H p-замкнута и B, $B = \bigoplus\limits_i B_i$, будет ее базисной подгруппой (теорема 8). Легко видеть, что B имеет мощность $\mathfrak{m}'$ и H – мощность $\mathfrak{m}'^{\aleph_0}$. Так как B – базисная подгруппа H, то факторгруппа $\overline{H} = H/B$ будет полной группой. Факторгруппа $\overline{H}$ имеет, как и группа H, мощность $\mathfrak{m}'^{\aleph_0}$, так как B имеет меньшую мощность, чем H. Факторгруппа $\overline{H}$, будучи полной, разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп. Поэтому в группе $\overline{H}$ можно выделить прямое слагаемое $\overline{A}$ мощности $\mathfrak{m}$, ибо $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}'^{\aleph_0}$. Группа $\overline{A}$, будучи прямым слагаемым полной группы $\overline{H}$, также будет полной. Обозначим через A подгруппу H такую, что $\overline{A} = A/B$. Легко видеть, что B будет базисной подгруппой не только H, но и группы A. Группа A (как и группа $\overline{A}$) имеет мощность $\mathfrak{m}$. Кроме того, A не содержит элементов бесконечной высоты, так как $A \subset H$. Докажем, что A будет искомой группой мощности $\mathfrak{m}$, т.е. докажем, что она обладает следующим свойством: в произвольном ее прямом разложении

$$A = \bigoplus_{\alpha} A_\alpha \tag{R}$$

для каждой наперед заданной мощности $\mathfrak{m}^*$, меньшей $\mathfrak{m}$, можно найти прямое слагаемое, мощность которого больше $\mathfrak{m}^*$. Пусть C_α – базисная подгруппа группы A_α. Тогда группа B', $B' = \bigoplus\limits_{\alpha} C_\alpha$, будет базисной подгруппой A. Согласно теореме 6 базисные подгруппы B и B' группы A изоморфны и потому B' (как и B) имеет мощность $\mathfrak{m}'$. Поэтому число прямых слагаемых в разложении $B' = \bigoplus\limits_{\alpha} C_\alpha$ не больше $\mathfrak{m}'$. Следовательно, разложение (R) группы A также содержит не больше $\mathfrak{m}'$ прямых слагаемых. Если бы в разложении (R) мощность каждого прямого слагаемого была не больше $\mathfrak{m}^*$, $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$, то мощность $\mathfrak{m}$ группы A была бы не больше произведения мощностей $\mathfrak{m}'$ и $\mathfrak{m}^*$. Но это невозможно, так как из $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$ следует $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$. Следовательно, в разложении (R) должно быть по крайней мере одно прямое слагаемое, мощность которого больше $\mathfrak{m}^*$.

Случай 2. Предположим, что данная мощность $\mathfrak{m}$ обладает следующими свойствами: $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ и из неравенства $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ всегда следует неравенство ${\mathfrak{m}'}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$. Докажем, что среди мощностей, меньших $\mathfrak{m}$, нет наибольшей. Допустим обратное, т.е. предположим, что среди мощностей, меньших $\mathfrak{m}$, существует наибольшая мощность $\mathfrak{m}'$. Тогда, если $\mathfrak{m}' = \aleph_\alpha$, мощность $\mathfrak{m}$ будет равна $\aleph_{\alpha+1}$. Кроме того, $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$, ибо в противном случае будет $\mathfrak{m}' < {\mathfrak{m}'}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$, что противоречило бы определению $\mathfrak{m}'$. Но равенство $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$ всегда влечет за собой равенство $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}$ ([1]; § 5, лемма 4). Следовательно, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Но это противоречит неравенству $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

Следовательно, во втором случае для заданной мощности $\mathfrak{m}$ можно построить последовательность растущих мощностей

$$\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots < \mathfrak{m}_\alpha < \ldots, \tag{1}$$

меньших $\mathfrak{m}$ и обладающих следующими двумя свойствами: (a) $\mathfrak{m}_\beta = \mathfrak{m}_\beta^{\aleph_0}$, где $\mathfrak{m}_\beta$ – произвольная мощность из последовательности (1); (b) если $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$, то в последовательности (1) найдется мощность, бо́льшая $\mathfrak{m}^*$. Легко видеть, что сумма всех мощностей последовательности (1) равна $\mathfrak{m}$. Построим для каждого натурального числа i примарную группу B_i мощности $\mathfrak{m}_\alpha$, разлагающуюся в прямую сумму циклических подгрупп порядка p^i. Обозначим через H_α максимальную периодическую подгруппу бесконечной прямой суммы групп

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,\ \ldots$$

Группа H_α имеет мощность $\mathfrak{m}_\alpha$, ибо $\mathfrak{m}_\alpha^{\aleph_0} = \mathfrak{m}_\alpha$. Согласно теореме 8 группа H_α будет p-замкнутой.

Предположим, что таким способом построены p-замкнутые группы H_α мощности $\mathfrak{m}_\alpha$ для каждой мощности из последовательности (1). Обозначим через A прямую сумму всех этих групп H_α,

$$A = \bigoplus_\alpha H_\alpha.$$

Так как сумма всех мощностей последовательности (1) равна $\mathfrak{m}$, то группа A имеет мощность $\mathfrak{m}$. Очевидно, A не содержит элементов бесконечной высоты. Докажем, что группа A будет искомой, т.е. в любом прямом разложении A для каждой наперед заданной мощности $\mathfrak{m}^*$, меньшей $\mathfrak{m}$, можно найти прямое слагаемое, мощность которого больше $\mathfrak{m}^*$.

Допустим обратное, т.е. предположим, что существует мощность $\mathfrak{m}^*$, меньшая $\mathfrak{m}$, и такое прямое разложение (R) группы A, в котором мощность каждого прямого слагаемого не превосходит $\mathfrak{m}^*$. В последовательности (1) согласно свойству (b) найдется мощность $\mathfrak{m}_\alpha$, бóльшая $\mathfrak{m}^*$. Следовательно, в разложении (R) группы A мощность каждого прямого слагаемого будет меньше $\mathfrak{m}_\alpha$. Если x – отличный от нуля элемент группы A, то через A_x будем обозначать подгруппу A, образованную прямыми слагаемыми разложения (R), в которых компонента x отлична от нуля. Очевидно, при любом x подгруппа A_x также имеет мощность, меньшую $\mathfrak{m}_\alpha$.

Докажем, что в группе H_α можно выбрать бесконечную последовательность элементов

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots, \tag{2}$$

для которых выполняются соотношения

$$[A_{x_1},\, A_{x_2},\, \ldots,\, A_{x_i}] \cap A_{x_{i+1}} = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots) \tag{3}$$

и x_i имеет в A высоту $i-1$ и порядок p, $i = 1, 2, \ldots$ В качестве x_1 возьмем какой-нибудь элемент из H_α, имеющий в H_α, а следовательно, и в A нулевую высоту. Предположим, что первые n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ группы H_α уже выбраны так, что выполняются соотношения (3) при i, меньшем n, и x_i имеет в A высоту $i-1$ и порядок p при i, меньшем или равном n. Покажем, что в H_α можно выбрать элемент x_{n+1} так, чтобы выполнялось соотношение

$$[A_{x_1},\, A_{x_2},\, \ldots,\, A_{x_n}] \cap A_{x_{n+1}} = 0 \tag{4}$$

и элемент x_{n+1} имел в A высоту n и порядок p. Если через D обозначим прямую сумму прямых слагаемых в разложении (R) группы A, которые не содержатся в подгруппе $C_n = [A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}]$, то

$$A = C_n \oplus D. \tag{5}$$

Группа H_α является максимальной периодической подгруппой бесконечной прямой суммы групп $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, причем B_i имеет мощность $\mathfrak{m}_\alpha$ и разлагается в прямую сумму циклических подгрупп порядка p^i, $i = 1, 2, \ldots$ Отличные от нуля элементы подгруппы $p^n B_{n+1}$ имеют в H_α порядок p и высоту n. Так как H_α – прямое слагаемое A, то такую же высоту имеют эти элементы и в группе A. Мощность подгруппы $p^n B_{n+1}$, как и B_{n+1}, равна $\mathfrak{m}_\alpha$. Так как мощность подгруппы C_n меньше $\mathfrak{m}_\alpha$, то в подгруппе $p^n B_{n+1}$ найдутся два элемента, имеющие в прямом слагаемом C_n разложения (5) одинаковые компоненты. Разность этих двух элементов есть элемент порядка p, содержащийся в D. Обозначим этот элемент через x_{n+1}. При таком выборе элемента x_{n+1} выполняется соотношение (4), так как $A_{x_{n+1}} \subset D$ и потому $C_n \cap A_{x_{n+1}} = 0$. Кроме того, x_{n+1} имеет в A порядок p и высоту n, так как $x_{n+1} \in p^n B_{n+1}$. Таким образом, последовательность (2) можно считать построенной.

Из соотношений (3) вытекает равенство

$$[A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}, \ldots] = A_{x_1} \oplus A_{x_2} \oplus \ldots \oplus A_{x_n} \oplus \ldots$$

Если через A^* обозначить прямую сумму тех прямых слагаемых в разложении (R) группы A, которые не содержатся ни в одной из подгрупп A_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots,$ то, очевидно,

$$A = A^* \oplus A_{x_1} \oplus A_{x_2} \oplus \ldots \oplus A_{x_n} \oplus \ldots \tag{6}$$

С помощью элементов последовательности (2) образуем элементы

$$y_i = x_1 + \ldots + x_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и рассмотрим последовательность

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \tag{7}$$

Элементы последовательности (7) имеют порядок p и $y_{i+1} - y_i = x_{i+1} \in p^i H_\alpha$, так как x_{i+1} имеет в H_α высоту i. Ввиду того что группа H_α p-замкнута, последовательность (7) сходится в H_α, т.е. в H_α существует такой элемент y, для которого

$$y - y_i \in p^i H_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

На основании (6) найдется такое i, что $y \in A^* \oplus A_{x_1} \oplus \ldots \oplus A_{x_{i-1}}$.

Определим высоту элемента $y - y_i$. Так как $y_i = y_{i-1} + x_i$, то

$$y - y_i = (y - y_{i-1}) - x_i.$$

Элемент $y - y_{i-1}$ содержится в прямом слагаемом $A^* \oplus A_{x_1} \oplus \ldots \oplus A_{x_{i-1}}$ разложения (6), ибо $y_{i-1} = x_1 + \ldots + x_{i-1}$ и $x_k \in A_{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, i-1$, а элемент x_i содержится в прямом слагаемом A_{x_i}. Следовательно, высота элемента $y - y_i$ в A не больше высоты элемента x_i в группе A. Элемент же x_i имеет в A порядок p и высоту $i - 1$. Следовательно, высота элемента $y - y_i$ в A меньше i. С другой стороны, согласно (8) $y - y_i \in p^i H_\alpha$ и потому высота $y - y_i$ в группе A больше или равна i. Полученное противоречие показывает, что предположение о существовании прямого разложения (R) группы A, в котором каждое прямое слагаемое имеет мощность, не превосходящую наперед заданной мощности $\mathfrak{m}^*$, $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$, было неверным. Теорема доказана полностью.

§ 6

Пусть H – примарная абелева группа. Определим индуктивно последовательность подгрупп H^{α} следующим образом: $H^0 = H$, через $H^{\alpha+1}$ обозначим подгруппу группы H, образованную элементами бесконечной высоты в H^{α}; если α – предельное число, то через H^{α} обозначим пересечение всех групп H^{β} с $\beta < \alpha$. Существует наименьшее порядковое число $\tau = \tau(H)$, для которого $H^{\tau} = H^{\tau+1}$. Число τ называется *ульмовским типом группы* H.

Ульмом [10] была доказана теорема:

Две счетных примарных абелевых группы H и G изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\tau(H) = \tau(G), \qquad H^{\alpha}/H^{\alpha+1} \cong G^{\alpha}/G^{\alpha+1} \quad (\alpha < \tau) \quad \textit{и} \quad H^{\tau} \cong G^{\tau}. \tag{$*$}$$

Исключительная важность этой теоремы Ульма состоит в том, что она дает с помощью теоремы Прюфера полную классификацию всех счетных примарных абелевых групп.

В связи с этим возник вопрос о справедливости этой теоремы для несчетных примарных абелевых групп. В случае положительного решения этого вопроса изучение произвольных примарных абелевых групп сводилось бы полностью к изучению только примарных абелевых групп, не содержащих элементов бесконечной высоты.

Но оказывается, что для несчетных примарных абелевых групп эта теорема уже неверна. Неверна она даже для тех примарных абелевых групп, у которых все ульмовские факторы разлагаются в прямую сумму циклических подгрупп.

Сейчас будут построены две примарные абелевы группы G и $\overline{G}$, для которых выполняются условия $(*)$, т.е. их ульмовские факторы будут изоморфны и они будут иметь одинаковые ульмовские типы – и все же группы G и $\overline{G}$ не будут изоморфны. Все ульмовские факторы у этих групп разлагаются в прямую сумму циклических подгрупп.

Обозначим через B_i, $i = 1, 2, \ldots$, какую-нибудь счетную примарную (по отношению к простому числу p) абелеву группу, у которой $B_i^{i-1} \neq 0$ и $B_i^i = 0$, т.е. ульмовский тип $\tau(B_i)$ равен i. Образуем прямую сумму групп B_i:

$$G = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus \ldots$$

Легко заметить, что $G^i \neq 0$ при $i < \omega$ и $G^{\omega} = 0$, т.е. ульмовский тип $\tau(G)$ равен ω.

Построим новую группу $\overline{G}$. Элементом группы $\overline{G}$ будем считать всякую последовательность

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots), \tag{1}$$

для которой выполняются следующие условия:

[10] См. H. Ulm [4].

(a) $x_i \in B_i$, $i = 1, 2, \dots$;

(b) порядки элементов x_i в G ограничены в совокупности;

(c) для каждого целого положительного n можно найти такое N, что $x_i \in G^n$ при $i \geqslant N$.

Сумма двух элементов x и y группы $\overline{G}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots)$, определяется формулой

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m, \dots).$$

Нуль группы $\overline{G}$ изображается нулевой последовательностью $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ и только ею. Поэтому два элемента группы $\overline{G}$ равны тогда и только тогда, когда равны все соответствующие компоненты. Нетрудно видеть, что группа $\overline{G}$ имеет континуальную мощность. Группа $\overline{G}$ является примарной по отношению к простому числу p. Ибо, если x – элемент $\overline{G}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, то согласно условию ($b$) существует такое целое k, что $p^k x_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots$ и, следовательно,

$$p^k x = (p^k x_1, p^k x_2, \dots, p^k x_m, \dots) = (0, 0, \dots, 0, \dots).$$

Включим группу G в группу $\overline{G}$ следующим образом: будем отождествлять последовательность (1), у которой только конечное число компонент x_i, отличных от нуля, с суммой этих компонент.

Докажем следующее предложение:

Лемма 4. *Элемент x группы $\overline{G}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, тогда и только тогда содержится в $\overline{G}^n$, когда $x_i \in G^n$ (т.е. $x_i \in B_i^n$ для $i = 1, 2, \dots$).*

Доказательство. Для $n = 0$ лемма верна, так как всегда $x_i \in G^0 = G$ и $x \in \overline{G}^0 = \overline{G}$. Предположив, что это предложение уже доказано для n, докажем его для $n + 1$.

1. Необходимость условия. Пусть $x \in \overline{G}^{n+1}$. Тогда x имеет в $\overline{G}^n$ бесконечную высоту, т.е. для любого целого положительного k существует в $\overline{G}^n$ такой элемент $y = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots)$, для которого $p^k y = x$. Отсюда

$$p^k y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{2}$$

По индуктивному предположению из $y \in \overline{G}^n$ следует $y_i \in G^n$, $i = 1, 2, \dots$ Поэтому на основании (2) заключаем, что x_i имеет бесконечную высоту в G^n, так как k – любое целое положительное число. Значит, $x_i \in G^{n+1}$, $i = 1, 2, \dots$

2. Достаточность условия. Пусть x, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, – такой элемент из $\overline{G}$, что $x_i \in G^{n+1}$. Обозначим через n_i наибольшее целое число, обладающее свойством $x_i \in G^{n_i+1}$ (если $x_i = 0$, полагаем $n_i = n + i$), тогда $n_i \geqslant n$. Из условия (c) следует, что последовательность $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$ имеет своим пределом бесконечность. Так как $x_i \in B_i^{n_i+1}$, то для любого целого k можно найти в $B_i^{n_i} \subset G^{n_i} \subset G^n$ элемент y_i такой, что $p^k y_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots$ В группе $\overline{G}$ существует элемент $y = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots)$, ибо эта последовательность удовлетворяет условиям (a), (b), (c). Согласно определению y_i имеем $p^k y = x$.

Кроме того, по индуктивному предположению из $y_i \in G^n,\ i = 1, 2, \ldots$, следует $y \in \overline{G}^n$. Поэтому элемент x имеет в $\overline{G}^n$ бесконечную высоту, т.е. $x \in \overline{G}^{n+1}$.

Из леммы 4 вытекает, что $\overline{G}^\omega = 0$. Действительно, если $x \in \overline{G}^\omega$,

$$x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m,\, \ldots),$$

то $x \in \overline{G}^n$ для любого целого n. Тогда по лемме 4 для $n = 1,\, 2,\, \ldots$ имеем $x_i \in G^n$, т.е. $x_i \in G^\omega$. Так как $G^\omega = 0$, то $x_i = 0$ и $x = (0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots)$.

Таким образом, группы G и $\overline{G}$ имеют одинаковый ульмовский тип,

$$\tau(G) = \tau(\overline{G}).$$

Докажем равенство

$$\overline{G}^n = [G^n,\, \overline{G}^{n+1}]. \tag{3}$$

Если $x \in \overline{G}^n,\ x = (x_1,\, \ldots,\, x_m,\, \ldots)$, то согласно (c) можно найти такое N, что $x_i \in G^{n+1}$ при $i \geqslant N$. Равенство (3) следует из того, что x можно представить в виде суммы

$$x = (x_1,\, \ldots,\, x_{N-1},\, 0,\, \ldots) + (0,\, \ldots,\, 0,\, x_N,\, x_{N+1},\, \ldots)$$

и в этой сумме первое слагаемое содержится в G^n (ибо из $x \in \overline{G}^n$ следует $x_i \in G^n$), а второе слагаемое в силу леммы 4 содержится в $\overline{G}^{n+1}$.

Из леммы 4 также следует, что

$$G^n \cap \overline{G}^{n+1} = G^{n+1}. \tag{4}$$

Из (3), (4) и теоремы об изоморфизме получаем для $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$

$$\overline{G}^n/\overline{G}^{n+1} = [G^n,\, \overline{G}^{n+1}]/\overline{G}^{n+1} \cong G^n/(G^n \cap \overline{G}^{n+1}) = G^n/G^{n+1}.$$

Таким образом, все ульмовские факторы групп $\overline{G}$ и G изоморфны и эти группы имеют одинаковые ульмовские типы ($G^\omega = \overline{G}^\omega$). Но эти группы не могут быть изоморфными, так как G – счетная группа, а группа $\overline{G}$ имеет континуальную мощность.

Возникает вопрос: существуют ли неизоморфные примарные абелевы группы одинаковой мощности, у которых ульмовские факторы изоморфны и ульмовские типы равны?

Докажем, что такие группы существуют.

Образуем прямую сумму групп $B_2,\, B_4,\, \ldots$

$$G_2 = B_2 \oplus B_4 \oplus \ldots \oplus B_{2n} \oplus \ldots$$

и через $\overline{G}_1$ обозначим подгруппу $\overline{G}$, образованную последовательностями

$$(x_1,\, \ldots,\, x_m,\, \ldots),$$

у которых все компоненты с четными индексами равны нулю, т.е. $x_{2i}=0$ при $i=1,\,2,\,\ldots$ Через $\overline{G}_2$ обозначим подгруппу $\overline{G}$, образованную теми последовательностями $(x_1,\,\ldots,\,x_m,\,\ldots)$, у которых $x_{2i+1}=0$ для $i=0,\,1,\,2,\,\ldots$

Очевидно, $\overline{G}=\overline{G}_1\oplus\overline{G}_2$. Докажем, как и раньше, что $\overline{G}_2^\omega=G_2^\omega=0$ и $\overline{G}_2^n/\overline{G}_2^{n+1}\cong G_2^n/G_2^{n+1}$.

На основании этого заключаем, что для групп $\overline{G}=\overline{G}_1\oplus\overline{G}_2$ и $\widetilde{G}=\overline{G}_1\oplus G_2$ будет

$$\overline{G}^{\,\omega}=\widetilde{G}^{\,\omega}=0 \quad \text{и} \quad \overline{G}^{\,n}/\,\overline{G}^{\,n+1}\cong\widetilde{G}^{\,n}/\widetilde{G}^{\,n+1} \quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

т.е. ульмовский тип у групп $\overline{G}$ и $\widetilde{G}$ одинаков и их ульмовские факторы изоморфны. Докажем, что *группы $\overline{G}$ и $\widetilde{G}$ неизоморфны.* Отметим, что эти группы имеют континуальную мощность.

Допустим, что $\overline{G}\cong\widetilde{G}$ и что при этом изоморфизме разложению

$$\widetilde{G}=\overline{G}_1\oplus B_2\oplus\ldots\oplus B_{2n}\oplus\ldots$$

соответствует разложение

$$\overline{G}=\overline{G}_1'\oplus\overline{B}_2\oplus\ldots\oplus\overline{B}_{2n}\oplus\ldots, \tag{5}$$

так что

$$\overline{G}_1'\cong\overline{G}_1 \quad \text{и} \quad \overline{B}_{2i}\cong B_{2i}.$$

Пусть $y^1,\,y^2,\,\ldots,\,y^k,\,\ldots$ – последовательность элементов порядка p, причем $y^i\in\overline{B}_{2i}^{2i-1}\subset\overline{G}^{\,2i-1}$. Запишем эти элементы в виде последовательностей вида (1):

$$y^i=(y_1^i,\,\ldots,\,y_m^i,\,\ldots) \qquad (i=1,\,2,\,\ldots).$$

Так как $y^i\in\overline{G}^{\,2i-1}$, то (по лемме 4) $y_j^i\in B_j^{2i-1}$ и потому при $j\leqslant 2i-1$ $y_j^i=0$, так как $B_j^j=0$. Следовательно, можно утверждать, что у элемента y^i первые $(2i-1)$ компонент равны нулю. Из этого явствует, что среди m-х компонент $y_m^1,\,y_m^2,\,\ldots,\,y_m^k,\,\ldots$ только конечное число отлично от нуля; обозначим через z_m^k сумму всех компонент, отличных от нуля, в последовательности $y_m^k,\,y_m^{k+1},\,y_m^{k+2},\,\ldots$ Так как $y_m^i\in G^{2k-1}$ при $i\geqslant k$, то $z_m^k\in G^{2k-1}$.

Последовательности

$$z^k=(z_1^k,\,z_2^k,\,\ldots,\,z_m^k,\,\ldots) \qquad (k=1,\,2,\,\ldots)$$

удовлетворяют условиям (a), (b), (c) и потому z^k будут элементами $\overline{G}$.

Согласно лемме 4 z^k содержится в $\overline{G}^{\,2k-1}$, так как $z_m^k\in G^{2k-1}$. Из определения z^k следует

$$z^1=y^1+y^2+\ldots+y^{k-1}+z^k \qquad (k=1,\,2,\,\ldots).$$

Компонента элемента z^k в прямом слагаемом $\overline{B}_2\oplus\overline{B}_4\oplus\ldots\oplus\overline{B}_{2(k-1)}$ разложения (5) равна нулю, так как $z^k\in\overline{G}^{\,2k-1}$ и $\overline{B}_{2i}^{2i}=0$, $i=1,\,2,\,\ldots$ Поэтому компонента элемента z^1 в прямом слагаемом $\overline{B}_2 \oplus \overline{B}_4 \oplus \ldots \oplus \overline{B}_{2(k-1)}$ равна $y^1 + y^2 + \ldots + y^{k-1}$, ибо элемент $y^1 + y^2 + \ldots + y^{k-1}$ содержится в этом прямом слагаемом. Следовательно, компонента элемента z^1 в прямом слагаемом $\overline{B}_{2i}$ разложения (5) равна y^i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Но k можно выбирать как угодно большим и, значит, y^i будет компонентой z^1 в $\overline{B}_{2i}$ при $i = 1, 2, \ldots$ Таким образом, элемент z^1 имеет отличные от нуля компоненты в бесконечном множестве прямых слагаемых разложения (5), ибо в качестве y^i, $i = 1, 2, \ldots$, были выбраны элементы порядка p. Но это невозможно, так как (5) представляет собою разложение $\overline{G}$ в обычную прямую сумму. Следовательно, допущение об изоморфизме групп $\overline{G}$ и $\widetilde{G}$ привело к противоречию. Таким образом, группы $\overline{G}$ и $\widetilde{G}$ неизоморфны, хотя и имеют одинаковую мощность и одинаковые ульмовские инварианты. Отметим еще, что имеют одинаковую мощность не только группы $\overline{G}$ и $\widetilde{G}$, но и их подгруппы $\overline{G}^n$ и $\widetilde{G}^n$ при любом натуральном n.

(Поступило в редакцию 10/XI 1943 г.)

Литература

1. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **9(51):1** (1941), 165–181.

2. Prüfer H., *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **17** (1923), 35–61.

3. Курош А. Г., *Теория групп*, М.; Л.: Гостехиздат, 1944.

4. Ulm H., *Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen*, Math. Ann., **107** (1933), 774–803.

5. Курош А. Г., *Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп*, Успехи мат. наук, вып. **3** (1937), 5–15.

О прямых разложениях групп. I

Введение

Одним из основных вопросов в теории прямых разложений групп является вопрос о существовании изоморфных продолжений для двух данных прямых разложений группы.

Пусть заданы два прямых разложения группы G[1]:

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

и

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu . \tag{A}$$

Обозначим через Ω_{A} множество всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G, соответствующих[2] прямому разложению (A). Прямым разложениям (D) и (A) группы G поставим в соответствие топологическое пространство $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, точками которого являются прямые слагаемые D_α, $\alpha \in M$, разложения (D); множества, замкнутые в $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, определяются следующим образом: множество прямых слагаемых разложения (D) будем считать замкнутым подмножеством $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, если порождаемая этим множеством слагаемых подгруппа группы G является допустимой (характеристической) относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}.

Оказывается, что существование изоморфных продолжений для двух данных прямых разложений (D) и (A) группы G тесно связано со свойствами пространства $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и аналогично строящегося пространства $R(\mathrm{A}, \Omega_{\mathrm{D}})$.

Основным вопросом, изучаемым в настоящей работе, является вопрос о существовании изоморфных продолжений для двух данных прямых разложений (D) и (A) группы G, если пространство $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, соответствующее этим разложениям, является пространством Колмогорова[3].

---

[1] В работе всюду применяется только аддитивная запись групповой операции как для групп коммутативных, так и для групп некоммутативных.

[2] См. § 3.

[3] См. § 1.

В работе доказано, что если G – счетная группа и $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ является пространством Колмогорова, то разложения (D) и (A) обладают центрально изоморфными продолжениями. Аналогичный результат имеет место и для несчетной группы G, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) число прямых слагаемых в разложении (D) является конечным; 2) каждое прямое слагаемое в разложении (A) имеет не более чем счетную мощность; 3) всякая убывающая последовательность замкнутых подмножеств пространства $R(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ обрывается через конечное число шагов (см. § 8). Далее, даны условия, при которых указанное прямое разложение группы и любое другое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями (см. § 8, 9), а также условия существования центрально изоморфных продолжений для любых двух прямых разложений группы (см. § 10).

Абелеву группу будем называть *вполне разложимой*, если она разлагается в прямую сумму подгрупп первого ранга [4].

Результаты, полученные в § 8, 9, 10, применяются к решению следующих двух вопросов.

Обладают ли изоморфными продолжениями любые два прямых разложения вполне разложимой группы?

Является ли каждое прямое слагаемое вполне разложимой группы также вполне разложимой группой?

Эти два вопроса тесно связаны: решение одного из них приводит к решению другого. Для случая абелевых групп без кручения конечного ранга и одного класса абелевых групп без кручения бесконечного ранга эти два вопроса были решены Бэром [5]. В § 12 изложено решение поставленных выше вопросов для счетных абелевых групп, для периодических групп и для одного класса несчетных смешанных групп.

Результаты, полученные в первых десяти параграфах этой работы, и их доказательства остаются в силе также для групп с произвольной областью операторов.

В заключение отметим, что метод, изложенный в этой работе, может быть использован для решения вопроса о существовании прямо подобных продолжений для двух заданных прямых разложений единицы вполне дедекиндовой структуры.

§ 1

Пусть

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G и Ω – какое-либо множество эндоморфизмов группы G. Прямому разложению (D) и множеству эндоморфизмов Ω поставим

[4] Отметим, что *группой первого ранга* называется абелева группа, любое конечное множество элементов которой порождает циклическую подгруппу.

[5] См. R. Baer [6].

в соответствие топологическое пространство $R(\mathrm{D},\Omega)$, точками которого являются прямые слагаемые D_α, $\alpha \in M$, разложения (D); множества, замкнутые в $R(\mathrm{D},\Omega)$, определяются следующим образом: множество прямых слагаемых разложения (D) будем считать замкнутым подмножеством $R(\mathrm{D},\Omega)$, если порождаемая этим множеством слагаемых подгруппа группы G является допустимой относительно множества эндоморфизмов Ω.

1.1. Определение. Топологическое пространство называется *пространством Колмогорова*, если любые два различных одноточечных подмножества пространства имеют различные замыкания.

Это определение эквивалентно такому:

1.2. Определение. Топологическое пространство называется *пространством Колмогорова*, если из любых двух различных одноточечных подмножеств пространства хотя бы одно отделимо замкнутым множеством от другого.

1.3. Определение. Прямое разложение (D) группы G, не содержащее нулевых прямых слагаемых, будем называть *частично упорядоченным* относительно множества эндоморфизмов Ω, если $R(\mathrm{D},\Omega)$ является пространством Колмогорова.

Известно, что пересечение любого множества Ω-подгрупп[6] и группа, порожденная объединением любой совокупности Ω-подгрупп группы G, также являются Ω-подгруппами группы G. Поэтому пересечение и объединение произвольной совокупности замкнутых подмножеств пространства $R(\mathrm{D},\Omega)$ будут замкнутыми множествами.

Символом $C(\mathrm{D})$ будем обозначать множество всех тех подгрупп группы G, каждая из которых порождается какой-либо совокупностью прямых слагаемых разложения (D).

Символом $\Delta(\mathrm{D},\Omega)$ будем обозначать множество всех Ω-подгрупп, принадлежащих $C(\mathrm{D})$.

Символом $V(D_\alpha,\mathrm{D},\Omega)$ будем обозначать наименьшую группу из множества $\Delta(\mathrm{D},\Omega)$, содержащую прямое слагаемое D_α разложения (D). Если Ω будет фиксировано, то часто группу $V(D_\alpha,\mathrm{D},\Omega)$ будем обозначать через $\overline{D}_\alpha$.

Из определения пространства $R(\mathrm{D},\Omega)$ следует, что множество $\{D_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ прямых слагаемых разложения (D) тогда и только тогда замкнуто в $R(\mathrm{D},\Omega)$, когда подгруппа $\bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma$ группы G является элементом множества $\Delta(\mathrm{D},\Omega)$. Далее, нетрудно видеть, что если множество $\{D_\gamma\}_{\gamma\in V}$ является замыканием в пространстве $R(\mathrm{D},\Omega)$ одноточечного множества $\{D_\alpha\}$, то $\overline{D}_\alpha = \bigoplus\limits_{\gamma\in V} D_\gamma$. Следовательно, два различных одноточечных множества $\{D_\alpha\}$ и $\{D_\beta\}$ пространства $R(\mathrm{D},\Omega)$ имеют различные замыкания тогда и только тогда, когда $\overline{D}_\alpha \neq \overline{D}_\beta$. Поэтому, принимая во внимание определения 1.1, 1.2, 1.3, нетрудно видеть, что имеет место следующее предложение.

[6] Подгруппу группы G, допустимую относительно множества эндоморфизмов Ω, будем называть *Ω-подгруппой* группы G.

1.4. *Следующие условия эквивалентны*:

(*a*) *Разложение* (D) *не содержит нулевых прямых слагаемых и имеет место соотношение*

$$\overline{D}_\alpha \neq \overline{D}_\beta \qquad (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in M).$$

(*b*) *Разложение* (D) *не содержит нулевых прямых слагаемых и для любых двух различных прямых слагаемых* D_α *и* D_β *разложения* (D) *существует в множестве* $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$ *группа, содержащая одно из этих прямых слагаемых и не содержащая другого.*

(*c*) *Прямое разложение* (D) *группы* G *частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов* Ω.

Обозначим через Q множество всех тех Ω-подгрупп группы $V(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$, которые принадлежат множеству $C(\mathrm{D})$ и имеют в пересечении с D_α только нулевой элемент. Легко видеть, что подгруппа группы G, порожденная любой совокупностью подгрупп из Q, также принадлежит Q. Поэтому среди групп, принадлежащих Q, существует наибольшая, т.е. существует группа, принадлежащая Q и содержащая в качестве подгруппы любую группу из Q. Эту наибольшую группу из Q будем обозначать через $U(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$. Таким образом, символом $U(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$ будем обозначать наибольшую Ω-подгруппу группы $V(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$, принадлежащую множеству $C(\mathrm{D})$ и имеющую в пересечении с D_α только нулевой элемент. Если Ω фиксировано, то группу $U(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$ будем часто обозначать через $\check{D}_\alpha$.

Очевидно, $\check{D}_\alpha \neq \overline{D}_\alpha$, если D_α не является нулевой группой.

1.5. *Если прямое разложение* (D) *частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов* Ω, *то соотношение*

$$\overline{D}_\beta \subset \check{D}_\alpha \qquad (\alpha, \beta \in M) \tag{a}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\overline{D}_\beta \subset \overline{D}_\alpha \quad \textit{и} \quad \alpha \neq \beta \qquad (\alpha, \beta \in M). \tag{b}$$

Доказательство. 1°. Предположим, что разложение (D) частично упорядочено относительно Ω. Тогда $D_\alpha \neq \{0\}$, $\overline{D}_\alpha \neq \check{D}_\alpha$ и, значит, из условия (a) следует (b).

2°. Предположим теперь, что группы D_α и D_β удовлетворяют соотношению (b). В силу 1.4

$$\overline{D}_\beta \neq \overline{D}_\alpha \qquad (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in M). \tag{1}$$

Так как $\overline{D}_\beta \in C(\mathrm{D})$, то либо

$$\overline{D}_\beta \cap D_\alpha = \{0\}, \tag{2}$$

либо

$$D_\alpha \subset \overline{D}_\beta. \tag{3}$$

Но соотношение (3) при $\alpha \neq \beta$ невозможно. Действительно, если $D_\alpha \subset \overline{D}_\beta$, то $\overline{D}_\alpha \subset \overline{D}_\beta$, что в соединении с (b) дает равенство $\overline{D}_\alpha = \overline{D}_\beta$, противоречащее (1). Таким образом, имеет место соотношение (2). На основании (b) и (2) заключаем, что $\overline{D}_\beta$ является подгруппой $\overline{D}_\alpha$, имеющей в пересечении с D_α только нулевой элемент. Кроме того, $\overline{D}_\beta \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega)$. Поэтому $\overline{D}_\beta \subset \check{D}_\alpha$. Таким образом, из (b) следует (a).

1.6. *Если прямое разложение* (D) *группы* G *частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов* Ω, *то имеет место прямое разложение*

$$\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha \qquad (\alpha \in M). \tag{a}$$

Доказательство. Предположим, что разложение (D) частично упорядочено относительно Ω. Пусть D_α – произвольное прямое слагаемое разложения (D). Поскольку $\overline{D}_\alpha \in C(\mathrm{D})$, существует подмножество V множества M такое, что

$$\overline{D}_\alpha = \bigoplus_{\beta \in V} D_\beta. \tag{1}$$

Группа $\bigoplus\limits_{\beta \in V \setminus \{\alpha\}} D_\beta$, очевидно, является наибольшей подгруппой группы $\overline{D}_\alpha$, принадлежащей $C(\mathrm{D})$ и не содержащей D_α. Но группа $\check{D}_\alpha$ есть наибольшая Ω-подгруппа группы $\overline{D}_\alpha$, принадлежащая $C(\mathrm{D})$ и имеющая в пересечении с D_α только нулевой элемент. Поэтому

$$\check{D}_\alpha \subset \bigoplus_{\beta \in V \setminus \{\alpha\}} D_\beta. \tag{2}$$

Далее, поскольку $D_\beta \subset \overline{D}_\alpha$ при $\beta \in V$,

$$\overline{D}_\beta \subset \overline{D}_\alpha \qquad (\beta \in V). \tag{3}$$

Так как разложение (D) частично упорядочено относительно Ω, то в силу 1.4

$$\overline{D}_\beta \neq \overline{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha,\ \beta \in V). \tag{4}$$

Из (3) и (4) в силу 1.5 следует, что

$$\overline{D}_\beta \subset \check{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha,\ \beta \in V),$$

откуда

$$D_\beta \subset \check{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha,\ \beta \in V). \tag{5}$$

Сопоставляя (2) и (5), получим

$$\check{D}_\alpha = \bigoplus_{\beta \in V \setminus \{\alpha\}} D_\beta. \tag{6}$$

Теперь соотношения (1) и (6) показывают, что имеет место прямое разложение (a).

Пусть заданы прямое разложение группы G без нулевых слагаемых

$$G = \bigoplus_{i \in M} D_i \tag{D}$$

и множество Ω эндоморфизмов группы G. Два прямых слагаемых D_i и D_k разложения (D) будем называть Ω-*эквивалентными*, если

$$V(D_i, \mathrm{D}, \Omega) = V(D_k, \mathrm{D}, \Omega).$$

Нетрудно видеть, что множество всех прямых слагаемых разложения (D) распадается на непересекающиеся классы Ω-эквивалентных между собой прямых слагаемых. Разложение (D) тогда и только тогда является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω, когда каждый класс Ω-эквивалентных между собой прямых слагаемых содержит только одно прямое слагаемое разложения (D), т.е. любые два различных прямых слагаемых разложения (D) не являются Ω-эквивалентными. Если разложение (D) не является частично упорядоченным относительно Ω и число классов Ω-эквивалентных между собой прямых слагаемых этого разложения не меньше двух, то, объединяя в одно прямое слагаемое прямые слагаемые разложения (D), принадлежащие одному и тому же классу, мы получим новое прямое разложение группы G, которое будет уже частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω.

§ 2

2.1. Определение. Множество L называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар различных между собой элементов α, β множества L установлено отношение порядка, обозначаемое через $\alpha < \beta$ и удовлетворяющее следующим условиям:

1°. Отношения $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ исключают друг друга.

2°. Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Если α и β – два различных элемента частично упорядоченного множества L, то будем говорить, что β *несравнимо* с α, если ни одно из отношений $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ не имеет места.

В дальнейшем мы не будем исключать из рассмотрения и такие частично упорядоченные множества, в которых любые два различных элемента несравнимы.

2.2. Определение. Подмножество Γ частично упорядоченного множества L называется *замкнутым*, если из $\alpha \in \Gamma$ и $\lambda < \alpha$ следует $\lambda \in \Gamma$.

Легко видеть, что имеет место следующее предложение:

2.3. *Объединение и пересечение любой совокупности замкнутых подмножеств частично упорядоченного множества суть замкнутые множества.*

2.4. Определение. Два частично упорядоченных множества называются *подобными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок.

Предположим, что прямое разложение (D) частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов Ω. Пространство $R(\mathrm{D},\Omega)$ естественным образом превращается в частично упорядоченное множество, если для любых двух различных прямых слагаемых D_α и D_β разложения (D) положим $D_\beta < D_\alpha$ тогда и только тогда, когда D_β принадлежит замыканию одноточечного множества $\{D_\alpha\}$, или, что то же, когда $D_\beta \subset \overline{D}_\alpha$. Нетрудно видеть, что введенное таким образом отношение порядка удовлетворяет условиям 1°, 2° определения 2.1 и, следовательно, превращает множество $\{D_\alpha\}_{\alpha\in M}$ в частично упорядоченное множество, которое мы будем обозначать символом $\Theta(\mathrm{D},\Omega)$.

Если (D) есть частично упорядоченное относительно Ω прямое разложение группы G, то в множестве индексов M следующим образом введем отношение порядка: если α и β – два различных элемента множества M, то полагаем $\beta < \alpha$ тогда и только тогда, когда $D_\beta < D_\alpha$, или, что то же, когда $D_\beta \subset \overline{D}_\alpha$. Введенное таким образом отношение порядка превращает множество индексов M в частично упорядоченное множество, которое мы будем обозначать символом $L(\mathrm{D},\Omega)$. Легко видеть, что частично упорядоченные множества $\Theta(\mathrm{D},\Omega)$ и $L(\mathrm{D},\Omega)$ подобны между собой, причем соответствие $D_\alpha \longleftrightarrow \alpha$, $\alpha\in M$, является соответствием подобия.

2.5. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества эндоморфизмов Ω. Подгруппа $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma$, где $\Gamma\subset M$, тогда и только тогда допустима относительно Ω, когда множество индексов Γ является замкнутым подмножеством частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D},\Omega)$.

Доказательство. 1°. Положим

$$H = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma. \tag{1}$$

Предположим, что Γ – замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D},\Omega)$, и докажем, что тогда подгруппа H допустима относительно Ω. Сначала докажем, что

$$\overline{D}_\alpha \subset H \qquad (\alpha\in\Gamma). \tag{2}$$

Пусть $\alpha\in\Gamma$ и D_β, $\beta\in M$, есть прямое слагаемое разложения (D), являющееся подгруппой группы $\overline{D}_\alpha$. Тогда $\beta\leqslant\alpha$. Отсюда, поскольку $\alpha\in\Gamma$ и Γ замкнуто в $L(\mathrm{D},\Omega)$, следует, что $\beta\in\Gamma$, и, значит, в силу (1)

$$D_\beta \subset H \qquad (D_\beta\subset\overline{D}_\alpha,\ \alpha\in\Gamma). \tag{3}$$

Так как группа $\overline{D}_\alpha$ порождается некоторым множеством прямых слагаемых разложения (D), то на основании (3) заключаем, что имеет место (2). Далее, поскольку $D_\alpha \subset \overline{D}_\alpha$, в силу (1) и (2)

$$H = \Big[\bigcup_{\alpha\in\Gamma} \overline{D}_\alpha\Big]^{7}. \tag{4}$$

Теперь, принимая во внимание, что $\overline{D}_\alpha$ является Ω-подгруппой группы G для всякого $\alpha \in M$, мы на основании (4) заключаем, что H есть Ω-подгруппа группы G.

2°. Предположим теперь, что группа H, $H = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma$, является Ω-подгруппой группы G, и докажем, что тогда множество Γ замкнуто в $L(\mathrm{D}, \Omega)$.

Пусть $\alpha \in \Gamma$. Надо доказать, что любой элемент $\beta \in L(\mathrm{D}, \Omega)$, удовлетворяющий соотношению $\beta < \alpha$, принадлежит Γ. Так как $\beta < \alpha$, то $D_\beta < D_\alpha$ и, значит,

$$D_\beta \subset \overline{D}_\alpha. \tag{5}$$

Поскольку $\alpha \in \Gamma$, то $D_\alpha \subset H$. Кроме того, H есть Ω-подгруппа группы G, принадлежащая множеству $C(\mathrm{D})$. Далее, $\overline{D}_\alpha$ является наименьшей Ω-подгруппой группы G, принадлежащей $C(\mathrm{D})$ и содержащей D_α. Поэтому

$$\overline{D}_\alpha \subset H. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем $D_\beta \subset H$, т.е. $D_\beta \subset \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma$. Отсюда следует, что $\beta \in \Gamma$. Этим доказано, что Γ является замкнутым подмножеством $L(\mathrm{D}, \Omega)$.

2.6. Определение. Пусть λ – элемент частично упорядоченного множества L. Символом $V(L, \lambda)$ будем обозначать множество всех элементов $\alpha \in L$, удовлетворяющих условию $\alpha \leqslant \lambda$. Множество $V(L, \lambda)$ называется *комбинаторным замыканием* элемента λ в частично упорядоченном множестве L.

Символом $U(L, \lambda)$ будем обозначать множество всех элементов $\alpha \in L$, удовлетворяющих условию $\alpha < \lambda$.

Легко видеть, что имеют место следующие предложения:

2.7. *Если λ – элемент частично упорядоченного множества L, то множества $V(L, \lambda)$ и $U(L, \lambda)$ замкнуты в L.*

2.8. *Если Γ – замкнутое подмножество частично упорядоченного множества L и $\lambda \in \Gamma$, то множества $V(L, \lambda)$ и $U(L, \lambda)$ содержатся в Γ.*

2.9. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества эндоморфизмов Ω. Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$, $\alpha \in M$, и положим

[7] Если A, B, C, … суть подмножества группы G, то символом $[A, B, C, \dots]$ будем обозначать наименьшую подгруппу группы G, содержащую множества A, B, C, …

$U_\alpha = V_\alpha \setminus \{\alpha\}$. *Тогда имеют место равенства*

$$\overline{D}_\alpha = \bigoplus_{\beta \in V_\alpha} D_\beta \qquad (\alpha \in M), \tag{a}$$

$$\check{D}_\alpha = \bigoplus_{\beta \in U_\alpha} D_\beta \qquad (\alpha \in M). \tag{b}$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in M$. По определению $\overline{D}_\alpha$ есть наименьшая Ω-подгруппа группы G, принадлежащая множеству $C(\mathrm{D})$ и содержащая D_α. Поскольку $\overline{D}_\alpha \in C(\mathrm{D})$, существует подмножество Γ множества M такое, что

$$\overline{D}_\alpha = \bigoplus_{\beta \in \Gamma} D_\beta. \tag{1}$$

Так как $\overline{D}_\alpha$ есть Ω-допустимая подгруппа группы G, то в силу 2.5 множество Γ замкнуто в $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Отсюда, поскольку $\alpha \in \Gamma$, в силу 2.8 следует, что Γ содержит комбинаторное замыкание V_α элемента α,

$$V_\alpha \subset \Gamma. \tag{2}$$

В силу 2.7 V_α является замкнутым подмножеством $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Следовательно, согласно 2.5 группа $\bigoplus\limits_{\gamma \in V_\alpha} D_\gamma$ является допустимой относительно Ω. Кроме того, $D_\alpha \subset \bigoplus\limits_{\gamma \in V_\alpha} D_\gamma$, так как $\alpha \in V_\alpha$. Но $\overline{D}_\alpha$ есть наименьшая Ω-подгруппа группы G, принадлежащая множеству $C(\mathrm{D})$ и содержащая D_α. Поэтому

$$\overline{D}_\alpha \subset \bigoplus_{\gamma \in V_\alpha} D_\gamma. \tag{3}$$

Теперь на основании (1), (2), (3) заключаем, что имеет место равенство (a).

Из определения группы $\check{D}_\alpha$ следует, что $\check{D}_\alpha \in C(\mathrm{D})$. Далее, в силу 1.6 имеем $\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha$. Отсюда и из равенства (a) теперь следует равенство (b). Предложение 2.9 доказано.

Пусть F – подмножество частично упорядоченного множества L. Элемент $\alpha \in F$ называется *минимальным* (*максимальным*) элементом множества F, если в F нет элемента λ, удовлетворяющего соотношению $\lambda < \alpha$ $(\lambda > \alpha)$.

Будем говорить, что подмножество F частично упорядоченного множества L удовлетворяет *условию обрыва убывающих цепей*, если каждая убывающая последовательность

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \ldots$$

элементов из F содержит только конечное число членов.

Будем говорить, что подмножество F частично упорядоченного множества L удовлетворяет *условию минимальности*, если любое непустое подмножество множества F обладает по крайней мере одним минимальным элементом.

Легко видеть, что подмножество F частично упорядоченного множества L тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.

§ 3

В этом параграфе изложены некоторые определения и вспомогательные предложения, необходимые в следующих параграфах.

Пусть

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– прямое разложение группы G. Каждому прямому слагаемому A_ν разложения (A) поставим в соответствие эндоморфизм φ_ν группы G, отображающий каждый элемент $g \in G$ в компоненту этого элемента в прямом слагаемом A_ν разложения (A). Эндоморфизм φ_ν будем называть *эндоморфизмом, соответствующим прямому слагаемому* A_ν *разложения* (A). Нетрудно видеть, что φ_ν является нормальным[8] идемпотентным эндоморфизмом группы G. Множество $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ будем называть *множеством эндоморфизмов, соответствующих разложению* (A), и обозначать через Ω_{A}.

3.1. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\nu \in \Gamma} F_\nu \tag{F}$$

– прямое разложение группы G *и* ψ_ν *– эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому* F_ν *разложения* (F). *Подгруппа* H *группы* G *тогда и только тогда допустима относительно эндоморфизма* ψ_ν, *когда* H *удовлетворяет условию*

$$\psi_\nu H = F_\nu \cap H. \tag{a}$$

Доказательство. Из (a), очевидно, следует соотношение $\psi_\nu H \subset H$ и, таким образом, условие (a) является достаточным. Докажем, что оно является также необходимым. Пусть H – подгруппа группы G, допустимая относительно эндоморфизма ψ_ν, т.е.

$$\psi_\nu H \subset H. \tag{1}$$

Из определения ψ_ν следует, что

$$\psi_\nu x = x \qquad (x \in F_\nu),$$

откуда

$$F_\nu \cap H \subset \psi_\nu H. \tag{2}$$

С другой стороны, поскольку $\psi_\nu H \subset F_\nu$, из (1) следует соотношение

$$\psi_\nu H \subset F_\nu \cap H. \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3), получим (a). Таким образом, условие (a) является также необходимым.

[8] Эндоморфизм группы называется *нормальным*, если он перестановочен со всеми внутренними автоморфизмами этой группы.

3.2. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\nu \in \Gamma} F_\nu \tag{F}$$

– прямое разложение группы G. Для того чтобы нормальная подгруппа H группы G была допустимой относительно множества эндоморфизмов Ω_{F}, необходимо и достаточно, чтобы имело место прямое разложение

$$H = \bigoplus_{\nu \in \Gamma} (F_\nu \cap H). \tag{H}$$

Доказательство. 1°. Докажем необходимость условия. Обозначим через ψ_ν эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому F_ν разложения (F), тогда

$$\Omega_{\mathrm{F}} = \{\psi_\nu\}_{\nu \in \Gamma}.$$

Пусть H – нормальная подгруппа группы G, допустимая относительно множества эндоморфизмов Ω_{F}, т.е.

$$\psi_\nu H \subset H \qquad (\nu \in \Gamma). \tag{1}$$

Докажем, что имеет место разложение (H). Так как $\psi_\nu H$ является компонентой нормальной подгруппы H в прямом слагаемом F_ν разложения (F), то нетрудно видеть, что $\psi_\nu H$ является нормальной подгруппой группы H, $\nu \in \Gamma$, и имеет место соотношение $\Big[\bigcup\limits_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H\Big] = \bigoplus\limits_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H$. Отсюда следует, что

$$H \subset \bigoplus_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H. \tag{2}$$

На основании (1), (2) заключаем, что

$$H = \bigoplus_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H. \tag{3}$$

Далее, из (1) в силу 3.1 следует равенство

$$\psi_\nu H = F_\nu \cap H \qquad (\nu \in \Gamma). \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получим разложение (H).

2°. Докажем достаточность условия. Предположим, что H – нормальная подгруппа группы G, для которой имеет место разложение (H). Пусть $\psi_\alpha \in \Omega_{\mathrm{F}}$. Поскольку ψ_α – эндоморфизм группы G, из соотношения (H) следует равенство

$$\psi_\alpha H = \Big[\bigcup_{\nu \in \Gamma} \psi_\alpha (F_\nu \cap H)\Big] \qquad (\psi_\alpha \in \Omega_{\mathrm{F}}). \tag{5}$$

Так как ψ_α – эндоморфизм группы G, соответствующий прямому слагаемому F_α разложения (F), имеют место следующие соотношения:

$$\psi_\alpha F_\nu = \{0\} \qquad (\alpha \neq \nu,\ \nu \in \Gamma), \tag{6}$$

$$\psi_\alpha x = x \qquad (x \in F_\alpha). \tag{7}$$

Из (6) следует равенство

$$\psi_\alpha(F_\nu \cap H) = \{0\} \qquad (\alpha \neq \nu,\ \nu \in \Gamma). \tag{8}$$

Далее, в силу (7)

$$\psi_\alpha(F_\alpha \cap H) = F_\alpha \cap H. \tag{9}$$

Сопоставляя (5), (8), (9), получим $\psi_\alpha H = F_\alpha \cap H$, т.е.

$$\psi_\alpha H \subset H \qquad (\psi_\alpha \in \Omega_{\mathrm{F}}). \tag{10}$$

Соотношение (10) показывает, что подгруппа H допустима относительно множества эндоморфизмов Ω_{F}.

3.3. *Если*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– два прямых разложения группы G и $H \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, то имеет место прямое разложение

$$H = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H).$$

Доказательство. Предложение является следствием предложения 3.2, так как по условию $H \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и, значит, H является нормальной подгруппой группы G, допустимой относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}.

3.4. *Если*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– два прямых разложения группы G, $\overline{D}_\alpha$ – наименьшая принадлежащая множеству $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ группа, содержащая D_α, и $\check{D}_\alpha$ – наибольшая подгруппа $\overline{D}_\alpha$, принадлежащая множеству $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и не содержащая D_α, то имеют место прямые разложения

$$\overline{D}_\alpha = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap \overline{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M), \tag{a}$$

$$\check{D}_\alpha = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M). \tag{b}$$

Это предложение является частным случаем предыдущего.

3.5. Определение. Прямое разложение группы G,

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

называется *согласованным* с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

если оно является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}, соответствующих прямому разложению (A).

3.6. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Обозначим через H_P прямую сумму $\bigoplus\limits_{\lambda \in P} E_\lambda$, где $P \subset L$. Прямое разложение

$$H_P = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_P)$$

имеет место тогда и только тогда, когда P является замкнутым подмножеством частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$.

Это предложение непосредственно следует из предложений 2.5 и 3.2.

3.7. *Пусть L – частично упорядоченное множество и*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda, \tag{E}$$

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– два прямых разложения группы G, причем разложение (E) *не содержит нулевых прямых слагаемых. Если для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества L имеет место равенство*

$$H_P = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_P), \tag{a}$$

где $H_P = \bigoplus\limits_{\lambda \in P} E_\lambda$, то разложение (E) *согласовано с разложением* (A).

Доказательство. Пусть E_i и E_k – два различных прямых слагаемых разложения (E). Докажем, что в $C(\mathrm{E})$ существует Ω_{A}-подгруппа группы G, содержащая одно из этих прямых слагаемых и не содержащая другого. Этим в силу 1.4 будет доказано, что разложение (E) согласовано с разложением (A). Предположим, например, что $i < k$ или i несравнимо с k. Тогда, очевидно, k не содержится в комбинаторном замыкании V_i элемента i в частично упорядоченном множестве L,

$$k \notin V_i. \tag{1}$$

Множество V_i, очевидно, является замкнутым подмножеством L. Полагая в равенстве (a) $P = V_i$, получим

$$H_{V_i} = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{V_i}). \tag{2}$$

В силу 3.2 соотношение (2) означает, что подгруппа H_{V_i} допустима относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}. Кроме того, группа H_{V_i} содержит прямое слагаемое E_i и в силу (1) не содержит прямого слагаемого E_k, поскольку по условию E_k – ненулевая группа. Таким образом, разложение (E) согласовано с разложением (A).

3.8. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– прямое разложение группы G, ψ_ν – эндоморфизм группы G, соответствующий прямому слагаемому A_ν разложения (A), *и $\{B_\lambda\}_{\lambda \in Q}$ – множество подгрупп группы G, допустимых относительно эндоморфизма ψ_ν. Тогда имеет место соотношение*

$$A_\nu \cap \big[\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda\big] = \big[\bigcup_{\lambda \in Q} (A_\nu \cap B_\lambda)\big]. \tag{a}$$

Доказательство. Поскольку ψ_ν – эндоморфизм группы G, имеет место соотношение

$$\psi_\nu\Big(\big[\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda\big]\Big) = \big[\bigcup_{\lambda \in Q} \psi_\nu B_\lambda\big]. \tag{1}$$

Далее, по условию группы B_λ допустимы относительно эндоморфизма ψ_ν, т.е.

$$\psi_\nu B_\lambda \subset B_\lambda \qquad (\lambda \in Q), \tag{2}$$

откуда в силу (1)

$$\psi_\nu\Big(\big[\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda\big]\Big) \subset \big[\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda\big]. \tag{3}$$

Из (2) и (3) в силу 3.1 следуют соответственно соотношения

$$\psi_\nu B_\lambda = A_\nu \cap B_\lambda \qquad (\lambda \in Q), \tag{4}$$

$$\psi_\nu\Big(\big[\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda\big]\Big) = A_\nu \cap \big[\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda\big]. \tag{5}$$

Сопоставляя (1) и (5), получим $A_\nu \cap \bigl[\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda\bigr] = \bigl[\bigcup_{\lambda\in Q} \psi_\nu B_\lambda\bigr]$, откуда в силу (4) следует соотношение (a).

3.9. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\nu\in N} A_\nu \tag{A}$$

– прямое разложение группы G и $\{B_\lambda\}_{\lambda\in Q}$ – множество подгрупп группы G, допустимых относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}. Тогда имеет место соотношение

$$A_\nu \cap \bigl[\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda\bigr] = \bigl[\bigcup_{\lambda\in Q} (A_\nu \cap B_\lambda)\bigr] \qquad (\nu \in N).$$

Это предложение непосредственно следует из предыдущего.

3.10. *Пусть A, B, D – подгруппы группы G, C – подгруппа группы A и*

$$B = C \oplus D. \tag{1}$$

Тогда имеет место прямое разложение

$$A \cap B = C \oplus (A \cap D). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент пересечения $A \cap B$. В силу (1) $x = c + d$, где $c \in C$, $d \in D$, и, значит, $d = x - c \in A$, $d \in A \cap D$. Таким образом, элемент x является суммой элементов c и d, принадлежащих соответственно подгруппам C и $A \cap D$. Следовательно, группа $A \cap B$ порождается подгруппами C и $A \cap D$. Кроме того, принимая во внимание (1), нетрудно видеть, что C и $A \cap D$ – нормальные подгруппы группы $A \cap B$, пересечение которых содержит только нулевой элемент группы. Поэтому имеет место прямое разложение (2).

§ 4

4.1. Теорема. *Для того чтобы прямое разложение группы обладало общим продолжением с любым другим прямым разложением группы, необходимо и достаточно, чтобы каждое прямое слагаемое этого разложения было допустимым относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G.*

Доказательство. 1°. Докажем достаточность условия. Пусть

$$G = \bigoplus_{\alpha\in M} H_\alpha \tag{H}$$

– прямое разложение группы G, каждое прямое слагаемое которого допустимо относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G, и

$$G = \bigoplus_{k\in\Gamma} F_k \tag{F}$$

– любое другое прямое разложение группы G. Так как группа H_α допустима относительно множества эндоморфизмов Ω, она допустима также относительно множества Ω_{F} нормальных идемпотентных эндоморфизмов, соответствующих разложению (F). Следовательно, в силу 3.2 имеет место прямое разложение

$$H_\alpha = \bigoplus_{k\in\Gamma}(F_k \cap H_\alpha) \qquad (\alpha \in M). \tag{1}$$

Заменяя в разложении (H) каждое прямое слагаемое H_α по формуле (1), получим прямое разложение

$$G = \bigoplus_{\substack{k\in\Gamma\\ \alpha\in M}}(F_k \cap H_\alpha),$$

которое, очевидно, является общим продолжением разложений (H) и (F). Таким образом, условие теоремы является достаточным.

2°. Докажем необходимость условия. Пусть

$$G = \bigoplus_{i\in N} H_i \tag{2}$$

– прямое разложение группы G, обладающее общим продолжением с любым другим прямым разложением группы G. Докажем, что каждое прямое слагаемое H_i разложения (2) является допустимым относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Пусть $\psi \in \Omega$, e – тождественный автоморфизм группы G и $\overline{\psi} = e - \psi$. Положим $F_1 = \psi G$, $F_2 = \overline{\psi} G$. Тогда, как известно, имеет место прямое разложение

$$G = F_1 \oplus F_2, \tag{3}$$

причем ψ и $\overline{\psi}$ будут, очевидно, идемпотентными эндоморфизмами группы G, соответствующими разложению (3).

Разложения (2) и (3) обладают общим продолжением, поскольку разложение (2) обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением группы G. Пусть

$$G = \bigoplus_{n\in Q} C_n \tag{4}$$

– общее продолжение разложений (2) и (3). Обозначим через Z_{ki} прямую сумму всех тех слагаемых C_n разложения (4), которые содержатся в пересечении $F_k \cap H_i$. Тогда, поскольку разложение (4) является продолжением разложений (2) и (3), имеет место прямое разложение

$$H_i = Z_{1i} \oplus Z_{2i} \qquad (i \in N). \tag{5}$$

Кроме того, из определения Z_{ki} следует, что

$$Z_{1i} \subset F_1 \cap H_i, \qquad Z_{2i} \subset F_2 \cap H_i \qquad (i \in N).$$

Отсюда, принимая во внимание (3), получим

$$Z_{1i} \oplus Z_{2i} \subset (F_1 \cap H_i) \oplus (F_2 \cap H_i) \qquad (i \in N). \tag{6}$$

На основании (5), (6) заключаем, что имеет место прямое разложение

$$H_i = (F_1 \cap H_i) \oplus (F_2 \cap H_i) \qquad (i \in N). \tag{7}$$

Теперь, поскольку ψ – нормальный идемпотентный эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому F_1 разложения (3), из (7) в силу 3.2 следует, что каждое слагаемое H_i разложения (2) является допустимым относительно эндоморфизма ψ. Этим доказано, что каждое прямое слагаемое разложения (2) является допустимым относительно множества эндоморфизмов Ω. Таким образом, условие теоремы является также необходимым. Теорема доказана.

Курошем и Фиттингом были доказаны следующие две теоремы [9]:

1. *Прямое разложение группы G,*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} A_\alpha,$$

тогда и только тогда обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением этой группы, когда все слагаемые A_α являются характеристическими (допустимыми) относительно множества нормальных автоморфизмов группы G.

2. *Прямое слагаемое группы G, допустимое (характеристическое) относительно множества всех нормальных автоморфизмов этой группы, является допустимым также относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G.*

Следствием этих двух теорем и теоремы 4.1 является следующее предложение:

4.2. *Для того чтобы прямое слагаемое группы было допустимым (характеристическим) относительно множества всех нормальных эндоморфизмов или множества всех нормальных автоморфизмов группы, необходимо и достаточно, чтобы оно было допустимым относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов этой группы.*

На основании 4.2 заключаем, что имеет место следующее предложение:

4.3. *Прямое разложение группы тогда и только тогда будет частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов или множества всех нормальных автоморфизмов группы, когда оно является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов этой группы.*

[9] См. А. Г. Курош [3]; H. Fitting [9].

§ 5

5.1. *Пусть*

$$H = B \oplus S, \tag{a}$$

$$H = \Bigl(\bigoplus_{\nu\in\Gamma} C_\nu\Bigr) \oplus S \tag{b}$$

– два прямых разложения группы H. Положим

$$B_\nu = B \cap (C_\nu \oplus S) \qquad (\nu \in \Gamma). \tag{c}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$B_\nu \oplus S = C_\nu \oplus S \qquad (\nu \in \Gamma), \tag{d}$$

$$B = \bigoplus_{\nu\in\Gamma} B_\nu. \tag{e}$$

Доказательство. На основании (a), (b) заключаем, что

$$C_\nu \oplus S \subset B \oplus S \qquad (\nu \in \Gamma),$$

откуда в силу 3.10 следует равенство

$$C_\nu \oplus S = \bigl(B \cap (C_\nu \oplus S)\bigr) \oplus S,$$

или, в силу (c), $C_\nu \oplus S = B_\nu \oplus S$, т.е. имеет место соотношение (d).

В силу (c)

$$\Bigl[\bigcup_{\nu\in\Gamma} B_\nu\Bigr] \subset B, \tag{1}$$

отсюда и из (a) следует соотношение

$$\Bigl[\bigcup_{\nu\in\Gamma} B_\nu\Bigr] \cap S = \{0\}. \tag{2}$$

На основании (c) и (b) заключаем, что

$$B_\nu \cap \Bigl[\bigcup_{\mu\neq\nu} B_\mu\Bigr] \subset (C_\nu \oplus S) \cap \Bigl(\Bigl(\bigoplus_{\mu\neq\nu} C_\mu\Bigr) \oplus S\Bigr) = S,$$

откуда в силу (2) следует соотношение

$$B_\nu \cap \Bigl[\bigcup_{\mu\neq\nu} B_\mu\Bigr] = \{0\}. \tag{3}$$

Далее, в силу (b) и (d)

$$H = \Bigl[\bigcup_{\nu\in\Gamma} B_\nu,\, S\Bigr]. \tag{4}$$

Из равенства (c), определяющего B_ν, следует, что B_ν является нормальной подгруппой группы H, $\nu \in \Gamma$. Поэтому на основании (2), (3), (4) заключаем, что имеет место прямое разложение

$$H = \Big(\bigoplus_{\nu\in\Gamma} B_\nu \Big) \oplus S. \tag{5}$$

Наконец, из соотношений (a), (1), (5) следует равенство (e).

5.2. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Введем следующие обозначения:

- $\overline{D}_\alpha$ – *наименьшая группа из множества $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, содержащая D_α;*
- $\check{D}_\alpha$ – *наибольшая подгруппа группы $\overline{D}_\alpha$, принадлежащая множеству $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и не содержащая D_α;*
- $E_{(\alpha,\nu)}$ – *компонента группы $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения* (D).

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha \qquad (\alpha \in M); \tag{a}$$

$$\overline{D}_\alpha = \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap \overline{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M); \tag{b}$$

$$\check{D}_\alpha = \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M); \tag{c}$$

$$A_\nu \cap \overline{D}_\alpha = C_{(\alpha,\nu)} \oplus (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \qquad (\nu \in N,\ \alpha \in M), \tag{d}$$
$$\textit{где}\ \ C_{(\alpha,\nu)} = A_\nu \cap \Big(D_\alpha \oplus \bigoplus_{\gamma\neq\nu} (A_\gamma \cap \check{D}_\alpha) \Big);$$

$$E_{(\alpha,\nu)} = D_\alpha \cap [A_\nu \cap \overline{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha]; \tag{e}$$

$$E_{(\alpha,\nu)} = D_\alpha \cap (C_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha); \tag{f}$$

$$E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha = C_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha; \tag{g}$$

$$D_\alpha = \bigoplus_{\nu\in N_\alpha} E_{(\alpha,\nu)}, \quad \textit{где}\ \ N_\alpha = \big\{ \nu \in N \ \big|\ E_{(\alpha,\nu)} \neq \{0\} \big\}; \tag{h}$$

$$[A_\nu \cap \overline{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha] = E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha. \tag{i}$$

Доказательство. По условию разложение (D) согласовано с разложением (A). Поэтому имеют место соотношения (a), (b), (c). Действительно, (a) имеет место в силу 1.6, соотношения (b) и (c) – в силу 3.4.

Из (a) и (c) следует равенство

$$\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \Big(\bigoplus_{\gamma \in N} (A_\gamma \cap \check{D}_\alpha) \Big),$$

которое можно записать в виде

$$\overline{D}_\alpha = (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \oplus D_\alpha \oplus \Big(\bigoplus_{\gamma \neq \nu} (A_\gamma \cap \check{D}_\alpha) \Big). \tag{1}$$

Теперь из (1) в силу 3.10 следует соотношение (d).

Отметим, что $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha \subset \overline{D}_\alpha$ и $\check{D}_\alpha$ является прямой суммой некоторого множества прямых слагаемых разложения (D). Поэтому, принимая во внимание определение группы $E_{(\alpha,\nu)}$, мы можем утверждать, что $E_{(\alpha,\nu)}$ является также компонентой группы $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ в слагаемом D_α разложения $\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha$ и, значит, имеет место соотношение (e).

На основании равенства (d) и соотношений (a), (b), (c) заключаем, что

$$[A_\nu \cap \overline{D}_\alpha,\, \check{D}_\alpha] = C_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha. \tag{2}$$

Сопоставляя (e) и (2), получим соотношение (f).

Заменяя в соотношении (b) каждое прямое слагаемое $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ на основании формулы (d), получим

$$\overline{D}_\alpha = \Big(\bigoplus_{\nu \in N} C_{(\alpha,\nu)} \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \Big). \tag{3}$$

Воспользуемся теперь предложением 5.1, заменив в нем H, B, S, C_ν, Γ соответственно через $\overline{D}_\alpha$, D_α, $\check{D}_\alpha$, $C_{(\alpha,\nu)}$, N. Согласно предложению 5.1 из соотношений (a), (3), (f) следуют соотношения (g) и

$$D_\alpha = \bigoplus_{\nu \in N} E_{(\alpha,\nu)}. \tag{4}$$

Исключая теперь в разложении (4) прямые слагаемые, являющиеся нулевыми группами, получим соотношение (h).

Наконец, сопоставляя соотношения (2) и (g), получим соотношение (i).

5.3. *Если разложение*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

согласовано с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

то компонента группы $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ *в прямом слагаемом* D_α *разложения* (D) *является нулевой группой тогда и только тогда, когда* $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha \subset \check{D}_\alpha$.

Доказательство. Предположим, что разложение (D) согласовано с разложением (A). Тогда в силу 5.2 компонента $E_{(\alpha,\nu)}$ группы $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D) удовлетворяет соотношению

$$[A_\nu \cap \overline{D}_\alpha,\, \check{D}_\alpha] = E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha.$$

Это соотношение показывает, что $E_{(\alpha,\nu)}$ тогда и только тогда будет нулевой группой, когда $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha \subset \check{D}_\alpha$.

5.4. Определение. Пусть A – подгруппа группы G,

$$G = \bigoplus_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G и Ω – какое-либо множество эндоморфизмов группы G. Символом $S(A, \mathrm{E}, \Omega)$ будем обозначать множество

$$\{\lambda \in L \mid A \cap \overline{E}_\lambda \not\subset \check{E}_\lambda\},$$

где $\overline{E}_\lambda$ – наименьшая подгруппа из множества $\Delta(\mathrm{E}, \Omega)$, содержащая E_λ, и $\check{E}_\lambda$ – наибольшая подгруппа $\overline{E}_\lambda$, принадлежащая $\Delta(\mathrm{E}, \Omega)$ и не содержащая E_λ.

5.5. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеет место соотношение

$$L = \bigcup_{\nu\in N} S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{a}$$

Доказательство. Допустим, что соотношение (a) не имеет места. Тогда существует индекс $\lambda \in L$, удовлетворяющий соотношению

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \in N). \tag{1}$$

По условию разложение (E) согласовано с разложением (A), следовательно, в силу 3.4

$$\overline{E}_\lambda = \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap \overline{E}_\lambda), \tag{2}$$

$$\check{E}_\lambda = \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap \check{E}_\lambda). \tag{3}$$

Сопоставляя (1), (2), (3), получим

$$\overline{E}_\lambda = \check{E}_\lambda,$$

что невозможно, поскольку $E_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$ и $\check{E}_\lambda$ не содержит E_λ. Этим доказано, что имеет место соотношение (a).

5.6. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда эквивалентны следующие два свойства разложения (E):

(*a*) *Для каждого $\lambda \in L$ существует не больше одного прямого слагаемого A_ν разложения* (A), *для которого компонента группы $A_\nu \cap \overline{E}_\lambda$ в прямом слагаемом E_λ разложения* (E) *является ненулевой группой.*

(*b*) *Для каждого $\lambda \in L$ существует не больше одного прямого слагаемого A_ν разложения* (A), *удовлетворяющего соотношению*

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \not\subset \check{E}_\lambda,$$

или, другими словами, при $\nu \neq \gamma$, $\nu, \gamma \in N$, множества $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и $S(A_\gamma, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ не пересекаются.

Это предложение непосредственно следует из предложения 5.3.

5.7. Определение. Пусть

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda, \tag{E}$$

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– два прямых разложения группы G. Разложение (E) будем называть *вполне согласованным* с разложением (A), если оно согласовано с (A) и обладает хотя бы одним из свойств (*a*) или (*b*) предложения 5.6.

5.8. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$L = \bigcup_{\nu \in N} S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}), \tag{a}$$

$$S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}) \cap S(A_\gamma, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}) = \varnothing \qquad (\nu \neq \gamma,\ \nu, \gamma \in N), \tag{b}$$

где $\varnothing$ – пустое множество. Таким образом, существует однозначное отображение множества L на множество N, ставящее в соответствие элементу $\lambda \in L$ тот единственный элемент $\nu \in N$, для которого имеет место соотношение*

$$\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}).$$

Это отображение будем обозначать символом ρ.

Доказательство. По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому имеют место соотношения (a) и (b). Действительно, (a) имеет место в силу 5.5, соотношение (b) имеет место в силу определения 5.7. Существование отображения ρ теперь следует из соотношений (a) и (b).

5.9. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$A_{\rho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda \not\subset \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{a}$$

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \rho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L), \tag{b}$$

$$A_{\rho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda \neq A_{\rho(\lambda)} \cap \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{c}$$

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda = A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \rho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L). \tag{d}$$

Доказательство. Согласно определению отображения ρ

$$\lambda \in S(A_{\rho(\lambda)}, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}) \qquad (\lambda \in L), \tag{1}$$

$$\lambda \notin S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}) \qquad (\nu \neq \rho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L). \tag{2}$$

Принимая во внимание определение 5.4, легко видеть, что соотношения (a) и (b) следуют соответственно из (1) и (2). Соотношение (c) следует, очевидно, из соотношения (a). Наконец, в силу (b)

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \subset A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \rho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L),$$

откуда, поскольку $\check{E}_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$, следует соотношение (d).

5.10. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

* Построенное отображение будет отображением *на* N, если в (A) нет нулевых слагаемых (данное утверждение следует из доказываемого в § 6 предложения 6.5). – *Прим. ред.*

Обозначим через L *множество всех упорядоченных пар* $(\alpha,\,\nu)$, $\alpha \in M$, $\nu \in N$, *для которых компонента* $E_{(\alpha,\,\nu)}$ *группы* $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ *в прямом слагаемом* D_α *разложения* (D) *отлична от нуля. Тогда имеет место прямое разложение*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda, \tag{E}$$

которое является продолжением разложения (D) *и вполне согласовано с разложением* (A).

Доказательство. 1°. Легко видеть, что имеет место разложение (E). Действительно, в силу 5.2

$$D_\alpha = \bigoplus_{\lambda \in L^{(\alpha)}} E_\lambda, \tag{1}$$

где $L^{(\alpha)}$ – множество тех пар $(\gamma,\,\nu) \in L$, у которых первый индекс γ фиксирован и равен α. Из определения L следует, что

$$L = \bigcup_{\alpha \in M} L^{(\alpha)}. \tag{2}$$

Заменяя теперь в разложении (D) каждое прямое слагаемое D_α на основании равенства (1) прямой суммой групп E_λ и принимая во внимание (2), получим прямое разложение (E), которое, очевидно, является продолжением разложения (D).

2°. Докажем, что разложение (E) согласовано с разложением (A).

Нетрудно видеть, что

$$\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}}) \subset \Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{3}$$

Это соотношение имеет место потому, что разложение (E) является продолжением разложения (D).

Пусть $E_{(\alpha,\,\nu)}$ и $E_{(\alpha_1,\,\nu_1)}$ – два различных прямых слагаемых разложения (E). Докажем, что существует принадлежащая множеству $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ группа, содержащая одно из этих прямых слагаемых и не содержащая другого.

1-й случай: $\overline{D}_{\alpha_1} \subset \check{D}_\alpha$. В этом случае, так как $E_{(\alpha_1,\,\nu_1)} \subset D_{\alpha_1} \subset \overline{D}_{\alpha_1}$, имеем

$$E_{(\alpha_1,\,\nu_1)} \subset \check{D}_\alpha. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что $E_{(\alpha,\,\nu)}$ – ненулевая подгруппа группы D_α и

$$\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha,$$

заключаем, что

$$E_{(\alpha,\,\nu)} \not\subset \check{D}_\alpha. \tag{5}$$

Далее, поскольку $\check{D}_\alpha \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, в силу (3) имеем

$$\check{D}_\alpha \in \Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{6}$$

Соотношения (4), (5), (6) показывают, что $\check{D}_\alpha$ является искомой группой, содержащей $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$ и не содержащей $E_{(\alpha,\nu)}$.

2-й случай: $\overline{D}_\alpha \subset \check{D}_{\alpha_1}$. Так же, как и в первом случае, убеждаемся в том, что $\check{D}_{\alpha_1}$ является искомой группой.

3-й случай: $\overline{D}_{\alpha_1} \not\subset \check{D}_\alpha$ и $\overline{D}_\alpha \not\subset \check{D}_{\alpha_1}$. В этом случае, очевидно, имеет место равенство

$$D_{\alpha_1} \cap \overline{D}_\alpha = \{0\} \quad \text{при } \alpha_1 \neq \alpha,$$

откуда, поскольку $E_{(\alpha_1,\nu_1)} \subset D_{\alpha_1}$ и $E_{(\alpha,\nu)} \subset D_\alpha$, следует соотношение

$$E_{(\alpha_1,\nu_1)} \cap (E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha) = \{0\}. \tag{7}$$

Используя соотношение (1), покажем, что соотношение (7) имеет место также при $\alpha_1 = \alpha$. Группы $E_{(\alpha,\nu)}$ и $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$, $\nu \neq \nu_1$, суть различные прямые слагаемые разложения (1). Поэтому, обозначая через B сумму прямых слагаемых разложения (1), отличных от $E_{(\alpha,\nu)}$ и $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$, получим

$$D_\alpha = E_{(\alpha_1,\nu_1)} \oplus E_{(\alpha,\nu)} \oplus B. \tag{8}$$

Так как $\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha$, из (8) следует равенство

$$\overline{D}_\alpha = E_{(\alpha_1,\nu_1)} \oplus (E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha) \oplus B,$$

которое показывает, что соотношение (7) имеет место также при $\alpha_1 = \alpha$. Так как $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$ – ненулевая группа, на основании (7) заключаем, что

$$E_{(\alpha_1,\nu_1)} \not\subset E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha. \tag{9}$$

Докажем, что

$$E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha \in \Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{10}$$

Группа $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ допустима относительно Ω_{A}, поскольку она является подгруппой прямого слагаемого A_ν разложения (A). Группа $\check{D}_\alpha$ также допустима относительно Ω_{A}, поскольку $\check{D}_\alpha \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Кроме того, в силу 5.2

$$E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha = [A_\nu \cap \overline{D}_\alpha,\, \check{D}_\alpha].$$

Следовательно, группа $E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha$ также допустима относительно Ω_{A}.

Группа $E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha$ является прямой суммой некоторого множества прямых слагаемых E_λ разложения (E). Это следует из того, что $\check{D}_\alpha$ есть прямая сумма некоторого множества прямых слагаемых разложения (D) и каждое прямое слагаемое разложения (D) в силу (1) является прямой суммой слагаемых E_λ разложения (E). Таким образом, имеет место соотношение (10).

Теперь соотношения (9) и (10) показывают, что $E_{(\alpha,\nu)} \oplus \check{D}_\alpha$ является искомой группой из множества $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$, содержащей прямое слагаемое $E_{(\alpha,\nu)}$ и не содержащей $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$.

Итак, доказано, что разложение (E) согласовано с разложением (A).

3°. Докажем, что разложение (E) вполне согласовано с разложением (A).

Согласно определению группы $E_{(\alpha,\,\nu)}$

$$E_{(\alpha,\,\nu)} \subset D_\alpha \qquad (\alpha \in M,\, \nu \in N). \tag{11}$$

Группа $\overline{E}_{(\alpha,\,\nu)}$ есть наименьшая группа, принадлежащая $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и содержащая $E_{(\alpha,\,\nu)}$. Но группа $\overline{D}_\alpha$ в силу (3) также принадлежит $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и согласно условию (11) содержит $E_{(\alpha,\,\nu)}$. Поэтому

$$\overline{E}_{(\alpha,\,\nu)} \subset \overline{D}_\alpha,$$

откуда

$$A_\beta \cap \overline{E}_{(\alpha,\,\nu)} \subset A_\beta \cap \overline{D}_\alpha. \tag{12}$$

Пусть $E_{(\alpha,\,\nu)} = E_\lambda$ – произвольное прямое слагаемое разложения (E). Обозначим через $C_{\lambda,\,\beta}$ компоненту группы $A_\beta \cap \overline{E}_{(\alpha,\,\nu)}$, $\beta \in N$, в прямом слагаемом $E_{(\alpha,\,\nu)}$ разложения (E). Символом $E_{(\alpha,\,\beta)}$ мы прежде обозначили компоненту группы $A_\beta \cap \overline{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D). Принимая во внимание, что разложение (E) является продолжением разложения (D), на основании соотношений (11), (12) заключаем, что

$$C_{\lambda,\,\beta} \subset E_{(\alpha,\,\beta)} \qquad (\lambda \in L,\, \beta \in N). \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$E_{(\alpha,\,\nu)} \cap E_{(\alpha,\,\beta)} = \{0\} \qquad (\beta \neq \nu,\, \beta \in N). \tag{14}$$

Действительно, если $(\alpha,\, \beta) \notin L$, то согласно определению множества L имеем $E_{(\alpha,\,\beta)} = \{0\}$. Если же $(\alpha,\, \beta) \in L$ и $\beta \neq \nu$, то соотношение (14) также имеет место, поскольку $E_{(\alpha,\,\nu)}$ и $E_{(\alpha,\,\beta)}$ в этом случае будут различными прямыми слагаемыми разложения (E). Принимая во внимание, что $C_{\lambda,\,\beta} \subset E_{(\alpha,\,\nu)}$, мы на основании (13), (14) заключаем, что

$$C_{\lambda,\,\beta} = \{0\} \qquad (\lambda \in L,\, \beta \in N,\, \beta \neq \nu). \tag{15}$$

Соотношение (15) показывает, что компонента группы $A_\beta \cap \overline{E}_{(\alpha,\,\nu)}$ в прямом слагаемом $E_{(\alpha,\,\nu)}$ разложения (E), $(\alpha,\, \nu) \in L$, является нулевой группой для всякого $\beta \in N$, отличного от ν. Этим доказано, что разложение (E) вполне согласовано с разложением (A).

5.11. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Введем следующие обозначения:

C_λ – *компонента группы* E_λ *в прямом слагаемом* $A_{\rho(\lambda)}$ *разложения* (A);
$\overline{E}_\lambda$ – *наименьшая группа из множества* $\Delta(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$, *содержащая* E_λ;
$\check{E}_\lambda$ – *наибольшая подгруппа группы* $\overline{E}_\lambda$, *принадлежащая множеству* $\Delta(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$ *и не содержащая* E_λ;
$H_P = \bigoplus\limits_{\lambda\in P} E_\lambda$.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\overline{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad (\lambda\in L); \tag{a}$$

$$H = \bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu\cap H) \qquad (H\in\Delta(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})); \tag{b}$$

$$H_P = \bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu\cap H_P) \qquad (P \text{ замкнуто в } L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})); \tag{c}$$

$$\overline{E}_\lambda = \bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu\cap \overline{E}_\lambda) \qquad (\lambda\in L); \tag{d}$$

$$\check{E}_\lambda = \bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu\cap \check{E}_\lambda) \qquad (\lambda\in L); \tag{e}$$

$$\overline{E}_\lambda = [A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda,\ \check{E}_\lambda] \qquad (\lambda\in L); \tag{f}$$

$$C_\lambda = A_{\rho(\lambda)}\cap\Big[E_\lambda,\ \bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}A_\nu\Big] \qquad (\lambda\in L); \tag{g}$$

$$C_\lambda = A_{\rho(\lambda)}\cap\Big(E_\lambda\oplus\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\check{E}_\lambda)\Big) \qquad (\lambda\in L); \tag{h}$$

$$A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda = C_\lambda\oplus(A_{\rho(\lambda)}\cap\check{E}_\lambda) \qquad (\lambda\in L); \tag{i}$$

$$C_\lambda\oplus\check{E}_\lambda = E_\lambda\oplus\check{E}_\lambda \qquad (\lambda\in L); \tag{j}$$

$$[A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda,\ \check{E}_\lambda] = C_\lambda\oplus\check{E}_\lambda \qquad (\lambda\in L). \tag{k}$$

Доказательство. Согласно условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Поэтому имеют место соотношения (a) – (e). Действительно, соотношения (a), (b) имеют место соответственно в силу 1.6 и 3.3. Соотношение (c) следует из (b) в силу 2.5. Равенства (d) и (e) суть частные случаи соотношения (b), поскольку $\overline{E}_\lambda, \check{E}_\lambda\in\Delta(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$.

Согласно (d) имеем

$$\overline{E}_\lambda = (A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda)\oplus\Big(\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\overline{E}_\lambda)\Big). \tag{1}$$

Кроме того, в силу 5.9, поскольку разложение (E) согласовано с (A),

$$A_\nu\cap\overline{E}_\lambda = A_\nu\cap\check{E}_\lambda \qquad (\nu\neq\rho(\lambda),\ \nu\in N), \tag{2}$$

откуда
$$\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\overline{E}_\lambda)\subset\check{E}_\lambda. \tag{3}$$
Теперь, поскольку $\check{E}_\lambda\subset\overline{E}_\lambda$, из (1) и (3) следует соотношение (f).

Так как C_λ – компонента группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}$ разложения (A), то имеет место равенство (g). Принимая во внимание, что $E_\lambda\subset\overline{E}_\lambda$ и $A_\nu\cap\overline{E}_\lambda\subset A_\nu$, $\nu\in N$, мы на основании разложений (A) и (d) заключаем, что компонента группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda$ разложения (d) равна C_λ, т.е.
$$C_\lambda=(A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda)\cap\Big(E_\lambda\oplus\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\overline{E}_\lambda)\Big),$$
откуда, поскольку $E_\lambda\subset\overline{E}_\lambda$,
$$C_\lambda=A_{\rho(\lambda)}\cap\Big(E_\lambda\oplus\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\overline{E}_\lambda)\Big),$$
что в соединении с (2) дает соотношение (h).

Из (a) и (e) следует равенство
$$\overline{E}_\lambda=E_\lambda\oplus\Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu\cap\check{E}_\lambda)\Big),$$
или
$$\overline{E}_\lambda=(A_{\rho(\lambda)}\cap\check{E}_\lambda)\oplus E_\lambda\oplus\Big(\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\check{E}_\lambda)\Big),$$
откуда в силу 3.10 получим
$$A_{\rho(\lambda)}\cap\overline{E}_\lambda=(A_{\rho(\lambda)}\cap\check{E}_\lambda)\oplus\Big(A_{\rho(\lambda)}\cap\big(E_\lambda\oplus\bigoplus_{\nu\neq\rho(\lambda)}(A_\nu\cap\check{E}_\lambda)\big)\Big). \tag{4}$$
Теперь из (h) и (4) следует соотношение (i).

Далее, на основании (f) и (i) заключаем, что имеет место соотношение (j). Наконец, сопоставляя соотношения (a), (f), (j), получим равенство (k).

5.12. *Пусть* (D), (A) *и* (E) *– прямые разложения группы* G, *о которых идет речь в теореме* 5.10. *Если подмножество* $S(A_\nu,\mathrm{D},\Omega_\mathrm{A})$ *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{D},\Omega_\mathrm{A})$ *удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также подмножество* $S(A_\nu,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$ *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$. *Кроме того, если частично упорядоченное множество* $L(\mathrm{D},\Omega_\mathrm{A})$ *удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также частично упорядоченное множество* $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$.

Доказательство. 1°. Пусть $(\alpha,\,i)$ и $(\alpha,\,k)$ – два различных элемента из L, $i\neq k$. Докажем, что $(\alpha,\,i)$ и $(\alpha,\,k)$, рассматриваемые как элементы $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$, несравнимы.

Так как $E_{(\alpha,\,i)}$ и $E_{(\alpha,\,k)}$ – два различных слагаемых разложения (E), то
$$E_{(\alpha,\,i)}\cap E_{(\alpha,\,k)}=\{0\}. \tag{1}$$

Кроме того, $\check{E}_{(\alpha,\,k)} \subset \check{D}_\alpha$, поскольку в п. 2° доказательства теоремы 5.10 было показано, что $E_{(\alpha,\,k)} \oplus \check{D}_\alpha \in \Delta(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$; следовательно,

$$E_{(\alpha,\,i)} \cap \check{E}_{(\alpha,\,k)} = \{0\}. \tag{2}$$

Так как в силу 5.11 $\overline{E}_{(\alpha,\,k)} = E_{(\alpha,\,k)} \oplus \check{E}_{(\alpha,\,k)}$, то на основании (1), (2) заключаем, что

$$E_{(\alpha,\,i)} \cap \overline{E}_{(\alpha,\,k)} = \{0\} \qquad (i \neq k). \tag{3}$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$E_{(\alpha,\,k)} \cap \overline{E}_{(\alpha,\,i)} = \{0\} \qquad (i \neq k). \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) показывают, что элементы $(\alpha,\,i)$ и $(\alpha,\,k)$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ несравнимы.

2°. Докажем, что из соотношения

$$(\alpha,\,i) < (\beta,\,k) \qquad \big((\alpha,\,i), (\beta,\,k) \in L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})\big) \tag{5}$$

следует соотношение

$$\alpha < \beta \qquad (\alpha, \beta \in L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})). \tag{6}$$

В силу (5)

$$E_{(\alpha,\,i)} \subset \overline{E}_{(\beta,\,k)}. \tag{7}$$

Из (7), поскольку $\overline{E}_{(\beta,\,k)} \subset \overline{D}_\beta$, следует соотношение

$$E_{(\alpha,\,i)} \subset \overline{D}_\beta. \tag{8}$$

Так как $E_{(\alpha,\,i)} \subset D_\alpha$, то на основании (8) заключаем, что

$$D_\alpha \subset \overline{D}_\beta,$$

откуда

$$\alpha \leqslant \beta \qquad (\alpha, \beta \in L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})). \tag{9}$$

Если $\alpha = \beta$, то по доказанному в пункте 1° элементы $(\alpha,\,i)$ и $(\beta,\,k)$ будут несравнимы. Но мы предполагаем, что имеет место (5). Поэтому

$$\alpha \neq \beta. \tag{10}$$

Теперь, сопоставляя (9) и (10), получим (6).

3°. Опираясь на доказанное в пункте 2°, легко видеть, что имеет место следующее утверждение:

(*a*) *если β – минимальный элемент подмножества $F \subset L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ и $(\beta,\,k)$ – элемент множества L, то $(\beta,\,k)$ есть минимальный элемент подмножества*

$$F^* = \{(\alpha,\,\nu) \in L \mid \alpha \in F\}$$

частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

Таким образом, если подмножество F удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также подмножество F^*.

4°. На основании утверждения (a) заключаем, что если частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

5°. Докажем, что имеет место следующее утверждение:

(b) *из соотношения*

$$(\alpha,\, i) \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}) \tag{11}$$

следует соотношение

$$\alpha \in S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{12}$$

Действительно, если соотношение (12) не имеет места, то

$$A_\nu \cap \overline{D}_\alpha \subset \check{D}_\alpha$$

и, значит,

$$A_\nu \cap \overline{E}_{(\alpha,\, i)} \cap \overline{D}_\alpha \subset \overline{E}_{(\alpha,\, i)} \cap \check{D}_\alpha.$$

Отсюда, поскольку

$$\overline{E}_{(\alpha,\, i)} \subset \overline{D}_\alpha \quad \text{и} \quad \overline{E}_{(\alpha,\, i)} \cap \check{D}_\alpha \subset \check{E}_{(\alpha,\, i)},$$

получим

$$A_\nu \cap \overline{E}_{(\alpha,\, i)} \subset \check{E}_{(\alpha,\, i)},$$

что невозможно, если имеет место (11).

6°. Теперь на основании утверждений (a) и (b) заключаем, что если подмножество $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

Таким образом, предложение 5.12 доказано.

5.13. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– разложение группы G в прямую сумму неразложимых подгрупп и

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с (A). *Тогда в разложении* (E) *каждое прямое слагаемое E_λ может быть замещено прямым слагаемым $A_{\rho(\lambda)}$ из разложения* (A) *и, следовательно, разложения* (E) *и* (A) *центрально изоморфны*[10].

[10] См. определение в § 8.

Доказательство. Обозначим через C_λ, где $\lambda \in L$, компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}$ разложения (A). В силу 5.11

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L). \tag{1}$$

Каждое слагаемое E_λ из разложения (E) является ненулевой группой, поскольку разложение (E) согласовано с разложением (A). Отсюда в силу (1) следует, что C_λ – ненулевая подгруппа группы G. На основании разложений (1) и (E) заключаем, что C_λ является прямым слагаемым группы G. Отсюда, поскольку C_λ – подгруппа группы $A_{\rho(\lambda)}$, следует, что C_λ является ненулевым прямым слагаемым группы $A_{\rho(\lambda)}$. Но по условию каждое слагаемое из разложения (A) есть неразложимая группа. Следовательно,

$$C_\lambda = A_{\rho(\lambda)} \qquad (\lambda \in L). \tag{2}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что в разложении (E) каждое слагаемое E_λ может быть замещено прямым слагаемым $A_{\rho(\lambda)}$ из разложения (A), т.е.

$$G = A_{\rho(\lambda)} \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda' \neq \lambda} E_{\lambda'} \Big) = E_\lambda \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda' \neq \lambda} E_{\lambda'} \Big) \qquad (\lambda \in L),$$

следовательно, для всякого $\lambda \in L$ группы E_λ и $A_{\rho(\lambda)}$ центрально изоморфны и поэтому разложения (E) и (A) центрально изоморфны.

5.14. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– разложение группы G в прямую сумму неразложимых подгрупп и

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением (A). *Тогда разложение* (D) *можно продолжить до разложения, центрально изоморфного разложению* (A).

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 5.10 и предложения 5.13.

Частным случаем теоремы 5.14 является следующая теорема:

5.15. Теорема. *Если даны два разложения группы в прямую сумму неразложимых подгрупп и одно из этих разложений согласовано с другим, то эти разложения центрально изоморфны.*

§ 6

6.1. Теорема. *Пусть L – частично упорядоченное множество,*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, F – подмножество L, удовлетворяющее условию минимальности, и $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F}$ – множество подгрупп группы G, удовлетворяющих условию

$$C_\lambda \oplus \Big(\bigoplus_{i\in U_\lambda} E_i\Big) = \bigoplus_{i\in V_\lambda} E_i \qquad (\lambda\in F), \tag{S}$$

где V_λ – комбинаторное замыкание элемента λ в частично упорядоченном множестве L и $U_\lambda = V_\lambda\setminus\{\lambda\}$. Тогда для любого замкнутого в L подмножества P имеет место прямое разложение

$$\bigoplus_{\lambda\in P} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\lambda\in P\setminus F} E_\lambda\Big). \tag{b_P}$$

Доказательство. Пусть P – замкнутое подмножество L. Обозначим через Ψ совокупность множеств Γ, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$\Gamma \text{ – замкнутое подмножество } L, \text{ содержащееся в } P; \tag{a_Γ}$$

$$\bigoplus_{\lambda\in \Gamma} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in \Gamma\cap F} C_\lambda\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\lambda\in \Gamma\setminus F} E_\lambda\Big). \tag{b_Γ}$$

Нетрудно видеть, что объединение возрастающей последовательности множеств, принадлежащих Ψ, также является элементом из Ψ. Поэтому на основании теоремы Куратовского о насыщенных множествах заключаем, что существует в Ψ максимальный элемент T, т.е. такой элемент, что если $\Gamma\in\Psi$ и $T\subset\Gamma$, то $\Gamma = T$. Таким образом, существует множество T, удовлетворяющее следующим условиям:

$$T \text{ – замкнутое подмножество } L, \text{ содержащееся в } P; \tag{a_T}$$

$$\bigoplus_{\lambda\in T} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\cap F} C_\lambda\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus F} E_\lambda\Big); \tag{b_T}$$

$$\text{если } \Gamma\in\Psi \text{ и } T\subset\Gamma, \text{ то } \Gamma = T. \tag{c_T}$$

Докажем, что $T = P$. Этим теорема будет доказана.

Докажем сначала, что

$$P\cap F\subset T. \tag{1}$$

Допустим, что соотношение (1) не имеет места. Тогда множество $(P\cap F)\setminus T$ непусто. По условию F удовлетворяет условию минимальности. Поэтому среди элементов множества $(P\cap F)\setminus T$ существует по крайней мере один минимальный элемент γ. Положим

$$\Delta = T\cup U_\gamma. \tag{2}$$

По условию P замкнуто в L. Следовательно, в силу 2.8 $U_\gamma\subset P$. Отсюда, если принять во внимание определения γ и U_γ, следует, что

$$U_\gamma\cap F\subset T. \tag{3}$$

На основании (2) и (3) заключаем, что

$$\Delta \cap F = T \cap F. \tag{4}$$

Докажем, что $\Delta \in \Psi$. Множество Δ замкнуто в L, так как согласно (2) оно является объединением двух замкнутых множеств. Кроме того, имеем $\Delta \subset P$, так как $U_\gamma \subset P$ и в силу (a_T) $T \subset P$. Докажем, что Δ удовлетворяет условию (b_Δ). Используя соотношение (b_T), получим

$$\bigoplus_{\lambda\in\Delta} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T} E_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Delta\setminus T} E_\lambda\Big) =$$
$$= \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus F} E_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Delta\setminus T} E_\lambda\Big) = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Delta\setminus F} E_\lambda\Big),$$

откуда в силу (4) следует равенство

$$\bigoplus_{\lambda\in\Delta} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Delta\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Delta\setminus F} E_\lambda\Big),$$

т.е. множество Δ удовлетворяет условию (b_Δ). Тем самым доказано, что $\Delta \in \Psi$. Кроме того, в силу (2) $T \subset \Delta$. Отсюда в силу (c_T) следует, что $\Delta = T$. Это равенство и равенство (2) показывают, что

$$U_\gamma \subset T. \tag{5}$$

Положим

$$Q = T \cup \{\gamma\} \tag{6}$$

и докажем, что $Q \in \Psi$. Поскольку $V_\gamma = U_\gamma \cup \{\gamma\}$, из (5) и (6) получаем

$$Q = T \cup V_\gamma.$$

Следовательно, Q является замкнутым подмножеством L как объединение двух замкнутых множеств. Кроме того, $Q \subset P$, так как $T \subset P$ и $\gamma \in P$. Таким образом, Q удовлетворяет условию (a_Q). Докажем, что Q удовлетворяет условию (b_Q). Так как $\gamma \in (P \cap F) \setminus T$, то на основании (6) заключаем, что

$$Q \cap F = (T \cap F) \cup \{\gamma\}, \tag{7}$$

$$Q \setminus F = T \setminus F. \tag{8}$$

Используя условие (S) и соотношение (5) и замечая, что $\gamma \notin T$, имеем

$$\bigoplus_{\lambda\in Q} E_\lambda = E_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T} E_\lambda\Big) = E_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in U_\gamma} E_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus U_\gamma} E_\lambda\Big) =$$
$$= C_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in U_\gamma} E_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus U_\gamma} E_\lambda\Big) = C_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T} E_\lambda\Big). \tag{9}$$

Далее, на основании (b_T), (7), (8) заключаем, что

$$C_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T} E_\lambda\Big) = C_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus F} E_\lambda\Big) =$$
$$= \Big(\bigoplus_{\lambda\in Q\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus F} E_\lambda\Big) = \Big(\bigoplus_{\lambda\in Q\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in Q\setminus F} E_\lambda\Big),$$

откуда, принимая во внимание (9), получим

$$\bigoplus_{\lambda\in Q} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in Q\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in Q\setminus F} E_\lambda\Big),$$

т.е. Q удовлетворяет условию (b_Q). Таким образом, $Q\in\Psi$ и $T\subset Q$. Отсюда в силу (c_T) следует, что $T=Q$. Но это невозможно, так как $\gamma\in Q$ и $\gamma\notin T$. Этим доказано, что имеет место соотношение (1).

В силу (1) $P\cap F\subset T\cap F$, откуда, поскольку $T\subset P$,

$$P\cap F = T\cap F. \tag{10}$$

Используя (b_T), получим

$$\bigoplus_{\lambda\in P} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T} E_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\setminus T} E_\lambda\Big) =$$
$$= \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\setminus F} E_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\setminus T} E_\lambda\Big) = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\setminus F} E_\lambda\Big),$$

откуда в силу (10)

$$\bigoplus_{\lambda\in P} E_\lambda = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\setminus F} E_\lambda\Big),$$

т.е. P удовлетворяет соотношению (b_P). Таким образом, $P\in\Psi$ и $T\subset P$ и, значит, в силу (c_T) $T=P$, т.е. соотношение (b_T) превращается в искомое прямое разложение (b_P). Теорема доказана.

6.2. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Пусть, далее, F есть подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$, удовлетворяющее условию минимальности, и $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F}$ – множество подгрупп группы G, удовлетворяющих следующим условиям:

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad \big(\lambda\in F,\ \check{E}_\lambda = U(E_\lambda,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})\big), \tag{c}$$

$$C_\lambda \subset A_\nu \qquad (\lambda\in F,\ \nu \text{ – \textit{фиксированный элемент из} } N). \tag{d}$$

Тогда для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$ имеет место прямое разложение

$$A_\nu \cap H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big) \oplus (A_\nu \cap H_{P\setminus F}), \tag{e}$$

где $H_P = \bigoplus_{\lambda\in P} E_\lambda$ *и* $H_{P\setminus F} = \bigoplus_{\lambda\in P\setminus F} E_\lambda$.

Доказательство. Пусть P – замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$. Обозначим через V_λ комбинаторное замыкание элемента λ в $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$ и положим $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. Тогда в силу 2.9

$$\overline{E}_\lambda = \bigoplus_{\alpha\in V_\lambda} E_\alpha, \qquad \check{E}_\lambda = \bigoplus_{\alpha\in U_\lambda} E_\alpha.$$

На основании этих равенств условие (c) можно записать в виде

$$C_\lambda \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in U_\lambda} E_\alpha\Big) = \bigoplus_{\alpha\in V_\lambda} E_\alpha \qquad (\lambda\in F). \tag{s}$$

Положим в разложении (E) $L = L(\mathrm{E},\Omega_A)$. По условию множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F}$ удовлетворяет условию (c) и, значит, также условию (s). Кроме того, F удовлетворяет условию минимальности. Поэтому на основании теоремы 6.1 заключаем, что

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big) \oplus H_{P\setminus F}. \tag{1}$$

Далее, в силу условия (d) группа $\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda$ является подгруппой группы A_ν. Поэтому из (1) в силу 3.10 следует прямое разложение (e).

6.3. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu\in N} A_\nu, \tag{A}$$

и F – подмножество $L(\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$ такое, что для всякого $\nu\in N$ множество F_ν, $F_\nu = F\cap S(A_\nu,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$, удовлетворяет условию минимальности. Пусть, далее, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F}$ – множество подгрупп группы G, удовлетворяющих условиям[11]

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad \big(\lambda\in F,\ \check{E}_\lambda = U(E_\lambda,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})\big), \tag{a}$$

$$C_\lambda \subset A_{\rho(\lambda)} \qquad (\lambda\in F). \tag{b}$$

[11] Символом ρ обозначается отображение множества L на N, определенное в предложении 5.8.

Тогда для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\Omega_{\mathrm{A}})$ имеет место прямое разложение

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu})\Big), \tag{c}$$

в частности,

$$G = \Big(\bigoplus_{\lambda\in F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu})\Big), \tag{C}$$

и разложение (E) *вполне согласовано с разложением* (C).

Доказательство. 1°. Пусть P – замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\Omega_{\mathrm{A}})$. По условию разложение (E) согласовано с разложением (A), F_ν удовлетворяет условию минимальности и множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F_\nu}$ подгрупп C_λ удовлетворяет условиям (a), (b). Поэтому в силу 6.2 имеет место равенство

$$A_\nu \cap H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F_\nu} C_\lambda\Big) \oplus (A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu}) \qquad (\nu\in N). \tag{1}$$

Так как разложение (E) согласовано с (A), то в силу 3.6

$$H_P = \bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_P). \tag{2}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\bigcup_{\nu\in N}(P\cap F_\nu) = P\cap F. \tag{3}$$

Действительно, в силу 5.5 имеем $L = \bigcup\limits_{\nu\in N} S(A_\nu,\mathrm{E},\Omega_{\mathrm{A}})$. Поэтому

$$\bigcup_{\nu\in N}(P\cap F_\nu) = \bigcup_{\nu\in N}\big(P\cap F\cap S(A_\nu,\mathrm{E},\Omega_{\mathrm{A}})\big) = P\cap F\cap L = P\cap F.$$

Теперь, заменяя прямые слагаемые в (2) на основании равенства (1) и принимая во внимание (3), получим

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu})\Big). \tag{c}$$

Полагая в (c) $P = L$, получим прямое разложение

$$G = \Big(\bigoplus_{\lambda\in F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu})\Big). \tag{C}$$

2°. Докажем, что разложение (E) согласовано с разложением (C).

Принимая во внимание соотношение $H_{P\setminus F_\nu} \subset H_{L\setminus F_\nu}$, на основании (c) и (C) заключаем, что

$$C_i \cap H_P \subset C_i \cap \Big(\bigoplus_{\alpha\in F\setminus\{i\}} C_\alpha \oplus \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu})\Big) = \{0\} \qquad (i \in F \setminus P),$$

откуда

$$C_i \cap H_P = \{0\} \qquad (i \in F \setminus P). \tag{4}$$

Кроме того, в силу (c)

$$C_i \cap H_P = C_i \qquad (i \in F \cap P). \tag{5}$$

Далее, поскольку $(L \setminus F_\nu) \cap P = P \setminus F_\nu$, имеет место равенство

$$(A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu}) \cap H_P = A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu} \qquad (\nu \in N). \tag{6}$$

Теперь на основании (4), (5), (6) равенство (c) можно записать в виде

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in F} (C_\lambda \cap H_P)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu} \cap H_P)\Big). \tag{7}$$

Так как прямое разложение (7) имеет место для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, то в силу 3.7 разложение (E) согласовано с разложением (C).

3°. Докажем, что подмножество P множества L тогда и только тогда замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$, когда оно замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

Выше мы показали, что для всякого подмножества P, замкнутого в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, имеет место прямое разложение (7), и поэтому в силу 3.6 оно будет замкнутым также в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$.

Обратно, допустим, что подмножество P замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$. Покажем, что имеет место прямое разложение

$$H_P = \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_P); \tag{8}$$

этим в силу 3.6 будет доказано, что подмножество P замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Так как разложение (E) согласовано с разложением (C) и подмножество P замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$, то в силу 3.6 имеет место прямое разложение

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in F} (C_\lambda \cap H_P)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu} \cap H_P)\Big).$$

Так как согласно условию $C_\lambda \subset A_{\rho(\lambda)}$ при $\lambda \in F$, то нетрудно видеть, что из этого прямого разложения получаем соотношение

$$H_P \subset \bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_P),$$

из которого следует (8), так как, очевидно, имеет место и обратное включение.

4°. Обозначим через V_λ комбинаторное замыкание элемента λ в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и положим $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. Тогда в силу 2.9

$$\overline{E}_\lambda = H_{V_\lambda} = \bigoplus_{i \in V_\lambda} E_i, \tag{9}$$

$$\check{E}_\lambda = H_{U_\lambda} = \bigoplus_{i \in U_\lambda} E_i. \tag{10}$$

Но на основании доказанного в пункте 3° мы можем утверждать, что V_λ является комбинаторным замыканием элемента λ также в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$. Поэтому группа $\overline{E}_\lambda$, $\overline{E}_\lambda = V(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, является также наименьшей группой из множества $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$, содержащей E_λ, т.е.

$$\overline{E}_\lambda = V(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C}) \qquad (\lambda \in L), \tag{11}$$

и группа $\check{E}_\lambda$, $\check{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, является наибольшей подгруппой группы $\overline{E}_\lambda$, принадлежащей множеству $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C})$ и не содержащей E_λ, т.е.

$$\check{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{C}) \qquad (\lambda \in L). \tag{12}$$

5°. Докажем, что имеют место следующие соотношения:

$$(H_{L\setminus F_\nu} \cap A_\nu) \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \rho(\lambda),\, \nu \in N,\, \lambda \in L), \tag{13}$$

$$(H_{L\setminus F_\nu} \cap A_\nu) \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \in N,\, \lambda \in F_\nu), \tag{14}$$

$$C_i \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (i \neq \lambda,\, i \in F,\, \lambda \in L). \tag{15}$$

Согласно условию разложение (E) вполне согласовано с (A). Поэтому согласно 5.9 имеет место соотношение

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda = A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \rho(\lambda),\, \nu \in N,\, \lambda \in L),$$

из которого следует соотношение (13).

Принимая во внимание (9) и (10), легко видеть, что

$$H_{L\setminus F_\nu} \cap \overline{E}_\lambda = H_{L\setminus F_\nu} \cap H_{V_\lambda} = H_{V_\lambda \setminus F_\nu}, \qquad H_{L\setminus F_\nu} \cap \check{E}_\lambda = H_{U_\lambda \setminus F_\nu}.$$

Кроме того, очевидно, $V_\lambda \setminus F_\nu = U_\lambda \setminus F_\nu$ при $\lambda \in F_\nu$. Поэтому имеет место равенство

$$H_{L\setminus F_\nu} \cap \overline{E}_\lambda = H_{L\setminus F_\nu} \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \in N,\, \lambda \in F_\nu),$$

из которого следует соотношение (14).

Наконец, полагая в (4) и (5) соответственно $P = V_\lambda$ и $P = U_\lambda$, получим соотношения

$$C_i \cap \overline{E}_\lambda = \{0\} \qquad (i \in F \setminus V_\lambda),$$

$$C_i \cap \check{E}_\lambda = C_i \qquad (i \in F \cap U_\lambda),$$

из которых следует соотношение (15).

6°. Докажем, что разложение (E) вполне согласовано с разложением (C). Выше было показано, что разложение (E) согласовано с разложением (C). Следовательно, согласно определению 5.7 достаточно доказать, что разложение (E) обладает свойством (*b*) предложения 5.6. Таким образом, поскольку имеют место соотношения (11) и (12), достаточно показать, что для всякого фиксированного $\lambda \in L$ пересечение любого прямого слагаемого разложения (C), за исключением, быть может, одного, с группой $\overline{E}_\lambda$ содержится в группе $\check{E}_\lambda$. Возможны два случая.

1-й случай: $\lambda \in F$. В этом случае найдется индекс $\nu \in N$ такой, что $\lambda \in F_\nu$, так как $F = \bigcup_{\nu \in N} F_\nu$. Поэтому на основании соотношений (13), (14), (15) заключаем, что пересечение любого прямого слагаемого разложения (C), за исключением, быть может, слагаемого C_λ, с группой $\overline{E}_\lambda$ содержится в группе $\check{E}_\lambda$.

2-й случай: $\lambda \notin F$. В этом случае на основании (13) и (15) заключаем, что пересечение любого прямого слагаемого разложения (C), за исключением, быть может, прямого слагаемого $A_{\rho(\lambda)} \cap H_{L \setminus F_{\rho(\lambda)}}$, с группой $\overline{E}_\lambda$ содержится в $\check{E}_\lambda$.

Таким образом, разложение (E) вполне согласовано с разложением (C). Теорема доказана.

6.4. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

и F – подмножество $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ такое, что для всякого $\nu \in N$ множество F_ν, $F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, удовлетворяет условию минимальности. Обозначим через C_λ, $\lambda \in L$, компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}$ разложения (A). *Тогда для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ имеет место прямое разложение*

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu})\Big)$$

и, в частности,

$$G = \Big(\bigoplus_{\lambda \in F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu})\Big).$$

Доказательство. В силу 5.11 группа C_λ удовлетворяет условию

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F). \tag{c}$$

Кроме того, поскольку C_λ – компонента группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}$ разложения (A), C_λ удовлетворяет условию

$$C_\lambda \subset A_{\rho(\lambda)} \qquad (\lambda \in F). \tag{d}$$

Поэтому предложение 6.4 является следствием предложения 6.3.

6.5. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеют место соотношения

$$A_\nu \cap H_{L \setminus S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A})} = \{0\} \qquad (\nu \in N). \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что в N существует индекс ν, для которого соотношение (1) не имеет места. Тогда существует отличный от нуля элемент x группы G такой, что

$$x \in A_\nu, \tag{2}$$

$$x \in H_{L \setminus S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A})}. \tag{3}$$

Обозначим через Γ множество тех индексов $\lambda \in L$, для которых элемент x имеет ненулевую компоненту в слагаемом E_λ разложения (E). В силу (3) имеем

$$\Gamma \subset L \setminus S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{4}$$

Так как x – ненулевой элемент, то Γ является конечным непустым множеством. Обозначим через γ какой-нибудь максимальный элемент множества Γ, которое мы при этом рассматриваем как подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Такой элемент существует, поскольку Γ – конечное непустое множество. В силу (4)

$$\gamma \notin S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{5}$$

Обозначим через V_γ комбинаторное замыкание элемента γ в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и положим $U_\gamma = V_\gamma \setminus \{\gamma\}$. Обозначим, далее, через P множество всех элементов из L, меньших, чем γ, или несравнимых с γ, и положим

$$Q = P \cup \{\gamma\}.$$

Легко видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$\Gamma \subset Q, \tag{6}$$

$$\Gamma \not\subset P, \tag{7}$$

$$U_\gamma \subset P, \tag{8}$$

$$Q = P \cup V_\gamma. \tag{9}$$

Из определения множества Γ в силу (6), (7) следует, что

$$x \in H_Q, \qquad x \notin H_P,$$

откуда в силу (2) получим

$$A_\nu \cap H_Q \neq A_\nu \cap H_P. \tag{10}$$

Из (8) и (9) следуют соответственно соотношения

$$H_{U_\gamma} \subset H_P, \tag{11}$$

$$H_Q = [H_P,\, H_{V_\gamma}]. \tag{12}$$

Множества P и V_γ замкнуты в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, что непосредственно следует из определения этих множеств. В силу (9) множество Q также замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Кроме того, согласно условию прямое разложение (E) согласовано с разложением (A). Поэтому в силу 2.5 подгруппы H_P, H_{V_γ}, H_Q являются допустимыми относительно множества эндоморфизмов Ω_A. Отсюда в силу 3.9 следует равенство

$$A_\nu \cap H_Q = [A_\nu \cap H_P,\, A_\nu \cap H_{V_\gamma}]. \tag{13}$$

Теперь легко показать, что

$$A_\nu \cap H_{V_\gamma} \neq A_\nu \cap H_{U_\gamma}. \tag{14}$$

Действительно, если мы допустим, что

$$A_\nu \cap H_{V_\gamma} = A_\nu \cap H_{U_\gamma},$$

то в силу (11) получим

$$A_\nu \cap H_{V_\gamma} \subset A_\nu \cap H_P,$$

откуда в силу (13)

$$A_\nu \cap H_Q = A_\nu \cap H_P,$$

что невозможно в силу (10). Таким образом, имеет место соотношение (14).

Принимая во внимание, что в силу 2.9 $H_{V_\gamma} = \overline{E}_\gamma$ и $H_{U_\gamma} = \check{E}_\gamma$, мы можем записать соотношение (14) в виде

$$A_\nu \cap \overline{E}_\gamma \neq A_\nu \cap \check{E}_\gamma,$$

откуда получим

$$A_\nu \cap \overline{E}_\gamma \not\subset \check{E}_\gamma. \tag{15}$$

Из (15) согласно определению 5.4 следует, что

$$\gamma \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{16}$$

Соотношение (16) противоречит соотношению (5). Этим доказано, что соотношение (1) имеет место для всякого $\nu \in N$.

Предложение 6.5 доказано.

6.6. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Обозначим через $C_\lambda,\ \lambda \in L$, *компоненту группы* E_λ *в прямом слагаемом* $A_{\rho(\lambda)}$ *разложения* (A). *Если подмножество* $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ *удовлетворяет условию минимальности, то имеет место прямое разложение*

$$A_\nu = \bigoplus_{\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})} C_\lambda. \tag{C_ν}$$

Доказательство. Так как группа C_λ является компонентой группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}$ разложения (A), то она удовлетворяет условию

$$C_\lambda \subset A_\nu \qquad (\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})) \tag{d}$$

и в силу 5.11 также условию

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad \big(\lambda \in L,\ \check{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})\big). \tag{c}$$

Кроме того, по условию $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности. Поэтому, полагая $F = S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, мы на основании 6.2 можем утверждать, что имеет место прямое разложение

$$A_\nu \cap H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda \in P \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})} C_\lambda\Big) \oplus (A_\nu \cap H_{P \setminus S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})}). \tag{e}$$

Полагая в прямом разложении (e) $P = L$ и замечая, что $A_\nu \cap H_L = A_\nu \cap G = A_\nu$, получим

$$A_\nu = \Big(\bigoplus_{\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})} C_\lambda\Big) \oplus (A_\nu \cap H_{L \setminus S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})}). \tag{1}$$

Кроме того, в силу 6.5

$$A_\nu \cap H_{L \setminus S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})} = \{0\}, \tag{2}$$

так как по условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Теперь, сопоставляя (1) и (2), мы видим, что имеет место прямое разложение (C_ν).

§ 7

Пусть $G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda$ и $\Gamma \subset L$. Подгруппу $\bigoplus_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda$ группы G будем для краткости всюду ниже обозначать через H_Γ.

7.1. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, *вполне согласованное с разложением*

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

и F – конечное подмножество множества L. Тогда для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ имеет место прямое разложение

$$H_P = H_{P\cap F} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu})\Big), \tag{a_P}$$

где $F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

Доказательство. Пусть заданы конечное множество F, $F \subset L$, и замкнутое подмножество P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Докажем, что имеет место прямое разложение (a_P). Доказательство будем вести индукцией по мощности множества F. Теорема, очевидно, верна, когда F – пустое множество. Предположим, что она верна для каждого множества F', имеющего меньшую, чем F, мощность, и докажем, что тогда она верна для заданного множества F.

Возможны два случая: $F \not\subset P$, $F \subset P$.

В первом случае существует элемент $\gamma \in F \setminus P$. Положим $F' = F \setminus \{\gamma\}$. Так как мощность множества F' меньше мощности множества F, то по индуктивному предположению

$$H_P = H_{P\cap F'} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N}(A_\nu \cap H_{P\setminus F'_\nu})\Big), \quad \text{где } F'_\nu = F' \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{$*$}$$

Легко видеть, что из соотношений $\gamma \in F \setminus P$, $F' = F \setminus \{\gamma\}$ следуют равенства $P \cap F' = P \cap F$, $P \setminus F'_\nu = P \setminus F_\nu$ и, таким образом, из равенства (*) следует равенство (a_P). Итак, равенство (a_P) имеет место, если $F \not\subset P$. Поэтому всюду ниже мы будем предполагать, что имеет место второй случай, т.е. имеет место соотношение

$$F \subset P. \tag{1}$$

Будем рассматривать F как подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_A)$. Обозначим через α какой-либо максимальный элемент множества F. Поскольку F – непустое множество, то такой элемент существует. Положим $F^* = F \setminus \{\alpha\}$. Тогда

$$F = F^* \cup \{\alpha\}, \qquad \alpha \notin F^*. \tag{2}$$

Обозначим через Q наименьшее замкнутое подмножество множества $L(\mathrm{E}, \Omega_A)$, содержащее F^*. Так как P является замкнутым множеством и содержит F^*, то

$$Q \subset P. \tag{3}$$

Принимая во внимание, что α – максимальный элемент множества F и $\alpha \notin F^*$, нетрудно видеть, что

$$\alpha \notin Q. \tag{4}$$

Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в $L(\mathrm{E}, \Omega_A)$ и положим

$$U_\alpha = V_\alpha \setminus \{\alpha\}. \tag{5}$$

Легко видеть, что U_α – замкнутое множество, содержащееся в P. Положим

$$\Gamma = Q \cup U_\alpha, \tag{6}$$

тогда

$$\Gamma \subset P, \tag{7}$$

так как $U_\alpha \subset P$ и в силу (3) $Q \subset P$. Множество Γ как объединение двух замкнутых множеств является замкнутым. Так как $F^* \subset Q$, из (6) следует соотношение

$$F^* \subset \Gamma. \tag{8}$$

Далее, на основании (4), (5), (6) заключаем, что

$$\alpha \notin \Gamma, \tag{9}$$

откуда в силу (2), (8) следует равенство

$$F^* = \Gamma \cap F. \tag{10}$$

Положим

$$F^*_\nu = F^* \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}), \tag{11}$$

$$F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{12}$$

На основании равенств (10), (11), (12) заключаем, что

$$\Gamma \setminus F^*_\nu = \Gamma \setminus F_\nu \qquad (\nu \in N). \tag{13}$$

В силу (2) множество F^* имеет меньшую мощность, чем F, и, следовательно, по индуктивному предположению имеет место равенство

$$H_\Gamma = H_{\Gamma\cap F^*} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma\setminus F^*_\nu})\Big).$$

Отсюда в силу (8) и (13) следует равенство

$$H_\Gamma = H_{F^*} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma\setminus F_\nu})\Big). \tag{14}$$

Обозначим через C_λ компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\rho(\lambda)}$ разложения (A). По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A) и F – конечное подмножество L. Кроме того, Γ и P – замкнутые подмножества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Поэтому в силу 6.4 имеют место равенства

$$H_\Gamma = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Gamma\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma\setminus F_\nu})\Big), \tag{15}$$

$$H_P = \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap F} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu})\Big). \tag{16}$$

Группа $A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}$ является прямым слагаемым группы G, так как в силу (15) она является прямым слагаемым группы H_Γ, а H_Γ, очевидно, является прямым слагаемым группы G. Кроме того, $A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu} \subset A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}$, так как в силу (7) $\Gamma \subset P$. Поэтому $A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}$ является прямым слагаемым группы $A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}$:

$$A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu} = (A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}) \oplus X_\nu \qquad (\nu \in N). \tag{17}$$

На основании (1), (2) и (10) заключаем, что $P \cap F = \{\alpha\} \cup (\Gamma \cap F)$. Поэтому, принимая во внимание (15) и (17), мы можем записать равенство (16) в виде

$$H_P = C_\alpha \oplus H_\Gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} X_\nu\Big). \tag{18}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$C_\alpha \oplus H_\Gamma = E_\alpha \oplus H_\Gamma. \tag{19}$$

Так как по условию прямое разложение (E) вполне согласовано с разложением (A), то в силу 5.11 $C_\alpha \oplus \check{E}_\alpha = E_\alpha \oplus \check{E}_\alpha$, где $\check{E}_\alpha = \bigoplus\limits_{\lambda \in U_\alpha} E_\lambda$, т.е.

$$C_\alpha \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \in U_\alpha} E_\lambda\Big) = E_\alpha \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \in U_\alpha} E_\lambda\Big). \tag{20}$$

Но в силу (6) и (9) $U_\alpha \subset \Gamma$ и $\alpha \notin \Gamma$. Отсюда и из (20) следует равенство

$$C_\alpha \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda\Big) = E_\alpha \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda\Big),$$

откуда, поскольку $\bigoplus\limits_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda = H_\Gamma$, следует (19).

Сопоставляя (18) и (19), получим

$$H_P = E_\alpha \oplus H_\Gamma \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} X_\nu\Big),$$

откуда в силу (14)

$$H_P = E_\alpha \oplus H_{F^*} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu})\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} X_\nu\Big).$$

Это равенство на основании (17) можно записать в виде

$$H_P = E_\alpha \oplus H_{F^*} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu})\Big). \tag{21}$$

В силу (2) $E_\alpha \oplus H_{F^*} = H_F$. Кроме того, в силу (1) $F = P \cap F$. Поэтому

$$E_\alpha \oplus H_{F^*} = H_{P \cap F}. \tag{22}$$

Сопоставляя (21) и (22), получим

$$H_P = H_{P\cap F} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{P\setminus F_\nu}) \Big).$$

Таким образом, прямое разложение (а$_P$) имеет место также и во втором случае, т.е. в случае, когда имеет место (1). Теорема 7.1 доказана.

7.2. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Пусть, далее, задано прямое слагаемое A_k разложения (A) *и отличный от нуля элемент x группы A_k. Тогда существуют конечное подмножество Γ множества $S(A_k, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ подгрупп группы A_k, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad \big(\lambda\in\Gamma,\ \check{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})\big), \tag{a}$$

$$A_k = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Gamma} C_\lambda \Big) \oplus (A_k \cap H_{L\setminus\Gamma}), \tag{b}$$

$$x \in \bigoplus_{\lambda\in\Gamma} C_\lambda, \tag{c}$$

имеет место прямое разложение (d)

$$G = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Gamma} C_\lambda \Big) \oplus (A_k \cap H_{L\setminus\Gamma}) \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\neq k} A_\nu \Big) \tag{C}$$

и разложение (E) *вполне согласовано с разложением* (C).

Доказательство. По условию x – отличный от нуля элемент группы G. Поэтому существует непустое конечное подмножество F множества L, удовлетворяющее следующему условию:

$$x \in H_F, \quad \text{где } H_F = \bigoplus_{\lambda\in F} E_\lambda. \tag{1}$$

Обозначим через V_λ комбинаторное замыкание элемента λ в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и положим $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому на основании 7.1 заключаем, что имеют место следующие прямые разложения:

$$G = H_F \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\in N} (A_\nu \cap H_{L\setminus F_\nu}) \Big), \tag{2}$$

$$H_{V_\lambda} = H_{V_\lambda \cap F} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{V_\lambda \setminus F_\nu}) \Big) \qquad (\lambda \in F_k), \tag{3}$$

$$H_{U_\lambda} = H_{U_\lambda \cap F} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{U_\lambda \setminus F_\nu}) \Big) \qquad (\lambda \in F_k), \tag{4}$$

где $F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Равенства (2), (3), (4) получаются из равенства (a_P) теоремы 7.1, если положить P равным соответственно L, V_λ, U_λ. Из равенств (2), (3), (4) в силу 3.10 следуют соответственно соотношения

$$A_k = (A_k \cap H_{L \setminus F_k}) \oplus X, \tag{5}$$

$$A_k \cap H_{V_\lambda} = (A_k \cap H_{V_\lambda \setminus F_k}) \oplus X_\lambda \qquad (\lambda \in F_k), \tag{6}$$

$$A_k \cap H_{U_\lambda} = (A_k \cap H_{U_\lambda \setminus F_k}) \oplus Y_\lambda \qquad (\lambda \in F_k), \tag{7}$$

где

$$X = A_k \cap \Big(H_F \oplus \bigoplus_{\nu \neq k} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \Big), \tag{8}$$

$$X_\lambda = A_k \cap \Big(H_{V_\lambda \cap F} \oplus \bigoplus_{\nu \neq k} (A_\nu \cap H_{V_\lambda \setminus F_\nu}) \Big) \qquad (\lambda \in F_k), \tag{9}$$

$$Y_\lambda = A_k \cap \Big(H_{U_\lambda \cap F} \oplus \bigoplus_{\nu \neq k} (A_\nu \cap H_{U_\lambda \setminus F_\nu}) \Big) \qquad (\lambda \in F_k). \tag{10}$$

В силу (7) Y_λ является прямым слагаемым группы $A_k \cap H_{U_\lambda}$. По условию (E) согласовано с (A), следовательно, в силу 3.6 $H_{U_\lambda} = \bigoplus_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{U_\lambda})$ и, таким образом, группа $A_k \cap H_{U_\lambda}$ является прямым слагаемым группы H_{U_λ}, а значит, и группы G. Поэтому Y_λ является прямым слагаемым группы G. Далее, равенства (9) и (10) показывают, что $Y_\lambda \subset X_\lambda$. Следовательно, Y_λ является прямым слагаемым группы X_λ, т.е. существует подгруппа C_λ группы X_λ, удовлетворяющая соотношению

$$X_\lambda = Y_\lambda \oplus C_\lambda \qquad (\lambda \in F_k). \tag{11}$$

На основании соотношений (6), (7), (11) заключаем, что

$$A_k \cap H_{V_\lambda} = C_\lambda \oplus (A_k \cap H_{U_\lambda}) \qquad (\lambda \in F_k).$$

Так как $\overline{E}_\lambda = H_{V_\lambda}$ и $\check{E}_\lambda = H_{U_\lambda}$, то это соотношение можно записать в виде

$$A_k \cap \overline{E}_\lambda = C_\lambda \oplus (A_k \cap \check{E}_\lambda) \qquad (\lambda \in F_k). \tag{12}$$

По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому в силу 5.11

$$[A_k \cap \overline{E}_\lambda,\, \check{E}_\lambda] = \overline{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F_k). \tag{13}$$

На основании (12) и (13) заключаем, что $C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = \overline{E}_\lambda$, откуда, поскольку $\overline{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda$, получим

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F_k). \tag{14}$$

Далее, из (9) и (11) следует, что

$$C_\lambda \subset A_k \qquad (\lambda \in F_k). \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) показывают, что множество $\{C_\lambda\}_{\lambda \in F_k}$ подгрупп группы G удовлетворяет условиям (c) и (d) предложения 6.2. Кроме того, F_k – конечное подмножество L и по условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Поэтому в силу 6.2 имеет место прямое разложение

$$A_k = \Big(\bigoplus_{\lambda \in F_k} C_\lambda\Big) \oplus (A_k \cap H_{L \setminus F_k}). \tag{16}$$

Равенство (16) получается из равенства (e) предложения 6.2, если положить $F = F_k$ и $P = L$.

В силу (11) имеем $C_\lambda \subset X_\lambda$ и, как показывают равенства (8) и (9), $X_\lambda \subset X$. Поэтому $C_\lambda \subset X$ при $\lambda \in F_k$. Отсюда следует соотношение

$$\bigoplus_{\lambda \in F_k} C_\lambda \subset X. \tag{17}$$

Теперь на основании (5), (16), (17) заключаем, что

$$X = \bigoplus_{\lambda \in F_k} C_\lambda. \tag{18}$$

Далее, по условию $x \in A_k$ и согласно (1) $x \in H_F$. Отсюда в силу (8) следует, что $x \in X$ и, значит, в силу (18)

$$x \in \bigoplus_{\lambda \in F_k} C_\lambda. \tag{19}$$

Положим $\Gamma = F_k$. Тогда соотношения (14), (16), (19) показывают, что множество $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ подгрупп C_λ удовлетворяет условиям (a), (b), (c). Наконец, разложение (C) имеет место в силу разложений (A) и (16), причем согласно 6.3 разложение (E) вполне согласовано с разложением (C) и, таким образом, группы C_λ удовлетворяют также условию (d).

7.3. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Пусть, далее, для какого-либо прямого слагаемого A_β разложения (A) *имеет место прямое разложение*

$$A_\beta = \bigoplus_{\lambda \in Q} C_\lambda, \tag{1}$$

где Q – подмножество множества L и прямые слагаемые C_λ удовлетворяют условию

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = \overline{E}_\lambda \qquad (\lambda \in Q). \tag{2}$$

Тогда $Q = S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ имеет место прямое разложение

$$A_\beta \cap H_P = \bigoplus_{\lambda \in P \cap Q} C_\lambda. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть P – замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Докажем, что имеет место прямое разложение (3). Пусть F – конечное подмножество множества $Q \setminus P$,

$$F \subset Q \setminus P. \tag{4}$$

Принимая во внимание условия теоремы, мы на основании 6.2 заключаем, что

$$A_\beta \cap H_L = \Big(\bigoplus_{\lambda \in F} C_\lambda\Big) \oplus (A_\beta \cap H_{L \setminus F}). \tag{5}$$

Согласно (4) $F \subset L \setminus P$, откуда $P \subset L \setminus F$ и, следовательно,

$$H_P \subset H_{L \setminus F}. \tag{6}$$

На основании (5), (6) заключаем, что

$$\Big(\bigoplus_{\lambda \in F} C_\lambda\Big) \cap (A_\beta \cap H_P) \subset \Big(\bigoplus_{\lambda \in F} C_\lambda\Big) \cap (A_\beta \cap H_{L \setminus F}) = \{0\},$$

откуда

$$\Big(\bigoplus_{\lambda \in F} C_\lambda\Big) \cap (A_\beta \cap H_P) = \{0\}. \tag{7}$$

Из (7), поскольку F – любое конечное подмножество множества $Q \setminus P$, следует соотношение

$$\Big(\bigoplus_{\lambda \in Q \setminus P} C_\lambda\Big) \cap (A_\beta \cap H_P) = \{0\}. \tag{8}$$

Поскольку подмножество P замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, нетрудно видеть, что

$$\overline{E}_\lambda \subset H_P \qquad (\lambda \in P),$$

откуда в силу условия (2)

$$C_\lambda \subset H_P \qquad (\lambda \in P \cap Q). \tag{9}$$

Кроме того, в силу (1)

$$C_\lambda \subset A_\beta \qquad (\lambda \in Q). \tag{10}$$

На основании (1), (9), (10) заключаем, что

$$\bigoplus_{\lambda\in P\cap Q} C_\lambda \subset A_\beta \cap H_P. \tag{11}$$

Так как $Q = (Q \setminus P) \cup (P \cap Q)$, то равенство (1) можно записать в виде

$$A_\beta = \Big(\bigoplus_{\lambda\in Q\setminus P} C_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in P\cap Q} C_\lambda\Big). \tag{12}$$

Теперь на основании (8), (11), (12) заключаем, что имеет место прямое разложение (3).

Докажем, что имеет место равенство

$$Q = S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}).$$

Пусть

$$\alpha \in S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{13}$$

Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и через U_α – множество $V_\alpha \setminus \{\alpha\}$. Полагая в (3) множество P равным U_α и V_α и замечая, что $H_{U_\alpha} = \check{E}_\alpha$, $H_{V_\alpha} = \overline{E}_\alpha$, получим

$$A_\beta \cap \check{E}_\alpha = \bigoplus_{\lambda\in U_\alpha\cap Q} C_\lambda, \tag{14}$$

$$A_\beta \cap \overline{E}_\alpha = \bigoplus_{\lambda\in V_\alpha\cap Q} C_\lambda. \tag{15}$$

Если $\alpha \notin Q$, то $U_\alpha \cap Q = V_\alpha \cap Q$ и, следовательно, согласно (14) и (15)

$$A_\beta \cap \overline{E}_\alpha = A_\beta \cap \check{E}_\alpha,$$

что невозможно в силу (13). Этим доказано, что $\alpha \in Q$, если имеет место условие (13). Следовательно,

$$Q \supset S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{16}$$

Предположим теперь, что $\alpha \notin S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Тогда в силу 5.9

$$A_\beta \cap \overline{E}_\alpha = A_\beta \cap \check{E}_\alpha.$$

Отсюда, поскольку соотношения (14), (15) имеют место для всякого $\alpha \in L$, получим

$$\bigoplus_{\lambda\in U_\alpha\cap Q} C_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in V_\alpha\cap Q} C_\lambda.$$

Это равенство показывает, что $U_\alpha \cap Q = V_\alpha \cap Q$ и, следовательно, $\alpha \notin Q$. Таким образом, $Q \subset S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Сопоставляя это соотношение и (16), получим равенство $Q = S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$.

7.4. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Если какое-либо прямое слагаемое A_β разложения (A) *является счетной или конечной группой, то существует множество $\{C_\lambda\}_{\lambda \in S(A_\beta,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})}$ подгрупп группы G со следующими свойствами*:

$$A_\beta = \bigoplus_{\lambda \in S(A_\beta,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})} C_\lambda, \tag{1}$$

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in S(A_\beta,\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно условию A_β – счетная или конечная группа. Поэтому существует последовательность

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots, \tag{3}$$

содержащая все отличные от нуля элементы группы A_β, занумерованные натуральными числами.

Докажем, что для каждого натурального числа n существуют совокупность $\{T_i\}_{0<i\leqslant n}$ подмножеств множества L и множества $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_n}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leqslant n}$ подгрупп группы G со следующими свойствами:

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = \overline{E}_\lambda \qquad (\lambda \in T_n), \tag{a_n}$$

$$A_\beta = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T_n} C_\lambda\Big) \oplus A_\beta^{(n)}, \tag{b_n}$$

$$\{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\} \subset \bigoplus_{\lambda\in T_n} C_\lambda, \tag{c_n}$$

имеет место прямое разложение (d_n)

$$G = \Big(\bigoplus_{\lambda\in T_n} C_\lambda\Big) \oplus A_\beta^{(n)} \oplus \Big(\bigoplus_{\nu\neq\beta} A_\nu\Big) \tag{C_n}$$

и разложение (E) вполне согласовано с разложением (C_n),

$$T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_n \subset L. \tag{e_n}$$

В силу 7.2 при $n = 1$ искомые множества существуют. Допустим, что для некоторого натурального числа n множества $\{T_i\}_{0<i\leqslant n}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_n}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leqslant n}$ со свойствами (a_n) – (e_n) существуют, и докажем, что тогда найдутся множества $\{T_i\}_{0<i\leqslant n+1}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_{n+1}}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leqslant n+1}$ со свойствами (a_{n+1}) – (e_{n+1}).

Легко видеть, что наше утверждение справедливо, если элемент x_{n+1} принадлежит группе $\bigoplus\limits_{\lambda\in T_n} C_\lambda$ или группа $\bigoplus\limits_{\lambda\in T_n} C_\lambda$ совпадает с группой A_β, ибо в этом случае достаточно положить $T_{n+1}=T_n$ и $A_\beta^{(n+1)}=A_\beta^{(n)}$.

Допустим теперь, что элемент x_{n+1} не содержится в группе $\bigoplus\limits_{\lambda\in T_n} C_\lambda$. Тогда компонента y_{n+1} элемента x_{n+1} в прямом слагаемом $A_\beta^{(n)}$ разложения (C_n) отлична от нуля. По индуктивному предположению разложение (E) вполне согласовано с разложением (C_n). Поэтому в силу 7.2 для прямого слагаемого $A_\beta^{(n)}$ разложения (C_n) и элемента y_{n+1} существуют конечное подмножество Γ_n множества $S(A_\beta^{(n)},\mathrm{E},\Omega_\mathrm{A})$, множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma_n}$ подгрупп группы G и группа $A_\beta^{(n+1)}$, обладающие следующими свойствами:

$$C_\lambda\oplus\check{E}_\lambda=\overline{E}_\lambda\qquad(\lambda\in\Gamma_n),\tag{a_n^*}$$

$$A_\beta^{(n)}=\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Gamma_n}C_\lambda\Big)\oplus A_\beta^{(n+1)},\quad \text{где}\ \ A_\beta^{(n+1)}=A_\beta^{(n)}\cap H_{L\setminus\Gamma_n},\tag{b_n^*}$$

$$y_{n+1}\in\bigoplus_{\lambda\in\Gamma_n}C_\lambda,\tag{c_n^*}$$

имеет место прямое разложение (d_n^*)

$$G=\Big(\bigoplus_{\lambda\in T_n}C_\lambda\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Gamma_n}C_\lambda\Big)\oplus A_\beta^{(n+1)}\oplus\Big(\bigoplus_{\nu\neq\beta}A_\nu\Big)\tag{C_{n+1}^*}$$

и разложение (E) вполне согласовано с разложением (C_{n+1}^*).

Теперь, полагая $T_{n+1}=T_n\cup\Gamma_n$, мы на основании (a_n) – (e_n) и (a_n^*) – (d_n^*) заключаем, что множества $\{T_i\}_{0<i\leqslant n+1}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_{n+1}}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leqslant n+1}$ обладают всеми свойствами (a_{n+1}) – (e_{n+1}). Этим доказано, что множества $\{T_i\}_{0<i\leqslant n}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_n}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leqslant n}$ со свойствами (a_n) – (e_n) существуют для каждого натурального n.

Положим

$$Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n.\tag{4}$$

На основании соотношений (b_n), (e_n), (4) заключаем, что

$$\Big[\bigcup_{\lambda\in Q}C_\lambda\Big]=\bigoplus_{\lambda\in Q}C_\lambda.$$

Отсюда, поскольку соотношение (c_n) имеет место для любого натурального числа n, следует, что все элементы последовательности (3) принадлежат группе $\bigoplus\limits_{\lambda\in Q}C_\lambda$, т.е. $A_\beta\subset\bigoplus\limits_{\lambda\in Q}C_\lambda$. Но согласно (b_n) $C_\lambda\subset A_\beta$, следовательно,

$$A_\beta=\bigoplus_{\lambda\in Q}C_\lambda.\tag{5}$$

Далее, в силу соотношений (a_n) и (4)

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = \overline{E}_\lambda \qquad (\lambda \in Q). \tag{6}$$

Теперь из (5), (6) в силу 7.3 следует, что

$$Q = S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{7}$$

Сопоставляя соотношения (5), (6), (7), мы видим, что имеют место соотношения (1), (2). Теорема доказана.

(*Окончание статьи будет помещено в следующем номере журнала*)

Литература

1. Головин О. Н., *Множители без центров в прямых разложениях групп*, Мат. сб., **6(48):3** (1939), 423–426.

2. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **16(58):2** (1945), 129–162.

3. Курош А. Г., *Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe*, Мат. сб., **1(43):3** (1936), 345–350.

4. Курош А. Г., *Изоморфизмы прямых разложений*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **7:4** (1943), 185–202.

5. Курош А. Г., *Теория групп*, М.; Л.: Гостехиздат, 1944.

6. Baer R., *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. J., **3:1** (1937), 68–122.

7. Prüfer H., *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **17** (1923), 35–61.

8. Fitting H., *Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren*, Math. Z., **39** (1934), 16–30.

9. Fitting H., *Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe*, Math. Z., **41** (1936), 380–395.

О прямых разложениях групп. II

(Окончание) [1]

§ 8

В настоящем параграфе рассматривается вопрос об условиях, при которых два данных прямых разложения группы обладают центрально изоморфными продолжениями. Основным результатом является теорема 8.2. Из этой теоремы следует, что два данных прямых разложения (D) и (A) группы G обладают центрально изоморфными продолжениями, если разложение (D) согласовано с разложением (A) и выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) группа G является счетной; б) число прямых слагаемых в разложении (D) является конечным; в) каждое прямое слагаемое в разложении (A) имеет не более чем счетную мощность; г) частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности. Из теоремы 8.2 также следует (см. теоремы 8.3 и 8.4), что прямое разложение (D) группы G и любое другое прямое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями, если разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: 1) группа G является счетной; 2) частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности.

Автоморфизм φ группы G называется *центральным*, если для всякого $x \in G$ разность $\varphi x - x$ принадлежит центру группы G. Автоморфизм группы тогда и только тогда является центральным, когда он является нормальным автоморфизмом.

Две подгруппы группы G называются *центрально изоморфными*, если существует центральный автоморфизм группы G, отображающий одну из этих подгрупп на другую. Ниже будет использовано следующее предложение:

Если имеют место прямые разложения

$$G = A \oplus C = B \oplus C,$$

то подгруппы A и B центрально изоморфны [2].

---

[1] Начало см. в т. 4, № 3 (Украинский математический журнал).

[2] См. А. Г. Курош [5].

Два прямых разложения группы называются *центрально изоморфными*, если существует центральный автоморфизм этой группы, переводящий одно из этих разложений в другое. Нетрудно видеть, что два прямых разложения группы центрально изоморфны, если между прямыми слагаемыми этих разложений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие слагаемые центрально изоморфны.

8.1. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

– прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

каждое прямое слагаемое A_ν которого удовлетворяет по крайней мере одному из следующих двух условий:

1°. *Группа A_ν является счетной или конечной.*

2°. *Подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности.*

Тогда разложение (A) *может быть продолжено до разложения, центрально изоморфного разложению* (E).

Доказательство. По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A) и каждое прямое слагаемое разложения A_ν удовлетворяет хотя бы одному из условий 1°, 2°. Поэтому на основании 6.6 и 7.4 заключаем, что существует множество $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ подгрупп группы G таких, что имеют место прямые разложения

$$A_\nu = \bigoplus_{\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})} C_\lambda \qquad (\nu \in N). \tag{1}$$

В силу 5.5 имеет место соотношение

$$L = \bigcup_{\nu \in N} S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A}). \tag{2}$$

Заменяя в разложении (A) каждое прямое слагаемое A_ν по формуле (1) и принимая во внимание (2), получим прямое разложение

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} C_\lambda, \tag{C}$$

которое, очевидно, является продолжением разложения (A).

В силу 6.6 и 7.4 имеет место соотношение

$$C_\lambda \oplus \check{E}_\lambda = E_\lambda \oplus \check{E}_\lambda \qquad \big(\lambda \in L,\ \check{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})\big). \tag{3}$$

На основании (3) и разложения (E) мы можем утверждать, что имеют место прямые разложения

$$G = C_\lambda \oplus \Big(\bigoplus_{i \neq \lambda} E_i\Big) = E_\lambda \oplus \Big(\bigoplus_{i \neq \lambda} E_i\Big) \qquad (\lambda \in L), \tag{4}$$

которые показывают, что при всяком $\lambda \in L$ группы C_λ и E_λ центрально изоморфны. Отсюда следует, что разложения (E) и (C) центрально изоморфны. Таким образом, прямое разложение (C) является искомым продолжением разложения (A), центрально изоморфным разложению (E).

8.2. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

каждое прямое слагаемое A_ν которого удовлетворяет хотя бы одному из следующих двух условий:

1°. *Группа A_ν является счетной или конечной.*

2°. *Подмножество $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности.*

Тогда прямые разложения (D) *и* (A) *обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Обозначим через L множество всех упорядоченных пар $(\alpha,\, \nu)$, $\alpha \in M$, $\nu \in N$, для которых компонента $E_{(\alpha,\, \nu)}$ группы $A_\nu \cap \overline{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D) не является нулевой группой. По условию разложение (D) согласовано с разложением (A). Поэтому в силу теоремы 5.10 имеет место прямое разложение

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda, \tag{E}$$

причем это разложение является продолжением разложения (D) и вполне согласовано с разложением (A). Если подмножество $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности, то в силу 5.12 подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ также удовлетворяет этому условию. Но по условию каждое прямое слагаемое A_ν разложения (A) удовлетворяет хотя бы одному из условий 1°, 2°. Следовательно, каждое прямое слагаемое A_ν разложения (A) удовлетворяет по крайней мере одному из условий 1°, 2° теоремы 8.1. Поэтому на основании теоремы 8.1 заключаем, что существует прямое разложение

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} C_\lambda, \tag{C}$$

которое является продолжением разложения (A) и центрально изоморфно разложению (E). Таким образом, разложения (E) и (C) являются искомыми центрально изоморфными продолжениями прямых разложений (D) и (A). Теорема доказана.

8.3. Теорема. *Прямое разложение счетной группы, частично упорядоченное относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы, и любое другое прямое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G – счетная группа и

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– ее прямое разложение, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Пусть, далее,

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– любое другое прямое разложение группы G. Множество Ω_{A} нормальных идемпотентных эндоморфизмов, соответствующих прямому разложению (A), является подмножеством множества Ω. Так как разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω и $\Omega_{\mathrm{A}} \subset \Omega$, то оно является частично упорядоченным также и относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}. Следовательно, разложение (D) согласовано с разложением (A). Поэтому на основании теоремы 8.2 заключаем, что разложения (D) и (A) обладают центрально изоморфными продолжениями.

8.4. Теорема. *Если прямое разложение*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

группы G является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов этой группы и частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности, то разложение (D) *и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

– произвольное прямое разложение группы G и Ω_{A} – множество нормальных идемпотентных эндоморфизмов, соответствующих прямому разложению (A). Поскольку $\Omega_{\mathrm{A}} \subset \Omega$ и по условию разложение (D) является частично упорядоченным относительно Ω, то разложение (D) является частично упорядоченным также относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}. Следовательно, разложение (D) согласовано с разложением (A). Далее, поскольку $\Omega_{\mathrm{A}} \subset \Omega$ и по условию частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности, то в силу 5.12 этому условию удовлетворяет также частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Таким образом, каждое прямое слагаемое A_ν разложения (A) удовлетворяет условию 2° теоремы 8.2. Поэтому в силу теоремы 8.2 разложения (D) и (A) обладают центрально изоморфными продолжениями. Теорема доказана.

§ 9

В этом параграфе даны необходимые и достаточные условия, при которых данное прямое разложение группы является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов этой группы (теорема 9.5). В связи с этим получены новые условия, при которых данное прямое разложение группы и любое другое прямое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями (теоремы 9.6 и 9.7).

Гомоморфизм группы H в группу B будем называть *нетривиальным*, если образ группы H при этом гомоморфизме не является нулевой группой.

В этом параграфе будет использована следующая теорема, принадлежащая Фиттингу [3]:

9.1. *Если $G = B \oplus H$, то подгруппа H тогда и только тогда допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, когда не существует нетривиального гомоморфизма группы H в центр группы B.*

Докажем следующее предложение, обобщающее теорему 9.1.

9.2. *Если $G = \bigoplus\limits_{\alpha \in M} D_\alpha$ и Γ – подмножество множества индексов M, то подгруппа $H = \bigoplus\limits_{\beta \in \Gamma} D_\beta$ тогда и только тогда допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, когда при $i \in \Gamma$ и $k \in M \setminus \Gamma$ не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k.*

Доказательство. Обозначим через φ_α, $\alpha \in M$, идемпотентный эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому D_α разложения

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha. \tag{D}$$

Положим

$$B = \bigoplus_{\gamma \in M \setminus \Gamma} D_\gamma. \tag{1}$$

Тогда, очевидно,

$$G = B \oplus H. \tag{2}$$

1°. Докажем достаточность условия. Допустим, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, если $i \in \Gamma$ и $k \in M \setminus \Gamma$.

[3] См. H. Fitting [8].

Докажем, что тогда подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. В силу 9.1 для этого достаточно доказать, что не существует нетривиального гомоморфизма группы H в центр группы B.

Пусть существует нетривиальный гомоморфизм ψ группы H в центр группы B. Если мы предположим, что $\psi D_\beta = \{0\}$ для каждого $\beta \in \Gamma$, то тогда, поскольку $H = \bigoplus\limits_{\beta \in \Gamma} D_\beta$, будет $\psi H = \{0\}$, что невозможно, так как ψ – нетривиальный гомоморфизм. Поэтому существует индекс $i \in \Gamma$ такой, что

$$\psi D_i \neq \{0\}. \tag{3}$$

Отсюда, принимая во внимание (1), заключаем, что найдется по крайней мере один индекс $k \in M \setminus \Gamma$ такой, что компонента группы ψD_i в прямом слагаемом D_k разложения (D) отлична от нуля, т.е.

$$\varphi_k \psi D_i \neq \{0\}. \tag{4}$$

Легко видеть, что гомоморфизм $\varphi_k \psi$ отображает D_i в центр группы D_k. Это следует из того, что ψH содержится в центре группы B и $D_i \subset H$. Поэтому, принимая во внимание (4), мы заключаем, что гомоморфизм $\varphi_k \psi$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм группы D_i в центр группы D_k, причем $i \in \Gamma$ и $k \in M \setminus \Gamma$. Но по условию это невозможно. Поэтому предположение о существовании нетривиального гомоморфизма группы H в центр группы B должно быть отвергнуто. Следовательно, в силу 9.1 подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G.

2°. Докажем необходимость условия. Предположим, что группа H допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Тогда не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, если $i \in \Gamma,\ k \in M \setminus \Gamma$. Действительно, если бы существовал нетривиальный гомоморфизм η группы D_i в центр группы D_k, то гомоморфизм $\eta\varphi_i$ индуцировал бы нетривиальный гомоморфизм группы H в центр группы B, что невозможно в силу 9.1.

9.3. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных эндоморфизмов группы G. Тогда не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, $i, k \in M$, всякий раз, когда индексы i и k, рассматриваемые как элементы частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$, удовлетворяют следующему условию: $i < k$ или i несравнимо с k.

Доказательство. Пусть D_i и D_k – два различных прямых слагаемых разложения (D), причем $i < k$ или i несравнимо с k, если i и k рассматривать как элементы частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Обозначим через

V_i комбинаторное замыкание элемента i в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Тогда, очевидно,

$$i \in V_i, \tag{1}$$

$$k \notin V_i. \tag{2}$$

В силу 2.9

$$\overline{D}_i = \bigoplus_{\alpha \in V_i} D_\alpha, \tag{3}$$

где $\overline{D}_i = V(D_i, \mathrm{D}, \Omega)$. Из определения $\overline{D}_i$ следует, что $\overline{D}_i$ есть Ω-подгруппа группы G. Отсюда, принимая во внимание (1), (2), (3), мы на основании 9.2 заключаем, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k.

9.4. *Если прямое разложение*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

группы G не содержит нулевых прямых слагаемых и множество индексов M можно так частично упорядочить, что всякий раз, когда $i < k$ или i несравнимо с k, $i, k \in M$, не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, то разложение (D) *является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G.*

Доказательство. Обозначим через Ω множество всех нормальных эндоморфизмов группы G. Предположим, что в множестве индексов M введено отношение порядка, которое превращает его в частично упорядоченное множество θ, удовлетворяющее следующему условию:

(a) если $i < k$ или i несравнимо с k, $i, k \in \theta$, то не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k.

Пусть D_α и D_β – два различных прямых слагаемых разложения (D). Докажем, что среди групп, принадлежащих множеству $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$, существует группа, содержащая одно из прямых слагаемых D_α, D_β и не содержащая другого. Этим в силу 1.4 будет доказано, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω. Легко видеть, что имеет место по крайней мере одно из соотношений $\alpha \notin V_\beta$, $\beta \notin V_\alpha$, где V_α и V_β – комбинаторные замыкания соответственно α и β в частично упорядоченном множестве θ. Предположим, например, что имеет место соотношение

$$\alpha \notin V_\beta. \tag{1}$$

Если $i \in V_\beta$ и $k \in \theta \setminus V_\beta$, то, очевидно, $i < k$ или i несравнимо с k. Отсюда, поскольку θ удовлетворяет условию (a), следует, что не существует нетривиального гомоморфизма D_i в центр группы D_k. Поэтому на основании 9.2 заключаем, что группа

$$H_\beta = \bigoplus_{i \in V_\beta} D_i \tag{2}$$

является Ω-подгруппой группы G. Следовательно,

$$H_\beta \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega).$$

Далее, так как по условию разложение (D) не содержит нулевых прямых слагаемых, мы на основании (1), (2) и очевидного соотношения $\beta \in V_\beta$ заключаем, что H_β содержит прямое слагаемое D_β и не содержит D_α. Этим доказано, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных эндоморфизмов группы G.

9.5. Теорема. *Для того чтобы прямое разложение*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

группы G было частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, необходимо и достаточно, чтобы разложение (D) *не содержало нулевых прямых слагаемых и множество M можно было так частично упорядочить, что всякий раз, когда $i < k$ или i несравнимо с k, $\ i, k \in M$, не существует нетривиального гомоморфизма прямого слагаемого D_i в центр прямого слагаемого D_k.*

Эта теорема непосредственно следует из предложений 9.3 и 9.4.

9.6. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение счетной группы G, не содержащее нулевых слагаемых. Если множество индексов M можно так частично упорядочить, что не существует нетривиального гомоморфизма прямого слагаемого D_i в центр прямого слагаемого D_k, $\ i, k \in M$, всякий раз, когда $i < k$ или i несравнимо с k, то разложение (D) *и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены. Тогда в силу 9.5 разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Следовательно, в силу 4.3 разложение (D) будет частично упорядоченным также относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Отсюда, поскольку G – счетная группа, в силу 8.3 следует, что разложение (D) и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями.

9.7. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, не содержащее нулевых слагаемых. Если множество индексов можно так частично упорядочить, что, во-первых, не существует нетривиального гомоморфизма прямого слагаемого D_i в центр прямого слагаемого D_k, $\ i, k \in M$, всякий раз, когда $i < k$ или i несравнимо с k,

и, во-вторых, частично упорядоченное множество, в которое превращается M, удовлетворяет условию минимальности, то разложение (D) *и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Предположим, что в множестве индексов M введено отношение порядка, которое превращает его в частично упорядоченное множество θ, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(a) если $i < k$ или i несравнимо с k, где $i, k \in M$, то не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k;

(b) частично упорядоченное множество θ удовлетворяет условию минимальности.

В силу 9.4 разложение (D) будет частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Следовательно, в силу 4.3 разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Докажем, что θ удовлетворяет следующему условию:

(c) если β – произвольный элемент из θ, то комбинаторное замыкание V_β^* элемента β в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$ является подмножеством комбинаторного замыкания V_β элемента β в частично упорядоченном множестве θ.

Положим
$$H_\beta = \bigoplus_{i \in V_\beta} D_i \qquad (\beta \in \theta).$$
Так как θ удовлетворяет условию (a), то совершенно так же, как и в доказательстве предложения 9.4, мы убеждаемся в том, что подгруппа H_β допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Следовательно, группа $\bigoplus\limits_{i \in V_\beta} D_i$ является допустимой относительно Ω и поэтому в силу 2.5 множество V_β является замкнутым в $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Отсюда следует, что $V_\beta^* \subset V_\beta$, так как $\beta \in V_\beta$ и V_β^* является наименьшим замкнутым подмножеством $L(\mathrm{D}, \Omega)$, содержащим β. Таким образом, θ удовлетворяет условию (c).

Так как частично упорядоченное множество θ удовлетворяет условиям (b) и (c), то нетрудно видеть, что частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности. Таким образом, прямое разложение (D) удовлетворяет условиям теоремы 8.4, и поэтому разложение (D) и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. Теорема доказана.

Легко видеть, что частными случаями теоремы 9.7 являются:

(a) теорема Головина [1]:

Два прямых разложения произвольной группы, при каждом из которых центр группы остается целиком в одном из прямых слагаемых, всегда обладают центрально изоморфными продолжениями;

(b) следующее обобщение теоремы Головина, данное Курошем [4]:

Если даны два таких прямых разложения произвольной группы, что хотя бы при одном из них центр группы остается целиком в одном из прямых слагаемых, то эти два разложения обладают центрально изоморфными продолжениями.

§ 10

В настоящем параграфе рассматривается вопрос об условиях, при которых любые два прямых разложения группы обладают центрально изоморфными продолжениями. Основным результатом является теорема 10.3.

10.1. *Если любые два прямых разложения группы C обладают центрально изоморфными продолжениями, H – подгруппа группы C, допустимая относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы C, и имеет место прямое разложение*

$$C = A \oplus H, \tag{1}$$

то любые два прямых разложения группы H или группы A обладают центрально изоморфными продолжениями.

Доказательство. Предположим, что любые два разложения группы C обладают центрально изоморфными продолжениями. Предположим, далее, что подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы C и имеет место прямое разложение (1). Пусть

$$A = \bigoplus_{\alpha \in N} B_\alpha, \tag{B}$$

$$A = \bigoplus_{\beta \in M} F_\beta \tag{F}$$

– два прямых разложения группы A и

$$H = \bigoplus_{l \in Q} H_l, \tag{H}$$

$$H = \bigoplus_{k \in R} E_k \tag{E}$$

– два прямых разложения группы H. Докажем, что как разложения (B), (F), так и разложения (H), (E) обладают центрально изоморфными продолжениями.

На основании разложений (1), (B), (F), (H), (E) заключаем, что имеют место следующие прямые разложения группы C:

$$C = \Big(\bigoplus_{\alpha \in N} B_\alpha\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{l \in Q} H_l\Big), \tag{2}$$

$$C = \Big(\bigoplus_{\beta \in M} F_\beta\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k \in R} E_k\Big). \tag{3}$$

По предположению любые два прямых разложения группы C обладают центрально изоморфными продолжениями, следовательно, такими продолжениями обладают разложения (2) и (3). Пусть

$$C = \bigoplus_{i \in T} C_i, \tag{C}$$

$$C = \bigoplus_{i \in T} Z_i \tag{Z}$$

– центрально изоморфные продолжения соответственно разложений (2) и (3). Тогда существует нормальный автоморфизм φ группы C, переводящий разложение (C) в разложение (Z), причем мы можем предполагать, что автоморфизм φ отображает прямое слагаемое C_i на прямое слагаемое Z_i,

$$\varphi C_i = Z_i \qquad (i \in T). \tag{4}$$

Разложение (C) является продолжением разложения (1), так как разложение (C) есть продолжение разложения (2) и разложение (2) является продолжением разложения (1). Поэтому существует подмножество Γ множества T такое, что

$$H = \bigoplus_{i \in \Gamma} C_i \tag{5}$$

и

$$A = \bigoplus_{i \in T \setminus \Gamma} C_i. \tag{6}$$

Теперь, поскольку разложение (C) есть продолжение разложения (2), нетрудно видеть, что разложения (5) и (6) являются продолжениями соответственно разложений (H) и (B).

По предположению подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы C. Отсюда в силу 4.2 следует, что подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных автоморфизмов группы C. Следовательно,

$$\varphi H = H. \tag{7}$$

На основании (4), (5), (7) заключаем, что

$$H = \bigoplus_{i \in \Gamma} \varphi C_i = \bigoplus_{i \in \Gamma} Z_i,$$

т.е.

$$H = \bigoplus_{i \in \Gamma} Z_i. \tag{8}$$

Разложение (Z) является продолжением разложения (1), так как разложение (Z) есть продолжение разложения (3) и разложение (3) является продолжением разложения (1). Отсюда, если принять во внимание (8), следует, что

$$A = \bigoplus_{i \in T \setminus \Gamma} Z_i. \tag{9}$$

Так как разложение (Z) является продолжением разложения (3), то нетрудно видеть, что разложения (8) и (9) являются продолжениями соответственно разложений (E) и (F).

Выше было показано, что разложения (5) и (8) суть продолжения соответственно разложений (H) и (E), а разложения (6) и (9) – продолжения соответственно разложений (B) и (F). Далее, поскольку φ – нормальный автоморфизм группы C, отображающий C_i на Z_i, $i \in T$, группы C_i и Z_i центрально изоморфны. Поэтому разложения (5) и (8) являются искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (H) и (E), а разложения (6) и (9) – центрально изоморфными продолжениями разложений (B) и (F).

10.2. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали центрально изоморфными продолжениями, необходимо, чтобы для всякого $\alpha \in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладали центрально изоморфными продолжениями.

Доказательство. Предположим, что любые два разложения группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. Докажем, что тогда для всякого $\alpha \in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладают центрально изоморфными продолжениями. Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$ и положим

$$\overline{D}_\alpha = \bigoplus_{i \in V_\alpha} D_i,$$

$$\check{D}_\alpha = \bigoplus_{i \in V_\alpha \setminus \{\alpha\}} D_i.$$

Тогда

$$\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha \qquad (\alpha \in M). \tag{1}$$

Так как V_α и $V_\alpha \setminus \{\alpha\}$ суть замкнутые подмножества частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$, то в силу 2.5 $\overline{D}_\alpha$ и $\check{D}_\alpha$ являются Ω-подгруппами группы G.

По предположению любые два прямых разложения группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. Кроме того, подгруппа $\overline{D}_\alpha$ является прямым слагаемым группы G и допустима относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Поэтому на основании 10.1 заключаем, что любые два прямых разложения группы $\overline{D}_\alpha$ обладают центрально изоморфными продолжениями. Далее, подгруппа $\check{D}_\alpha$ группы $\overline{D}_\alpha$ допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы $\overline{D}_\alpha$. Это следует из 4.2, поскольку подгруппа $\check{D}_\alpha$ допустима относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы

G и $\overline{D}_\alpha$ является прямым слагаемым группы G. Кроме того, $\overline{D}_\alpha = D_\alpha \oplus \check{D}_\alpha$ и любые два прямых разложения группы $\overline{D}_\alpha$ обладают центрально изоморфными продолжениями. Поэтому на основании 10.1 заключаем, что любые два прямых разложения группы D_α, $\alpha \in M$, обладают центрально изоморфными продолжениями.

10.3. Теорема. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1°. *Группа G является счетной или конечной.*

2°. *Частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности.*

Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали центрально изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\alpha \in M$ центрально изоморфными продолжениями обладали любые два прямых разложения группы D_α.

Доказательство. В силу 10.2 условия теоремы являются необходимыми.

Докажем достаточность условий. Предположим, что для всякого $\alpha \in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладают центрально изоморфными продолжениями. Пусть

$$G = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

$$G = \bigoplus_{k \in \Gamma} B_k \tag{B}$$

– два прямых разложения группы G. Докажем, что разложения (A) и (B) обладают центрально изоморфными продолжениями. По условию разложение (D) является частично упорядоченным относительно Ω и выполняется хотя бы одно из условий 1°, 2°. Поэтому на основании теорем 8.3 и 8.4 заключаем, что разложения (D), (A) и разложения (D), (B) обладают центрально изоморфными продолжениями. Пусть

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

и

$$G = \bigoplus_{\lambda \in L} C_\lambda \tag{C}$$

– центрально изоморфные продолжения соответственно разложений (D) и (A), и пусть φ – нормальный автоморфизм группы G, переводящий разложение (C) в разложение (E). Пусть, далее,

$$G = \bigoplus_{n \in P} F_n \tag{F}$$

и

$$G = \bigoplus_{n \in P} Z_n \tag{Z}$$

– центрально изоморфные продолжения соответственно прямых разложений (D) и (B), и пусть ψ – нормальный автоморфизм группы G, переводящий разложение (F) в разложение (Z).

Так как разложения (E) и (F) являются продолжениями разложения (D), то существуют подмножества L_α и P_α соответственно множеств L и P, для которых имеют место равенства

$$D_\alpha = \bigoplus_{\lambda \in L_\alpha} E_\lambda \qquad (\alpha \in M), \tag{E$_\alpha$}$$

$$D_\alpha = \bigoplus_{n \in P_\alpha} F_n \qquad (\alpha \in M). \tag{F$_\alpha$}$$

По предположению для всякого $\alpha \in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладают центрально изоморфными продолжениями, следовательно, такими продолжениями обладают разложения (E$_\alpha$) и (F$_\alpha$). Пусть

$$D_\alpha = \bigoplus_{i \in T_\alpha} H_i \qquad (\alpha \in M) \tag{H$_\alpha$}$$

и

$$D_\alpha = \bigoplus_{i \in T_\alpha} R_i \qquad (\alpha \in M) \tag{R$_\alpha$}$$

– центрально изоморфные продолжения соответственно прямых разложений (E$_\alpha$) и (F$_\alpha$), $\alpha \in M$. Заменяя каждое прямое слагаемое D_α в разложении (D) на основании разложений (H$_\alpha$) и (R$_\alpha$) и полагая $T = \bigcup_{\alpha \in M} T_\alpha$, получим прямые разложения

$$G = \bigoplus_{i \in T} H_i, \tag{H}$$

$$G = \bigoplus_{i \in T} R_i, \tag{R}$$

которые, как легко видеть, являются продолжениями соответственно разложений (E) и (F). Так как для всякого $\alpha \in M$ разложения (H$_\alpha$) и (R$_\alpha$) центрально изоморфны, то разложения (H) и (R) также являются центрально изоморфными. Поэтому существует нормальный автоморфизм η группы G, переводящий разложение (H) в разложение (R).

Положим

$$X_i = \varphi^{-1} H_i \qquad (i \in T), \tag{1}$$

$$Y_i = \psi R_i \qquad (i \in T). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что автоморфизмы φ^{-1} и ψ группы G переводят разложения (H), (R) соответственно в разложения

$$G = \bigoplus_{i \in T} X_i, \tag{X}$$

$$G = \bigoplus_{i \in T} Y_i. \tag{Y}$$

Так как разложение (H) является продолжением разложения (E) и автоморфизм φ^{-1} переводит разложения (E) и (H) соответственно в разложения (C) и (X), то разложение (X) является продолжением разложения (C). Аналогично разложение (Y) является продолжением разложения (Z), так как (R) является продолжением (F) и автоморфизм ψ переводит разложения (F) и (R) соответственно в разложения (Z) и (Y). Легко видеть, что автоморфизм θ,

$$\theta = \psi\eta\varphi,$$

переводит разложение (X) в разложение (Y). Кроме того, автоморфизм θ, будучи произведением нормальных автоморфизмов ψ, η, φ группы G, является нормальным автоморфизмом группы G. Наконец, разложения (X), (Y) являются продолжениями соответственно разложений (A) и (B), так как (C) и (Z) – продолжения соответственно разложений (A) и (B), а (X) и (Y) – продолжения соответственно разложений (C) и (Z). Таким образом, разложения (X) и (Y) являются искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (A) и (B), причем нормальный автоморфизм θ переводит разложение (X) в разложение (Y). Теорема доказана.

10.4. Теорема. *Пусть группа G обладает прямым разложением*

$$G = H \oplus F, \tag{1}$$

в котором прямое слагаемое H не содержит ненулевых элементов конечного порядка, а каждый элемент группы F имеет конечный порядок. Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали центрально изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы любые два прямых разложения как группы F, так и группы H обладали центрально изоморфными продолжениями.

Доказательство. Легко видеть, что подгруппа F допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G; в частности, она допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Следовательно, в силу 1.4 прямое разложение (1) является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Поэтому теорема 10.4 является частным случаем теоремы 10.3.

§ 11

Целью данного параграфа является доказательство принадлежащей Бэру [4] теоремы 11.2, необходимой для следующего параграфа. Приведенное ниже доказательство этой теоремы отлично от доказательства Бэра.

В доказательстве предложения 11.1 будет использовано понятие высоты элемента, определяемое следующим образом. Пусть B – абелева группа без кручения и x – элемент из B. *Высотой* элемента x в группе B будем называть множество всех целых рациональных чисел n, удовлетворяющих условию $x \in nB$. Высоту элемента x в группе B будем обозначать символом $h(x, B)$. Соотношение $h(x, B) \geqslant h(y, B)$ будет означать, что $h(y, B)$ является подмножеством множества $h(x, B)$. Соотношение $h(x, B) > h(y, B)$ будет означать, что $h(y, B)$ является подмножеством множества $h(x, B)$, но не совпадает с ним. Далее, будем говорить, что высота $h(x, B)$ элемента x *несравнима* с высотой $h(y, B)$ элемента y, если ни одно из множеств $h(x, B)$, $h(y, B)$ не содержится в другом.

Легко убедиться в том, что для всякого целого числа r и любого элемента $x \in B$ имеет место соотношение $h(rx, B) \geqslant h(x, B)$.

11.1. *Пусть B – абелева группа без кручения, ψ – гомоморфизм этой группы на группу без кручения первого ранга T и A – ядро этого гомоморфизма. Пусть, далее, любая сервантная подгруппа первого ранга группы B, не содержащаяся в A, изоморфна T. Тогда подгруппа A является прямым слагаемым группы B.*

Доказательство. 1°. Пусть b – элемент группы B, не содержащийся в A. Докажем, что в классе смежности $b + A$ существует элемент c максимальной высоты, т.е. такой элемент, что для всякого элемента $x \in b + A$ либо выполнено $h(c, B) \geqslant h(x, B)$, либо $h(c, B)$ несравнимо с $h(x, B)$. Предположим, что такого максимального элемента не существует. Тогда в классе смежности $b + A$ существует бесконечная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такая, что

$$h(x_1, B) < h(x_2, B) < \ldots < h(x_n, B) < \ldots \tag{1}$$

Обозначим через B_i сервантную подгруппу первого ранга группы B, содержащую элемент x_i, и положим $T_i = \psi B_i,\ i = 1, 2, \ldots$ Тогда, поскольку

$$h(x_i, B) < h(x_k, B)$$

при $i < k$, элементы x_i и x_k принадлежат одному и тому же классу смежности $b + A$ и A – ядро гомоморфизма ψ, нетрудно видеть, что имеют место соотношения

$$T_i \subset T_k, \quad T_i \neq T_k \qquad (i < k). \tag{2}$$

По условию любая сервантная подгруппа первого ранга группы B, не содержащаяся в A, изоморфна T, следовательно,

$$B_i \cong T \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

[4] См. R. Baer [6].

Так как $x_i \notin A$ и B_i – наименьшая сервантная подгруппа группы B, содержащая x_i, то $B_i \cap A = \{0\}$. Отсюда, поскольку A – ядро гомоморфизма ψ, следует, что $\psi B_i \cong B_i$, откуда в силу (3) получим

$$T_i \cong T \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{4}$$

Соотношения (2) и (4) показывают, что существует бесконечная возрастающая последовательность подгрупп группы T, изоморфных всей группе T. Но это невозможно, так как T – группа первого ранга. Этим доказано, что в любом классе смежности $b + A$, где $b \in B$ и $b \notin A$, существует хотя бы один элемент максимальной высоты.

2°. Пусть b есть элемент группы B, не принадлежащий A, и c – элемент класса смежности $b+A$, имеющий среди элементов этого класса максимальную высоту в B. Докажем, что

$$h(c, B) \geqslant h(z, B) \tag{5}$$

для всякого $z \in b + A$. Обозначим через C и Z сервантные подгруппы первого ранга группы B, содержащие соответственно элементы c и z. По условию группы C и Z изоморфны. Пусть φ – изоморфное отображение группы C на Z. Тогда, так как Z – группа первого ранга, существуют целые числа r и s такие, что

$$z = \frac{r}{s}\,\varphi c, \tag{6}$$

причем мы можем считать, что числа r и s взаимно просты и $r > 0$. Из соотношения (6), очевидно, следует равенство

$$\varphi(rc) = sz. \tag{7}$$

Так как C и Z – сервантные подгруппы группы B и φ – изоморфное отображение C на Z, то на основании (7) мы заключаем, что

$$h(rc, B) = h(sz, B). \tag{8}$$

Поскольку числа r и s взаимно просты, найдутся целые числа l и k такие, что

$$lr + ks = 1. \tag{9}$$

Положим

$$g = lrc + ksz. \tag{10}$$

Пусть $\bar{g} = g + A$. Так как $c, z \in \bar{b} = b + A$, то в силу (10)

$$\bar{g} = lr\bar{b} + ks\bar{b} = (lr + ks)\bar{b},$$

откуда в силу (9) $\bar{g} = \bar{b}$ и, следовательно,

$$g \in \bar{b} = b + A. \tag{11}$$

На основании (8) и (10) заключаем, что

$$h(g, B) \geqslant h(rc, B),$$

откуда
$$h(g,B) \geqslant h(rc,B) \geqslant h(c,B). \tag{12}$$
С другой стороны, так как согласно (11) $g \in b + A$ и элемент c среди элементов класса смежности $b + A$ имеет максимальную высоту в B, то из (12) получаем
$$h(g,B) = h(c,B). \tag{13}$$
Из (12) и (13) следует, что $h(rc,B) = h(c,B)$. Поэтому в силу (8) имеет место соотношение (5).

3°. Пусть b – элемент группы B, не принадлежащий A, c – элемент класса смежности $b + A$, имеющий среди элементов этого класса максимальную высоту в B, и C – сервантная подгруппа первого ранга группы B, содержащая элемент c. Докажем, что
$$B = A \oplus C. \tag{14}$$

Так как C – сервантная подгруппа группы B, то имеет место равенство
$$h(c,C) = h(c,B). \tag{15}$$
Обозначим через $\overline{B}$ факторгруппу B/A,
$$\overline{B} = B/A, \tag{16}$$
и через $\overline{C}$ – образ группы C при естественном гомоморфизме группы B на факторгруппу $\overline{B}$. Положим $\bar{c} = c + A = b + A$. Поскольку $\bar{c}$ – образ элемента c при естественном гомоморфизме группы B на $\overline{B}$, то легко видеть, что
$$h(\bar{c},\overline{C}) \geqslant h(c,C). \tag{17}$$
На основании (5) заключаем, что
$$h(c,B) \geqslant h(\bar{c},\overline{B}). \tag{18}$$
Теперь, сопоставляя (15), (17), (18), получим
$$h(\bar{c},\overline{C}) \geqslant h(\bar{c},\overline{B}),$$
откуда, поскольку $\overline{C}$ – подгруппа группы $\overline{B}$, следует равенство
$$h(\bar{c},\overline{C}) = h(\bar{c},\overline{B}). \tag{19}$$
По условию $\overline{B}$ является группой первого ранга, $\overline{B} \cong T$. Кроме того, $\overline{C}$ является подгруппой группы $\overline{B}$ и, как показывает (19), элемент $\bar{c}$ имеет одну и ту же высоту в группах $\overline{C}$ и $\overline{B}$. Отсюда, поскольку $\bar{c}$ – ненулевой элемент группы $\overline{C}$, следует, что подгруппа $\overline{C}$ совпадает с группой $\overline{B}$,
$$\overline{C} = \overline{B}. \tag{20}$$

Поскольку полным прообразом группы $\overline{C}$ при естественном гомоморфизме B на $\overline{B}$ является группа $[A,\, C]$, то из равенства (20) следует равенство

$$B = [A,\, C]. \tag{21}$$

В силу (16) ядром естественного гомоморфизма группы B на $\overline{B}$ является подгруппа A. Далее, образ $\overline{C}$ подгруппы C при этом гомоморфизме не содержит ненулевых элементов конечного порядка и не является нулевой группой, так как $\overline{C} = \overline{B} \cong T$. Поэтому мы можем утверждать, что имеет место равенство

$$A \cap C = \{0\}. \tag{22}$$

Теперь на основании (21), (22) заключаем, что имеет место прямое разложение (14) и, таким образом, подгруппа A является прямым слагаемым группы B.

11.2. Теорема. *Если абелева группа без кручения разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных одной и той же группе первого ранга T, то любое прямое слагаемое этой группы также разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T.*

Доказательство. Пусть G – абелева группа без кручения и

$$G = \bigoplus_{\alpha<\gamma} G_\alpha \tag{1}$$

– ее разложение в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе первого ранга T, причем мы будем предполагать, что индекс α в разложении (1) пробегает множество всех порядковых чисел, меньших, чем γ. Пусть C – ненулевая группа, являющаяся прямым слагаемым группы G. Докажем, что C разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных T. Обозначим через C_0 нулевую подгруппу группы C и положим

$$C_i = C \cap \Big(\bigoplus_{\alpha<i} G_\alpha\Big) \qquad (0 < i \leqslant \gamma). \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_i \subset \ldots \subset C_\gamma = C. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что пересечение любых двух сервантных подгрупп абелевой группы без кручения также является сервантной подгруппой этой группы. Но прямые слагаемые группы являются ее сервантными подгруппами. Отсюда, принимая во внимание (2), заключаем, что C_i, $i \leqslant \gamma$, является сервантной подгруппой группы G.

Докажем, что факторгруппа C_{i+1}/C_i изоморфна группе T всякий раз, когда $C_{i+1} \neq C_i$:

$$C_{i+1}/C_i \cong T \qquad (i < \gamma,\ C_{i+1} \neq C_i). \tag{4}$$

Обозначим через φ_i гомоморфизм группы C_{i+1} в группу G_i, ставящий в соответствие каждому элементу $c \in C_{i+1}$ его компоненту в прямом слагаемом G_i

разложения (1). Ядром гомоморфизма φ_i будет, очевидно, подгруппа C_i, а образом группы C_{i+1} при этом гомоморфизме будет компонента S_i группы C_{i+1} в прямом слагаемом G_i разложения (1). Поэтому

$$C_{i+1}/C_i \cong S_i \qquad (i < \gamma). \tag{5}$$

Предположим, что $C_{i+1} \neq C_i$. Тогда существует элемент $c \in C_{i+1}$, имеющий ненулевую компоненту в слагаемом G_i разложения (1). Обозначим через Z сервантную подгруппу первого ранга группы G, содержащую элемент c. Так как G – группа без кручения, $c \in C_{i+1}$ и C_{i+1} – сервантная подгруппа группы G, то $Z \subset C_{i+1}$. Компонента Z^* группы Z в прямом слагаемом G_i разложения (1) изоморфна Z, так как G_i – группа без кручения, Z – группа первого ранга и Z^* – ненулевая группа. По условию группа G является прямой суммой групп, изоморфных T. Поэтому любая сервантная подгруппа первого ранга группы G изоморфна T. Следовательно, $Z \cong T$. Отсюда, поскольку $Z^* \cong Z$, следует, что

$$Z^* \cong T. \tag{6}$$

Далее, поскольку $Z \subset C_{i+1}$,

$$Z^* \subset S_i \subset G_i. \tag{7}$$

Кроме того, по условию

$$G_i \cong T. \tag{8}$$

Так как T – группа первого ранга, то на основании (6), (7), (8) заключаем, что группа S_i изоморфна группе T и, таким образом, в силу (5) имеют место соотношения (4).

Выше было отмечено, что любая сервантная подгруппа первого ранга группы G изоморфна T. Так как C_{i+1} – сервантная подгруппа группы G, то любая ее сервантная подгруппа будет сервантной также в G. Следовательно, любая сервантная подгруппа первого ранга группы C_{i+1} изоморфна группе T. Кроме того, в силу (4) существует гомоморфизм группы C_{i+1} на группу T с ядром C_i. Отсюда в силу 11.1 следует, что C_i является прямым слагаемым группы C_{i+1}, т.е. существует подгруппа T_i группы C_{i+1} такая, что

$$C_{i+1} = C_i \oplus T_i \qquad (i < \gamma,\ C_{i+1} \neq C_i). \tag{9}$$

Соотношения (4) и (9) показывают, что группы T_i и T изоморфны,

$$T_i \cong T \qquad (i < \gamma,\ C_{i+1} \neq C_i). \tag{10}$$

Теперь на основании соотношений (3), (9), (10) заключаем, что группа C разлагается в прямую сумму подгрупп T_i, изоморфных группе T, т.е.

$$C = \bigoplus_{\substack{i<\gamma \\ C_{i+1}\neq C_i}} T_i.$$

Теорема доказана.

§ 12

12.1. Определение. Группа называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой подгрупп первого ранга [5].

Этот параграф посвящен решению следующих двух вопросов:

Обладают ли изоморфными продолжениями любые два прямых разложения вполне разложимой группы?

Является ли каждое прямое слагаемое вполне разложимой группы также вполне разложимой группой?

Эти вопросы тесно связаны друг с другом и легко убедиться в том, что решение одного из них сразу приводит к решению другого.

В настоящем параграфе изложено решение поставленных выше вопросов для счетных групп, для периодических групп и для одного класса несчетных смешанных групп.

12.2. *Пусть H – смешанная абелева группа, максимальная периодическая подгруппа F которой является ее прямым слагаемым. Для того чтобы любые два прямых разложения группы H обладали изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали группа F и факторгруппа H/F.*

Это предложение непосредственно следует из теоремы 10.4.

12.3. Теорема. *Любые два прямых разложения вполне разложимой периодической группы обладают изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G – вполне разложимая периодическая группа. Тогда она обладает разложением в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга.

Пусть

$$G = \bigoplus_{i \in N} C_i \tag{C}$$

– разложение группы G в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга. Как известно [6], неразложимая периодическая группа первого ранга является либо циклической примарной группой, либо квазициклической примарной группой (группой типа p^∞). Пусть $\{C_i\}_{i \in N_1}$ – множество всех циклических прямых слагаемых разложения (C) и $\{C_i\}_{i \in N_2}$ – множество всех квазициклических прямых слагаемых разложения (C). Положим

$$Z = \bigoplus_{i \in N_1} C_i$$

и

$$P = \bigoplus_{i \in N_2} C_i.$$

[5] Отметим, что *группой первого ранга* называется абелева группа, любое конечное множество элементов которой порождает циклическую подгруппу.

[6] См. H. Prüfer [7].

Тогда, очевидно,

$$G = Z \oplus P, \tag{1}$$

причем P является максимальной полной подгруппой группы G, а Z разлагается в прямую сумму циклических подгрупп. Группа P является вполне характеристической подгруппой группы G, поскольку она является максимальной полной ее подгруппой. Поэтому разложение (1) является частично упорядоченным относительно множества всех идемпотентных эндоморфизмов группы G. Известно, что любые два прямых разложения полной периодической группы можно продолжить до разложений в прямую сумму квазициклических подгрупп и любые два разложения полной периодической группы в прямую сумму квазициклических подгрупп изоморфны. Кроме того, любые два прямых разложения группы, являющейся прямой суммой циклических подгрупп, обладают изоморфными продолжениями [7]. Таким образом, любые два разложения как прямого слагаемого Z, так и прямого слагаемого P разложения (1) обладают изоморфными продолжениями. Поэтому на основании 10.3 заключаем, что любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

12.4. Определение. Прямое разложение абелевой группы G,

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

называется ее *каноническим разложением*, если выполняются следующие два условия:

(*a*) любые две ненулевые сервантные подгруппы первого ранга группы G, лежащие в одном и том же прямом слагаемом разложения (D), изоморфны;

(*b*) любые две ненулевые сервантные подгруппы первого ранга группы G, лежащие в различных прямых слагаемых разложения (D), неизоморфны.

Конечно, не всякая абелева группа обладает каноническим разложением, но, например, вполне разложимые группы такими разложениями обладают.

Легко видеть, что каждому разложению вполне разложимой группы в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга естественным образом соответствует каноническое разложение этой группы. Действительно, пусть G – вполне разложимая группа и

$$G = \bigoplus_{i \in N} C_i \tag{C}$$

– ее разложение в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга. Разложению (C) поставим в соответствие прямое разложение

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

[7] См. Л. Я. Куликов [2].

которое получается из разложения (C) путем объединения в одно прямое слагаемое всех изоморфных между собой прямых слагаемых разложения (C). Легко видеть, что разложение (D) удовлетворяет условиям (a), (b) определения 12.4 и поэтому является каноническим разложением группы G. При этом, очевидно, прямое разложение (C) является продолжением разложения (D). Разложение (D) будем называть *каноническим разложением группы* G, *соответствующим прямому разложению* (C).

12.5. *Любое каноническое разложение абелевой группы без кручения является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов этой группы.*

Доказательство. Пусть G – абелева группа без кручения и

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– ее каноническое разложение. Докажем, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G.

Каждому прямому слагаемому D_α разложения (D) поставим в соответствие абелеву группу без кручения первого ранга R_α, обладающую тем свойством, что любая ненулевая сервантная подгруппа первого ранга группы D_α изоморфна группе R_α. Такая группа R_α существует, и, с точностью до изоморфизма, только одна, так как разложение (D), будучи каноническим, удовлетворяет условию (a) определения 12.4.

В множестве индексов M мы следующим образом введем отношение порядка: если i и k – два различных элемента множества M, то полагаем $i < k$ тогда и только тогда, когда существует изоморфное отображение группы R_k в группу R_i, но не существует изоморфного отображения группы R_i в R_k. Так как для всякого $\alpha \in M$ R_α является группой без кручения первого ранга, то легко видеть, что введенное таким образом отношение порядка превращает множество M в частично упорядоченное. Отметим при этом, что элементы i и k полученного таким образом частично упорядоченного множества будут несравнимыми тогда и только тогда, когда ни одна из групп R_i, R_k не может быть изоморфно отображена в другую.

Пусть D_i, D_k – два прямых слагаемых разложения (D), индексы которых удовлетворяют следующему условию: $i < k$ или i несравнимо с k. Докажем, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в D_k. Допустим, что существует нетривиальный гомоморфизм ψ группы D_i в группу D_k. Тогда существует элемент x такой, что $\psi x \neq 0$. Обозначим через C сервантную подгруппу первого ранга группы D_i, содержащую элемент x, и через Z – сервантную подгруппу первого ранга группы D_k, содержащую элемент ψx. Тогда

$$C \cong R_i, \tag{1}$$

$$Z \cong R_k, \tag{2}$$

ибо подгруппы C и Z сервантны в G, поскольку D_i, D_k – прямые слагаемые группы G, и, кроме того, C и Z – ненулевые подгруппы, так как x и ψx –

ненулевые элементы соответственно групп C и Z. Поскольку C – группа без кручения первого ранга и x – отличный от нуля элемент этой группы, то любой элемент группы C можно представить в виде $\frac{r}{s}\,x$, где r и s – целые рациональные числа. Так как ψ – гомоморфизм группы D_i в D_k и D_i, D_k – абелевы группы без кручения, то имеет место равенство

$$\psi\left(\frac{r}{s}\,x\right) = \frac{r}{s}\,\psi x \qquad \left(\frac{r}{s}\,x \in C\right). \tag{3}$$

Кроме того,

$$\frac{r}{s}\,\psi x \in Z \qquad \left(\frac{r}{s}\,x \in C\right), \tag{4}$$

поскольку $\psi x \in Z$ и Z – сервантная подгруппа абелевой группы без кручения D_k. На основании (3) и (4) заключаем, что гомоморфизм ψ индуцирует изоморфное отображение группы C в группу Z. Отсюда, принимая во внимание (1), (2), заключаем, что существует изоморфное отображение группы R_i в группу R_k. Но это невозможно, так как $i < k$ или i несравнимо с k. Этим доказано, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в группу D_k, если $i < k$ или i несравнимо с k, $i, k \in M$. Поэтому на основании 9.4 заключаем, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G.

12.6. Теорема. *Предположим, что абелева группа без кручения G обладает каноническим разложением*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

причем выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1°. *Группа G является счетной.*

2°. *Частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$, где Ω – множество всех идемпотентных эндоморфизмов группы G, удовлетворяет условию минимальности.*

Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\alpha \in M$ изоморфными продолжениями обладали любые два прямых разложения группы D_α.

Доказательство. В силу 12.5 разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G, так как по условию оно является каноническим. Следовательно, разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех идемпотентных эндоморфизмов группы G. Поэтому теорема 12.6 следует из теоремы 10.3.

12.7. *Если абелева группа без кручения разлагается в прямую сумму изоморфных между собой подгрупп первого ранга, то любые два прямых разложения этой группы обладают изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G – абелева группа, разложимая в прямую сумму подгрупп, изоморфных одной и той же группе без кручения первого ранга T. В силу 11.2 каждое прямое слагаемое группы G разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T. Поэтому любые два разложения группы G можно продолжить до разложений группы G в прямую сумму подгрупп, изоморфных T. Но число слагаемых в любом разложении абелевой группы без кручения в прямую сумму подгрупп первого ранга равно рангу этой группы. Поэтому любые два прямых разложения группы G в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T, содержат одинаковое число прямых слагаемых. Следовательно, любые два прямых разложения группы G можно продолжить до разложения в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T, и полученные таким образом продолжения изоморфны.

12.8. *Любые два прямых разложения вполне разложимой счетной абелевой группы без кручения обладают изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G – вполне разложимая счетная абелева группа без кручения и

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

– ее каноническое разложение, соответствующее некоторому разложению группы G в прямую сумму подгрупп первого ранга. (Отметим, что любая группа без кручения первого ранга является неразложимой.) В силу 12.5 каноническое разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G и, следовательно, относительно множества всех идемпотентных эндоморфизмов группы G. Каждое прямое слагаемое D_α разложения (D) является прямой суммой изоморфных между собой подгрупп без кручения первого ранга, следовательно, в силу 12.7 любые два прямых разложения группы D_α, $\alpha \in M$, обладают изоморфными продолжениями. Поэтому на основании теоремы 12.6 заключаем, что любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

12.9. Теорема. *Любые два прямых разложения вполне разложимой счетной группы обладают изоморфными продолжениями.*

Эта теорема непосредственно следует из 12.2, 12.3 и 12.8.

12.10. Теорема. *Любое прямое слагаемое вполне разложимой счетной группы также является вполне разложимой группой.*

12.11. Теорема. *Каждое прямое разложение вполне разложимой счетной группы можно продолжить до разложения в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга, причем любые два таких разложения будут изоморфны.*

Теоремы 12.10 и 12.11 непосредственно следуют из теоремы 12.9.

12.12. *Допустим, что вполне разложимая абелева группа без кручения G удовлетворяет следующему условию:*

(*a*) *существует хотя бы одно каноническое разложение*

$$G = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

соответствующее какому-либо разложению группы G в прямую сумму подгрупп первого ранга, такое, что частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$, где Ω – множество всех идемпотентных эндоморфизмов группы G, удовлетворяет условию минимальности.

Тогда любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

Доказательство. В каноническом разложении (D), поскольку оно соответствует некоторому разложению группы G в прямую сумму подгрупп первого ранга, каждое прямое слагаемое D_α является прямой суммой изоморфных между собой подгрупп первого ранга. Следовательно, в силу 12.7 любые два прямых разложения группы D_α, $\alpha \in M$, обладают изоморфными продолжениями. Кроме того, каноническое разложение (D) удовлетворяет условию 2° теоремы 12.6, поскольку оно удовлетворяет условию (*a*). Поэтому на основании теоремы 12.6 заключаем, что любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

12.13. Теорема. *Пусть H – вполне разложимая смешанная абелева группа и G – факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе. Если факторгруппа G либо является счетной группой, либо удовлетворяет условию* (*a*) *предложения* 12.12, *то любые два прямых разложения группы H обладают изоморфными продолжениями.*

Эта теорема непосредственно следует из 12.2, 12.3, 12.8 и 12.12.

12.14. Теорема. *Пусть H – вполне разложимая смешанная абелева группа и G – факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе. Если факторгруппа G либо является счетной группой, либо удовлетворяет условию* (*a*) *предложения* 12.12, *то всякое прямое разложение группы H можно продолжить до разложения в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга, причем любые два таких разложения будут изоморфны.*

Эта теорема непосредственно следует из предыдущей.

12.15. Теорема. *Пусть H – прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы. Если факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность, то H также является вполне разложимой группой.*

Доказательство. Пусть H – прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы A и

$$A = \bigoplus_{i \in M} C_i \tag{C}$$

– какое-нибудь разложение группы A в прямую сумму подгрупп первого ранга. Предположим, что факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность. Обозначим через $\{C_i\}_{i\in N}$ множество всех тех прямых слагаемых в разложении (C), в которых либо группа H имеет ненулевую компоненту, либо каждый элемент имеет конечный порядок. Положим

$$B = \bigoplus_{i\in N} C_i.$$

Очевидно, B – вполне разложимая абелева группа, содержащая подгруппу H и максимальную периодическую подгруппу группы A. Факторгруппа группы B по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность; это следует из того, что факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность. Кроме того, группа H является прямым слагаемым группы B, поскольку H – подгруппа группы B, являющаяся прямым слагаемым группы A. Отсюда в силу 12.14 следует, что группа H разлагается в прямую сумму подгрупп первого ранга. Теорема доказана.

Частным случаем теоремы 12.15 является

12.16. Теорема. *Любое счетное прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы также является вполне разложимой группой.*

Получена 8/I 1951 г.
Ленинград.

Литература

1. Головин О. Н., *Множители без центров в прямых разложениях групп*, Мат. сб., **6(48):3** (1939), 423–426.

2. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **16(58):2** (1945), 129–162.

3. Курош А. Г., *Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe*, Мат. сб., **1(43):3** (1936), 345–350.

4. Курош А. Г., *Изоморфизмы прямых разложений*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **7:4** (1943), 185–202.

5. Курош А. Г., *Теория групп*, М.; Л.: Гостехиздат, 1944.

6. Baer R., *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. J., **3:1** (1937), 68–122.

7. Prüfer H., *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **17** (1923), 35–61.

8. Fitting H., *Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren*, Math. Z., **39** (1934), 16–30.

9. Fitting H., *Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe*, Math. Z., **41** (1936), 380–395.

Обобщенные примарные группы. I

(Доложено на заседании Общества 20/III 1951 г.) [1]

Введение

Теория абелевых групп является одним из основных разделов общей теории групп.

Полное описание всех конечных абелевых групп было дано еще в прошлом столетии. Изучение бесконечных абелевых групп началось более тридцати лет тому назад, однако и в настоящее время теория их все еще далека от завершения.

Исключительную роль в развитии теории абелевых групп играет теория характеров Л. С. Понтрягина (см. [13], [14]). Из теории характеров, в частности, следует, что каждый новый результат в теории дискретных абелевых групп приводит к новому результату в теории бикомпактных абелевых групп и что задача классификации всех бикомпактных абелевых групп равносильна задаче классификации всех дискретных абелевых групп.

Среди бесконечных дискретных абелевых групп наиболее изученным является класс счетных периодических групп; их теория построена в работах Прюфера [15], Ульма [17] и Ципина [19]. Другим хорошо изученным является класс абелевых групп без кручения конечного ранга. Полное описание этого класса групп при помощи матриц и систем матриц с p-адическими элементами дано в работах А. Г. Куроша [9], А. И. Мальцева [12] и Дэрри [3].

Абелева группа называется *примарной* относительно простого числа p, если порядок всякого ее элемента является степенью числа p. Всякая периодическая абелева группа разлагается, и притом единственным образом, в прямую сумму подгрупп, примарных по отношению к различным простым числам. Поэтому изучение периодических абелевых групп сводится к изучению групп примарных.

Основными в теории счетных примарных абелевых групп являются следующие три теоремы. Первая основная теорема, теорема Прюфера, дает полное описание строения счетных примарных групп без элементов бесконечной высоты:

[1] Часть II (§ 5–12) будет напечатана в томе 2 Трудов Московского математического общества.

Счетная примарная абелева группа без элементов бесконечной высоты разлагается в прямую сумму циклических подгрупп.

Второй основной теоремой является теорема Ульма:

Две счетные редуцированные примарные абелевы группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их соответствующие ульмовские факторы.

Эта теорема утверждает, что счетная редуцированная примарная группа однозначно определяется цепочкой своих ульмовских факторов, т.е. цепочка ульмовских факторов образует полную систему инвариантов этой группы.

Третьей основной теоремой является теорема Ципина, дающая необходимые и достаточные условия существования счетной примарной группы с заданной цепочкой ульмовских факторов.

Эти три теоремы дают полную классификацию всех счетных примарных абелевых групп.

После того как были изучены счетные примарные группы, естественно возникла задача изучения примарных абелевых групп произвольной мощности. Здесь прежде всего необходимо было, во-первых, изучить строение групп без элементов бесконечной высоты как наиболее простых среди примарных; во-вторых, исследовать вопрос о том, образует ли цепочка ульмовских факторов несчетной примарной группы полную систему инвариантов этой группы; в-третьих, найти необходимые и достаточные условия существования примарной группы с заданной цепочкой ульмовских факторов.

Оказалось, что существуют несчетные примарные группы без элементов бесконечной высоты, неразложимые в прямые суммы циклических подгрупп (см. [10], [18]). В работе [7] было изучено строение несчетных примарных групп без элементов бесконечной высоты и дано достаточно полное описание этого класса групп, в частности, были найдены необходимые и достаточные условия разложимости примарной группы в прямую сумму циклических подгрупп.

В работе [7] также было установлено, что существуют примарные группы, для которых цепочка их ульмовских факторов не образует полной системы инвариантов; именно, удалось построить две редуцированные примарные группы различной мощности, обладающие одинаковыми цепочками ульмовских факторов.

В связи с этим возникла задача об отыскании тех классов примарных групп, для которых цепочка их ульмовских факторов образует полную систему инвариантов.

Проблема о существовании примарных абелевых групп с заданной цепочкой ульмовских факторов по-прежнему оставалась одной из основных, поскольку цепочка ульмовских факторов представляет собой важнейшую характеристику примарной группы.

Первоначальной целью настоящей работы было решение именно этой проблемы. Однако при изучении смешанных абелевых групп и групп без кручения мною было замечено, что важную роль играют абелевы группы с кольцами операторов K_p и Z_p, где K_p – кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с данным простым числом p, и Z_p – кольцо целых p-адических чисел. Кроме того, оказалось, что основные понятия и методы теории примарных абелевых групп могут быть с успехом использованы при изучении класса абелевых групп с кольцами операторов K_p и Z_p. Абелевы группы с кольцами операторов K_p и Z_p будем называть *обобщенными примарными группами*.

Всякая примарная (относительно p) группа допускает как кольцо операторов K_p, так и кольцо операторов Z_p (см. § 1); обратно, всякая периодическая абелева группа с кольцом операторов K_p или Z_p является примарной относительно p. Поэтому теория примарных абелевых групп является частью теории обобщенных примарных групп.

Изучению класса обобщенных примарных групп и посвящена настоящая работа, причем бо́льшая ее часть посвящена решению проблемы о существовании примарных групп с заданной последовательностью ульмовских факторов и решению аналогичной проблемы для обобщенных примарных групп.

До настоящего времени все еще очень мало изучены смешанные абелевы группы. Кроме того, дальнейшее построение теории абелевых групп без кручения наталкивается на большие трудности. В связи с этим важно подчеркнуть, что исследуемый в настоящей работе класс абелевых групп с кольцами операторов K_p и Z_p охватывает не только класс примарных (относительно p) групп, но также обширные классы абелевых смешанных групп и групп без кручения и что теория обобщенных примарных групп может быть существенным образом использована при изучении произвольных абелевых групп.

Перейдем к краткому изложению содержания работы.

1. В первом параграфе рассматривается вопрос об условиях, при которых абелева группа допускает кольцо K_p или Z_p в качестве области операторов. Далее исследуется вопрос об условиях, при которых данная подгруппа обобщенной примарной группы является ее допустимой подгруппой.

В этом параграфе рассматривается также вопрос об условиях, при которых изоморфное или гомоморфное отображение одной обобщенной примарной группы на другую является операторным. Установлено, что всякое гомоморфное отображение абелевой группы с кольцом операторов K_p на другую группу с тем же кольцом операторов является операторным. Аналогичное утверждение неверно для любых абелевых групп с кольцом операторов Z_p. В первом параграфе даны только некоторые достаточные условия, при которых отображение одной Z_p-группы на другую является операторным.

Из результатов, полученных в первом параграфе, в частности, следует, что теория примарных групп является частью как теории абелевых групп с кольцом операторов K_p, так и теории абелевых групп с кольцом операторов Z_p.

2. Абелева группа A называется *полной*, если для любого натурального числа n имеет место равенство $nA = A$. Группа называется *редуцированной*, если она не содержит ненулевых полных подгрупп.

Изучению полных обобщенных примарных групп посвящен второй параграф. Их строение полностью описывают следующие теоремы (см. теоремы 2.18 и 2.19).

Полная абелева группа с кольцом операторов Z_p разлагается в прямую сумму квазициклических примарных подгрупп и (допустимых) подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных p-адических чисел.

Полная абелева группа с кольцом операторов K_p разлагается в прямую сумму квазициклических примарных подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел.

Любая обобщенная примарная группа разлагается в прямую сумму максимальной полной подгруппы (которая является допустимой) и некоторой допустимой редуцированной подгруппы. В любых двух прямых разложениях такого рода первые слагаемые совпадают и поэтому вторые слагаемые операторно изоморфны. Отсюда следует, что изучение обобщенных примарных групп, как и в случае примарных групп, в значительной степени сводится к изучению редуцированных групп.

Как известно, всякая абелева группа является подгруппой некоторой полной абелевой группы.

Полную абелеву группу P будем называть *минимальной полной* для G группой, если G – подгруппа группы P и в P нет полных подгрупп, содержащих G и отличных от P.

В настоящей работе понятие минимальной полной группы играет важную роль. Некоторый интерес представляют следующие предложения, на основании которых можно было бы дать другие определения понятия минимальной полной группы.

Полная группа P, содержащая группу G в качестве подгруппы, тогда и только тогда является минимальной полной для G группой, когда пересечение любой ненулевой циклической подгруппы группы P с группой G является ненулевой подгруппой группы G.

Полная группа P, содержащая группу G в качестве подгруппы, тогда и только тогда является минимальной полной для G группой, когда любой элемент простого порядка группы P содержится в G и факторгруппа группы P по подгруппе G является периодической группой.

Значительная часть второго параграфа посвящена доказательству следующих теорем о существовании и единственности минимальной полной группы для заданной обобщенной примарной группы.

Для любой заданной обобщенной примарной группы G существует обобщенная примарная группа $P(G)$ (с тем же кольцом операторов, что и группа G), которая является минимальной полной для G группой и содержит G в качестве допустимой подгруппы. Группа $P(G)$ определяется однозначно с точностью до операторных изоморфизмов, переводящих все элементы группы G в самих себя (см. теоремы 2.30 и 2.32).

3. При изучении примарных групп Прюфером было введено важное понятие сервантной подгруппы, которое можно определить следующим образом. Подгруппа C абелевой группы A называется *сервантной* ее подгруппой, если для любого натурального числа n имеет место равенство $C \cap nA = nC$. В § 3 мы вводим близкое к понятию сервантной подгруппы понятие изотипной подгруппы, определяемое следующим образом.

Подгруппу C обобщенной примарной (по отношению к простому числу p) группы G будем называть *изотипной* подгруппой группы G, если для всякого порядкового числа i имеет место равенство $C \cap p^i G = p^i C$ [2].

Изотипные подгруппы играют важную роль при изучении обобщенных примарных групп, тип которых больше единицы. Доказательству некоторых основных свойств изотипных и сервантных подгрупп посвящена первая половина третьего параграфа.

В третьем параграфе мы также вводим понятие плотной подгруппы редуцированной обобщенной примарной группы, определяемое следующим образом.

Допустимую подгруппу C редуцированной обобщенной примарной (по отношению к простому числу p) группы A мы называем *плотной* подгруппой этой группы, если для всякого порядкового числа i, меньшего $\tau^*(A)$, группа A порождается подгруппами C и $p^i A$.

Доказательству различных свойств изотипных и плотных подгрупп редуцированных обобщенных примарных групп посвящена вторая половина третьего параграфа. Эти свойства используются затем в седьмом, восьмом и девятом параграфах.

4. При изучении примарных и обобщенных примарных групп важную роль играет понятие базисной подгруппы [3], определяемое следующим образом.

Допустимая подгруппа C обобщенной примарной группы G называется *базисной* подгруппой группы G, если она сервантна в G, разложима в прямую сумму (допустимых) циклических подгрупп и факторгруппа группы G по подгруппе C является полной группой.

Мною было доказано [3], что всякая примарная группа имеет хотя бы одну базисную подгруппу [4]. Кроме того, в работе [7] было доказано, что любые две базисные подгруппы одной и той же примарной группы изоморфны.

Доказательству различных свойств базисных подгрупп посвящен четвертый параграф. Первая часть этого параграфа посвящена главным образом доказательству следующих двух теорем.

Всякая обобщенная примарная группа содержит хотя бы одну базисную подгруппу.

Любые две базисные подгруппы одной и той же обобщенной примарной группы изоморфны.

Вторая половина четвертого параграфа посвящена доказательству предложения 4.27, которое будет необходимо в девятом параграфе.

5. В параграфе пятом [5] по существу изложен способ построения по заданным редуцированным обобщенным примарным группам A и A_1 обобщенной

[2] Определение символа $p^i G$ и употребляемого ниже символа $\tau^*(G)$ см. на с. 150–151.

[3] Понятие базисной подгруппы было введено в 1941 г. в работе автора [7]. Там же были доказаны основные свойства базисных подгрупп примарных групп.

[4] Для случая счетных примарных групп этот результат по существу содержится в работе Прюфера [15].

[5] Параграфы 5–12 составляют ч. II этой работы.

примарной группы G, удовлетворяющей условиям

$$G^{\tau(A)} \cong A_1, \qquad G/G^{\tau(A)} \cong A.$$

Полученный здесь результат используется затем в восьмом и девятом параграфах.

6. Одной из основных в теории примарных групп является следующая проблема:

Заданы кардинальное число $\mathfrak{m}$, *порядковое число* τ *и последовательность* $\{A_i\}_{0\leqslant i<\tau}$ *примарных групп без элементов бесконечной высоты. Существует ли редуцированная примарная группа, имеющая мощность* $\mathfrak{m}$, *тип* τ *и последовательность* $\{A_i\}_{0\leqslant i<\tau}$ *в качестве последовательности ульмовских факторов*?

Полное решение этой проблемы дает теорема 10.2 (см. § 10). Теорема Ципина о существовании счетной примарной группы с заданной системой инвариантов является непосредственным следствием этой теоремы.

Аналогичная проблема возникает в теории обобщенных примарных групп [6]:

Заданы кардинальное число $\mathfrak{m}$, *порядковое число* τ *и последовательность* $\{A_i\}_{0\leqslant i<\tau}$ *обобщенных примарных групп* (*с одним и тем же кольцом операторов* K_p *или* Z_p) *без элементов бесконечной высоты. Существует ли редуцированная обобщенная примарная группа* (*с тем же кольцом операторов, что и группы* A_i), *имеющая мощность* $\mathfrak{m}$, *тип* τ *и последовательность* $\{A_i\}_{0\leqslant i<\tau}$ *в качестве последовательности ульмовских факторов*?

Полное решение этой проблемы дает теорема 10.1 (см. § 10). Она дает необходимые и достаточные условия для существования редуцированной обобщенной примарной группы, имеющей заданные мощность, тип и последовательность ульмовских факторов.

Теоремы 10.1 и 10.2 являются центральным результатом настоящей работы.

7. В теореме 10.1 даны необходимые и достаточные условия для существования обобщенной примарной группы с заданной системой инвариантов. Доказательству необходимости указанных в этой теореме условий посвящен шестой параграф. Основную роль в этом доказательстве играет следующая теорема (см. теорему 6.7), дающая оценку сверху мощности редуцированной обобщенной примарной группы:

Мощность редуцированной обобщенной примарной (*по отношению к простому числу* p) *группы* A *не больше, чем* $|A/pA|^{\aleph_0}$ [7].

8. Если редуцированная обобщенная примарная группа H является изотипной и плотной подгруппой обобщенной примарной группы G, то группы H и G имеют один и тот же тип и последовательностью ульмовских факторов группы H служит также последовательность ульмовских факторов для группы G (см. предложение 3.50). В связи с этим важной является задача о построении обобщенной примарной группы, которая содержит заданную редуцированную

[6] Для обобщенной примарной группы последовательность ульмовских факторов определяется так же, как и для примарной группы (см. с. 151).

[7] Символом $|A/pA|$ мы обозначаем мощность факторгруппы группы A по подгруппе pA.

обобщенную примарную группу в качестве изотипной и плотной подгруппы и является максимальной среди обобщенных примарных групп с этим свойством. По существу решению этой задачи для одного класса обобщенных примарных групп посвящена первая половина седьмого параграфа. Основным результатом здесь является теорема 7.2. Эта теорема затем существенным образом используется при доказательстве теорем 10.1 и 10.2.

9. Теорема 10.2 (см. § 10) позволяет решить вопрос о мощности множества всех неизоморфных дискретных абелевых групп, имеющих заданную бесконечную мощность, и вопрос о мощности множества всех неизоморфных бикомпактных групп данной бесконечной мощности. Решению этих вопросов посвящен одиннадцатый параграф.

А. Г. Курошем [10] было доказано, что множество всех неизоморфных групп бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{m}}$.

В § 11 доказано, что уже *мощность множества всех неизоморфных абелевых групп, имеющих заданную бесконечную мощность* $\mathfrak{m}$, *равна* $2^{\mathfrak{m}}$. Далее, в § 11 доказана следующая теорема.

Мощность множества всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп, имеющих мощность $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$, *где* $\mathfrak{n}$ *– произвольное заданное бесконечное кардинальное число, равна* $\mathfrak{m}$.

Как известно, для тех бесконечных кардинальных чисел $\mathfrak{m}$, для которых не существует кардинального числа $\mathfrak{n}$, удовлетворяющего равенству $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$, бикомпактных абелевых групп мощности $\mathfrak{m}$ не существует.

10. Теорема Ульма утверждает, что последовательность ульмовских факторов счетной редуцированной примарной группы является полной системой инвариантов этой группы. Верна ли теорема, аналогичная теореме Ульма, для произвольных несчетных примарных групп? В работе автора [7] было доказано, что теорема, аналогичная теореме Ульма, неверна уже для примарных групп, имеющих мощность континуума; неверна она даже для тех примарных групп континуальной мощности, все ульмовские факторы которых разложимы в прямые суммы циклических подгрупп. Следует при этом отметить, что решение поставленного выше вопроса также легко следует из теоремы 10.2 (см. § 12).

На основании теоремы 10.1 нетрудно убедиться в том, что существуют обобщенные примарные группы, не являющиеся примарными, для которых последовательность их ульмовских факторов не является полной системой инвариантов. В связи с этим естественно возникает задача об отыскании таких классов обобщенных примарных (редуцированных) групп, для которых последовательность их ульмовских факторов является полной системой инвариантов. В § 12 показано, что одним из таких классов является класс нормальных обобщенных примарных групп со счетной системой образующих [8], все ульмовские факторы

[8] Обобщенная примарная группа, имеющая относительно кольца операторов этой группы счетную систему образующих, только тогда будет счетной, когда она является либо примарной, либо группой с кольцом операторов K_p. Всякая же Z_p-группа, имеющая относительно кольца операторов Z_p счетную систему образующих и не являющаяся примарной, имеет мощность континуума.

которых разложимы в прямые суммы операторных циклических подгрупп. При этом понятие нормальной обобщенной примарной группы определяется следующим образом.

Обобщенная примарная группа H называется *нормальной*, если для всякой ее допустимой подгруппы E, имеющей конечное число образующих[9], множество порядковых чисел i, для которых $E \cap H^i \neq E \cap H^{i+1}$, является конечным. Так, например, всякая обобщенная примарная группа, имеющая конечный тип, будет нормальной. Любая примарная группа, очевидно, также является нормальной.

Основным содержанием § 12 является доказательство следующей теоремы, обобщающей теорему Ульма.

Пусть H и G – нормальные обобщенные примарные группы (*с одним и тем же кольцом операторов*), *каждая из которых имеет счетное число образующих*[9] *и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы циклических подгрупп. Для того чтобы группы H и G были операторно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

$$(a) \qquad \tau(H) = \tau(G),$$

$$(b) \qquad H^i/H^{i+1} \cong G^i/G^{i+1} \qquad (i < \tau(H)),$$

(c) *группы $H^{\tau(H)}$ и $G^{\tau(G)}$ операторно изоморфны.*

Эта теорема дает полное описание класса обобщенных примарных групп, удовлетворяющих трем условиям: 1) условию нормальности, 2) условию о счетности числа образующих[9], 3) условию о разложимости ульмовских факторов в прямые суммы циклических подгрупп. Естественно возникает вопрос: нельзя ли усилить эту теорему, отказавшись хотя бы от одного из этих трех условий?

Оказывается, что нельзя отказаться от условия о счетности систем образующих[9], так как среди редуцированных примарных (и, значит, нормальных) групп, ульмовские факторы которых разложимы в прямые суммы циклических подгрупп, существуют группы (континуальной мощности), для которых последовательность их ульмовских факторов не является полной системой инвариантов.

Далее, нельзя отказаться от условия нормальности, так как среди редуцированных обобщенных примарных групп со счетными системами образующих[9], имеющих ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы циклических подгрупп, существуют группы, для которых последовательность их ульмовских факторов не является полной системой инвариантов.

Будет ли верна приведенная выше теорема, если отказаться от условия о разложимости ульмовских факторов в прямые суммы операторных циклических подгрупп? Этот вопрос остается нерешенным.

В заключение отметим следующее. Всякая Z_p-группа без кручения, обладающая относительно кольца Z_p счетной системой образующих, разлагается в

[9] Относительно кольца операторов группы.

прямую сумму подгрупп первого ранга[10]. В частности, всякая Z_p-группа без кручения, не содержащая элементов бесконечной высоты и имеющая счетную систему образующих относительно кольца Z_p, разложима в прямую сумму циклических подгрупп. Отсюда следует, что смешанная Z_p-группа, обладающая счетной системой образующих относительно кольца операторов Z_p и не содержащая элементов бесконечной высоты, разложима в прямую сумму циклических подгрупп, если максимальная периодическая подгруппа этой группы является ее прямым слагаемым. Аналогичные утверждения для K_p-групп неверны, так как существуют K_p-группы без кручения любого конечного ранга, неразложимые в прямую сумму своих подгрупп[11]. Поэтому можно утверждать, что Z_p-группы имеют более простое строение, чем K_p-группы.

11. Всюду в дальнейшем целесообразно предполагать, что кольцо Z_p целых p-адических чисел является расширением кольца K_p, так как тогда кольцо K_p будет подкольцом кольца Z_p. Это предположение дает возможность рассматривать всякую абелеву группу с кольцом операторов Z_p одновременно как группу с кольцом операторов K_p.

Обозначения

Так как в работе рассматриваются только абелевы группы, то мы всюду будем пользоваться аддитивной записью. Групповая операция обозначается знаком $+$, нулевой элемент группы обозначается символом 0 или $0(G)$. Символом G/H обозначается факторгруппа группы G по подгруппе H.

Если A, B, C, … суть подмножества группы G, то символом $[A, B, C, \dots]$ будем обозначать наименьшую подгруппу группы G, содержащую множества A, B, C, … Если G – операторная группа, то этим символом будем обозначать наименьшую допустимую подгруппу группы G. В частности, если a – элемент группы G, то наименьшую подгруппу (допустимую, если G – операторная группа) группы G, содержащую элемент a, будем обозначать символом $[a]$ и называть циклической подгруппой группы G, порожденной элементом a.

Если G – абелева группа и n – целое число, то символ nG обозначает подгруппу группы G, состоящую из элементов nx, где $x \in G$. Через $G[n]$ будем обозначать подгруппу группы G, состоящую из элементов x группы G, для которых $nx = 0$.

Если G – абелева группа, p – простое число и α – порядковое число, то символом $p^\alpha G$ обозначается подгруппа группы G, определяемая индуктивно посредством следующих равенств:

$$p^0G = G,$$
$$p^\alpha G = p(p^{\alpha-1}G), \text{ если } \alpha \text{ – изолированное число,}$$
$$p^\alpha G = \bigcap_{\beta<\alpha} p^\beta G, \text{ если } \alpha \text{ – предельное число.}$$

[10] Всякая группа без кручения первого ранга изоморфна либо аддитивной группе целых p-адических чисел (циклическая Z_p-группа), либо аддитивной группе рациональных p-адических чисел.

[11] Утверждения, перечисленные в этом абзаце, в настоящей работе не доказываются.

Символ $W(\alpha)$ обозначает множество порядковых чисел, меньших α. Через ω будем обозначать первое бесконечное предельное порядковое число.

Если G – обобщенная примарная группа и α – порядковое число, то символом G^α обозначается подгруппа группы G, определяемая индуктивно посредством следующих равенств:

$$G^0 = G,$$
$$G^\alpha = \bigcap_{n<\omega} p^n G^{\alpha-1}, \text{ если } \alpha \text{ – изолированное число},$$
$$G^\alpha = \bigcap_{i<\alpha} G^i, \text{ если } \alpha \text{ – предельное число.}$$

Из этого определения следует, что $G^\alpha = p^{\omega\alpha}G$.

Наименьшее порядковое число τ, для которого $G^\tau = G^{\tau+1}$, называют *типом* группы G и обозначают через $\tau(G)$. Символ $\tau^*(G)$ будет обозначать наименьшее порядковое число τ^*, для которого имеет место равенство $p^{\tau^*}G = p^{\tau^*+1}G$. Факторгруппы $G_\alpha = G^\alpha/G^{\alpha+1}$ называются *ульмовскими факторами* группы G и их совокупность $\{G_\alpha\}_{0\leqslant\alpha<\tau(G)}$ называется *последовательностью ульмовских факторов* группы G. Последовательность $\{A_i\}_{i<\tau(G)}$ обобщенных примарных групп A_i (с тем же кольцом операторов, что и группа G) также будем называть последовательностью ульмовских факторов группы G, если $A_i \cong G_i$ для всякого $i < \tau(G)$.

Через $|G|$ будем обозначать мощность группы или множества G.

Если $\{A_i\}_{i\in M}$ есть множество групп (M – множество индексов), то символом $\bigoplus_{i\in M} A_i$ будем обозначать прямую сумму групп, входящих в это множество. Прямую сумму конечного множества групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будем обозначать также символом $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$.

§ 1. Условия, при которых абелева группа допускает кольцо операторов K_p. Допустимые подгруппы и операторные гомоморфизмы

Пусть G есть абелева группа и K – кольцо, обладающее единичным элементом 1. Говорят, что группа G является группой с кольцом операторов K, если для каждого элемента $a \in G$ и для всякого элемента $k \in K$ определено произведение $ka \in G$, причем выполняются следующие условия:

$$(S_1) \qquad k(a+b) = ka + kb,$$
$$(S_2) \qquad (k+k_1)a = ka + k_1a,$$
$$(S_3) \qquad (kk_1)a = k(k_1a),$$
$$(S_4) \qquad 1 \cdot a = a,$$

где $k, k_1 \in K$ и $a, b \in G$. Подгруппа H группы G называется *допустимой подгруппой* группы G (относительно кольца операторов K), если для всякого элемента $x \in H$ и любого $k \in K$ элемент kx принадлежит подгруппе H.

Пусть G и A – группы с кольцом операторов K. Гомоморфное отображение φ группы G в A, при котором для всякого $a \in G$ и каждого $k \in K$ имеет место равенство $\varphi(ka) = k\varphi(a)$, называется *операторным гомоморфизмом.* Если при этом гомоморфизм является взаимно однозначным, то отображение φ называется *операторным изоморфизмом.* Отметим при этом, что если H – допустимая подгруппа операторной группы G, то естественный гомоморфизм группы G на факторгруппу G/H является операторным гомоморфизмом.

Кольцо тех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с простым числом p, будем обозначать через K_p. Символом Z_p будем обозначать кольцо целых p-адических чисел.

1.1. Определение. *Обобщенной примарной* (по отношению к простому числу p) группой будем называть абелеву группу с кольцом операторов K_p или с кольцом операторов Z_p.

Если H – допустимая подгруппа обобщенной примарной группы G, то мы определяем произведение числа k, принадлежащего кольцу операторов группы G, на элемент $a + H$ факторгруппы G/H посредством равенства

$$k(a + H) = ka + H,$$

и, таким образом, факторгруппа G/H становится группой с тем же кольцом операторов, что и группа G, так как условия $(S_1) - (S_4)$ будут, очевидно, выполняться. Поэтому всюду в дальнейшем факторгруппу обобщенной примарной группы по допустимой подгруппе будем рассматривать также как обобщенную примарную группу с тем же кольцом операторов, что и исходная группа.

Если $\{H_i\}_{i \in M}$ – множество обобщенных примарных групп с одним и тем же кольцом операторов и G – их прямая сумма, $G = \bigoplus\limits_{i \in M} H_i$, то группу G мы также будем рассматривать как обобщенную примарную группу (с тем же кольцом операторов, что и группы H_i), причем произведение любого элемента $x \in G$,

$$x = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n} \qquad (x_{i_t} \in H_{i_t}),$$

на любое число k, принадлежащее кольцу операторов, определим при помощи равенства

$$kx = kx_{i_1} + kx_{i_2} + \ldots + kx_{i_n}.$$

Допустимыми подгруппами аддитивной группы кольца K_p с кольцом операторов K_p являются идеалы этого кольца. Легко видеть, что любой ненулевой идеал кольца K_p имеет вид $p^n K_p$, где n – натуральное число или нуль. Аналогично, допустимыми подгруппами аддитивной группы кольца Z_p с кольцом операторов Z_p являются идеалы этого кольца. Ненулевые идеалы кольца Z_p имеют вид $p^n Z_p$, где n – любое натуральное число или нуль.

Обобщенную примарную группу C будем называть *циклической обобщенной примарной группой*, если существует элемент $a \in C$ такой, что все элементы группы C кратны a, т.е. имеют вид ka, где k – любой элемент кольца операторов группы C.

1.2. *Циклическая обобщенная примарная* (*относительно* p) *группа либо бесконечна и изоморфна аддитивной группе кольца операторов*, *либо конечна и является циклической примарной* (*относительно* p) *группой.*

Доказательство. Пусть C – циклическая операторная группа с кольцом операторов Z_p и g – образующий элемент этой группы. Тогда C состоит из элементов kg, где $k \in Z_p$. Отображение, ставящее в соответствие элементу $k \in Z_p$ элемент kg группы C, является гомоморфизмом аддитивной группы кольца Z_p на группу C. Легко видеть, что ядром этого гомоморфизма является идеал кольца Z_p. Если этот идеал содержит только нулевой элемент кольца Z_p, то, очевидно, гомоморфизм будет изоморфизмом и группа C будет изоморфна аддитивной группе кольца Z_p. Если же ядро гомоморфизма есть ненулевой идеал, то ядром будет идеал $p^n Z_p$, где n – натуральное число или нуль, и в этом случае группа C изоморфна факторгруппе аддитивной группы кольца Z_p по подгруппе $p^n Z_p$, т.е. C является циклической группой порядка p^n.

Совершенно так же проводится доказательство и в том случае, когда C является циклической группой с кольцом операторов K_p.

1.3. *Любая периодическая подгруппа обобщенной примарной относительно p группы является примарной относительно p группой.*

Доказательство. Пусть A – группа с кольцом операторов K_p и B – ее периодическая подгруппа. Покажем, что любой ненулевой элемент $x \in B$ имеет порядком степень простого числа p. Множество I чисел $k \in K_p$, для которых $kx = 0$, является идеалом кольца K_p. Так как x – элемент конечного порядка, то I не может быть нулевым идеалом. Поэтому $I = p^n K_p$, где n – натуральное число. Отсюда следует, что $p^n \in I$ и, значит, $p^n x = 0$. Равенство $p^n x = 0$ показывает, что порядком элемента x является степень простого числа p. Этим доказано, что B является примарной по отношению к простому числу p группой.

Совершенно так же протекает доказательство и в том случае, когда A – группа с кольцом операторов Z_p.

1.4. *Пусть G – примарная относительно p группа и m – целое рациональное число, взаимно простое с p. Тогда для любого заданного элемента $h \in G$ уравнение*

$$mx = h \tag{1}$$

имеет одно и только одно решение в G.

Доказательство. 1°. Докажем, что уравнение (1) имеет в G хотя бы одно решение. Если h – нулевой элемент, то, очевидно, нулевой элемент будет решением уравнения (1). Поэтому мы будем предполагать, что h – ненулевой элемент. Пусть p^l – порядок элемента h. Так как по условию m взаимно просто с p, то существуют целые числа r и s, удовлетворяющие равенству

$$rm + sp^l = 1. \tag{2}$$

Легко видеть, что элемент rh является решением уравнения (1). Действительно, используя (2), имеем

$$m(rh) = mr \cdot h = (1 - sp^l)h = h - s(p^l h).$$

Но $p^l h = 0$, так как p^l – порядок элемента h, следовательно, $m(rh) = h$, т.е. элемент rh является решением уравнения (1).

2°. Докажем, что уравнение (1) имеет не больше одного решения. Если $mx_1 = h$ и $mx_2 = h$, где x_1, $x_2 \in G$, то

$$m(x_1 - x_2) = 0. \tag{3}$$

Если мы предположим, что $x_1 - x_2 \neq 0$, то в силу (3) число m должно делиться на порядок элемента $x_1 - x_2$. Но это невозможно, так как m взаимно просто с p, а $x_1 - x_2$, будучи элементом примарной группы G, имеет своим порядком степень простого числа p. Следовательно, $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = x_2$.

Таким образом, уравнение (1) имеет в G одно и только одно решение.

1.5. Теорема. *Для того чтобы абелева группа G допускала кольцо K_p в качестве области операторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(*a*) *Для заданных элемента $h \in G$ и целого рационального числа m, взаимно простого с p, уравнение*

$$mx = h \tag{1}$$

имеет в G одно и только одно решение. Если условие (*a*) *выполняется, то группа G становится группой с кольцом операторов K_p только при следующем определении умножения элементов группы G на числа кольца K_p: произведением числа $\frac{n}{m} \in K_p$, $(m, p) = 1$, на элемент $g \in G$ называется элемент группы G, удовлетворяющий уравнению $mx = ng$.*

Доказательство. 1°. Легко видеть, что условие (*a*) является необходимым. Действительно, если G – группа с кольцом операторов K_p и $h \in G$, то $\frac{1}{m}h \in G$, так как $\frac{1}{m} \in K_p$ для всякого целого рационального числа m, взаимно простого с p. Элемент $\frac{1}{m}h$ удовлетворяет, очевидно, уравнению (1). С другой стороны, в G нет элементов, отличных от $\frac{1}{m}h$, удовлетворяющих уравнению (1), так как, умножая обе части уравнения (1) на число $\frac{1}{m}$, получим $x = \frac{1}{m}h$.

2°. Предположим, что группа G удовлетворяет условию (*a*). Тогда легко видеть, что она обладает следующим свойством.

(*c*) *Из равенства $ma = mb$, где a, $b \in G$ и m – целое рациональное число, взаимно простое с p, всегда следует равенство $a = b$.*

Действительно, если $ma = mb$, то $m(a - b) = 0$, откуда, так как условие (*a*) выполняется, следует, что $a - b = 0$, т.е. $a = b$.

3°. Докажем достаточность условия. Предположим, что группа G удовлетворяет условию (*a*). Умножение элементов группы G на числа кольца K_p определяем следующим образом: произведением числа $\frac{n}{m} \in K_p$, где n, m – целые числа, причем m – взаимно простое с p, на элемент $g \in G$ называется элемент x группы G, удовлетворяющий равенству $ng = mx$. Так как условие (*a*) выполняется, то такой элемент в G существует, и только один.

Докажем, что при таком определении умножения элементов группы G на числа кольца K_p группа G становится группой с кольцом операторов K_p, т.е. выполняются следующие условия:

$$(S_1) \qquad \tfrac{n}{m}(g+h) = \tfrac{n}{m}g + \tfrac{n}{m}h,$$

$$(S_2) \qquad \left(\tfrac{n}{m} + \tfrac{n_1}{m_1}\right) g = \tfrac{n}{m}g + \tfrac{n_1}{m_1}g,$$

$$(S_3) \qquad \left(\tfrac{n}{m} \cdot \tfrac{n_1}{m_1}\right) g = \tfrac{n}{m}\left(\tfrac{n_1}{m_1}g\right),$$

$$(S_4) \qquad 1 \cdot g = g,$$

где g, $h \in G$ и $\frac{n}{m}$, $\frac{n_1}{m_1} \in K_p$, причем числа m и m_1 взаимно просты с p.

Введем следующие обозначения:

$$\tfrac{n}{m}g = x, \qquad \tfrac{n}{m}h = y, \qquad \tfrac{n}{m}(g+h) = z, \qquad \tfrac{n_1}{m_1}g = t,$$

$$\left(\tfrac{n}{m} + \tfrac{n_1}{m_1}\right) g = u, \qquad \left(\tfrac{n}{m} \cdot \tfrac{n_1}{m_1}\right) g = v, \qquad \tfrac{n}{m}\left(\tfrac{n_1}{m_1}g\right) = w.$$

Тогда согласно определению умножения имеют место равенства

$$ng = mx, \tag{2}$$

$$nh = my, \tag{3}$$

$$n(g+h) = mz, \tag{4}$$

$$n_1 g = m_1 t, \tag{5}$$

$$(nm_1 + mn_1)g = mm_1 u, \tag{6}$$

$$nn_1 g = mm_1 v, \tag{7}$$

$$nt = mw. \tag{8}$$

Складывая равенства (2) и (3), получим $n(g+h) = m(x+y)$, откуда в силу (4) $mz = m(x+y)$. Отсюда на основании свойства (c) заключаем, что $z = x+y$, т.е. $\frac{n}{m}(g+h) = \frac{n}{m}g + \frac{n}{m}h$, и, таким образом, выполняется условие (S_1).

Умножая равенства (2) и (5) соответственно на m_1 и m и затем складывая их, получим равенство $(nm_1+mn_1)g = mm_1(x+t)$, которое совместно с (6) дает равенство $mm_1u = mm_1(x+t)$. Отсюда на основании свойства (c) заключаем, что $u = x+t$, т.е. $\left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right) g = \frac{n}{m}g + \frac{n_1}{m_1}g$, и, таким образом, выполняется условие (S_2).

Далее, умножая равенство (5) на n и принимая во внимание (8), имеем $nn_1g = m_1nt = mm_1w$. Отсюда в силу (7) получим $mm_1v = mm_1w$. Из этого равенства согласно свойству (c) следует равенство $v = w$, т.е.

$$\left(\tfrac{n}{m} \cdot \tfrac{n_1}{m_1}\right) g = \tfrac{n}{m}\left(\tfrac{n_1}{m_1}g\right),$$

и, таким образом, выполняется условие (S_3).

Наконец, условие (S_4), очевидно, также выполняется.

Таким образом, доказано, что введенное выше умножение элементов группы G на числа кольца K_p превращает G в группу с кольцом операторов K_p.

4°. Пусть G – группа с кольцом операторов K_p. Если $\frac{n}{m}g$ есть произведение числа $\frac{n}{m} \in K_p$, $(m,p)=1$, на элемент $g \in G$ в этой операторной группе, то легко видеть, что $m\left(\frac{n}{m}g\right) = \left(m \cdot \frac{n}{m}\right) g = ng$, т.е. произведение $\frac{n}{m}g$ является элементом, удовлетворяющим уравнению $mx = ng$. Отсюда следует, что в группе, допускающей кольцо K_p в качестве области операторов, нельзя ввести умножение элементов группы на числа кольца K_p каким-либо другим способом, отличным от способа, указанного в теореме. Теорема доказана.

1.6. Теорема. *Для того чтобы абелева группа G допускала кольцо K_p в качестве области операторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

(a) *Равенство $mG = G$ имеет место для любого целого рационального числа m, взаимно простого с p.*

(b) *Каждый элемент конечного порядка группы G имеет порядком степень простого числа p.*

Доказательство. 1°. Докажем необходимость условий. Пусть G – группа с кольцом операторов K_p и m – целое рациональное число, взаимно простое с p. Тогда $\frac{1}{m} \in K_p$ и, следовательно, если $g \in G$, то и $\frac{1}{m}g \in G$. Так как $g = m\left(\frac{1}{m}g\right)$ для всякого $g \in G$, то $G \subset mG$ и поэтому $mG = G$. Таким образом, выполняется условие (a).

В силу предложения 1.3 каждый элемент конечного порядка группы G имеет порядком степень простого числа p, т.е. выполняется условие (b).

2°. Докажем достаточность условий. Предположим, что G удовлетворяет условиям (a), (b) теоремы, и покажем, что уравнение

$$mx = h, \tag{1}$$

где $h \in G$ и m – целое рациональное число, взаимно простое с p, имеет одно и только одно решение в G. Из условия (a) следует, что существует элемент, удовлетворяющий уравнению (1). Кроме того, такой элемент существует только один, ибо если $mx_1 = h$ и $mx_2 = h$, то $m(x_1 - x_2) = 0$. Из этого равенства, поскольку m взаимно просто с p и G удовлетворяет условию (b), следует, что $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = x_2$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (a) теоремы 1.5 и поэтому допускает кольцо K_p в качестве области операторов. Теорема 1.6 доказана.

Отметим, что класс абелевых групп, допускающих кольцо операторов Z_p, является частью класса абелевых групп, допускающих кольцо операторов K_p, поскольку K_p можно считать подкольцом кольца Z_p.

1.7. Теорема. *Абелева периодическая группа с кольцом операторов K_p является примарной по отношению к простому числу p. Обратно, любая примарная по отношению к простому числу p группа допускает кольцо K_p в качестве области операторов.*

Доказательство. Первая часть теоремы следует из предложения 1.3. Вторая часть теоремы непосредственно следует из предложения 1.4 и теоремы 1.5.

Вполне характеристической подгруппой группы G называется подгруппа, отображающаяся в себя при любом эндоморфизме группы G. Другими словами, подгруппа группы G называется вполне характеристической ее подгруппой, если она является допустимой относительно множества всех эндоморфизмов группы G.

1.8. *Пусть G – абелева группа, n – целое рациональное число, p – простое число и α – любое порядковое число. Группы $G[n]$, nG, $p^\alpha G$, G^α являются вполне характеристическими подгруппами группы G.*

Доказательство. 1°. Докажем, что для любого эндоморфизма φ группы G имеет место соотношение

$$\varphi x \in G[n] \qquad (x \in G[n]). \tag{1}$$

Этим будет доказано, что $G[n]$ – вполне характеристическая подгруппа группы G. Поскольку φ – эндоморфизм группы G,

$$n(\varphi x) = \varphi(nx). \tag{2}$$

Кроме того, согласно определению группы $G[n]$

$$nx = 0 \qquad (x \in G[n]). \tag{3}$$

На основании (2) и (3) заключаем, что

$$n(\varphi x) = 0 \qquad (x \in G[n]),$$

откуда следует (1).

2°. Докажем, что nG является вполне характеристической подгруппой группы G, т.е. соотношение

$$\varphi x \in nG \qquad (x \in nG) \tag{4}$$

имеет место для всякого эндоморфизма φ группы G. Поскольку $x \in nG$, существует элемент y, удовлетворяющий равенству

$$x = ny.$$

Из этого равенства, поскольку φ – эндоморфизм группы, следует равенство

$$\varphi x = n(\varphi y),$$

из которого следует соотношение (4).

3°. Докажем, что для всякого порядкового числа α подгруппа $p^\alpha G$ является вполне характеристической подгруппой группы G. Если α – конечное порядковое число, то это утверждение имеет место в силу предложения, доказанного в пункте 2°. Допустим, что это утверждение верно всякий раз, когда $\alpha < \beta$, где β – порядковое число, отличное от нуля, и докажем, что тогда оно верно и при $\alpha = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число. Докажем, что соотношение

$$\varphi x \in p^\beta G \qquad (x \in p^\beta G) \tag{5}$$

имеет место для всякого эндоморфизма φ группы G. Так как $x \in p^\beta G$, то существует элемент $y \in p^{\beta-1}G$, удовлетворяющий равенству

$$x = py.$$

Из этого равенства, поскольку φ – эндоморфизм группы G, следует равенство

$$\varphi x = p(\varphi y). \tag{6}$$

Так как $y \in p^{\beta-1}G$, то по индуктивному предположению

$$\varphi y \in p^{\beta-1}G. \tag{7}$$

На основании (7) заключаем, что $p(\varphi y) \in p^\beta G$, откуда в силу (6) получим (5). Таким образом, $p^\beta G$ является вполне характеристической подгруппой группы G.

2-й случай: β – предельное число. В этом случае

$$p^\beta G = \bigcap_{\alpha<\beta} p^\alpha G.$$

По индуктивному предположению $p^\alpha G$ является вполне характеристической подгруппой группы G для всякого $\alpha < \beta$. Таким образом, подгруппа $p^\beta G$ есть пересечение вполне характеристических подгрупп группы G и, следовательно, сама является вполне характеристической подгруппой группы G.

4°. Так как $G^\alpha = p^{\omega\alpha}G$ и $p^{\omega\alpha}G$ по доказанному в пункте 3° является допустимой подгруппой группы G, то G^α также является вполне характеристической подгруппой группы G.

1.9. *Пусть G – обобщенная примарная* (*относительно p*) *группа. Для всякого целого рационального числа n и любого порядкового числа α группы $G[n]$, nG, $p^\alpha G$, G^α являются допустимыми подгруппами группы G.*

Это предложение непосредственно следует из предложения 1.8.

1.10. *Пусть G – группа с кольцом операторов K_p. Для того чтобы подгруппа H этой группы была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$mH = H \tag{1}$$

имело место для любого целого рационального числа m, взаимно простого с p.

Доказательство. 1°. Докажем необходимость условия. Пусть H – допустимая подгруппа группы G, h – элемент из H и m – целое рациональное число, взаимно простое с p. Так как, очевидно, $\frac{1}{m} \in K_p$ и H – допустимая подгруппа, то $h = m\left(\frac{1}{m}h\right)$ и $\frac{1}{m}h \in H$. Отсюда следует, что $h \in mH$. Этим доказано, что $mH \supset H$, откуда следует равенство (1).

2°. Докажем достаточность условия. Пусть H – подгруппа группы G, удовлетворяющая равенству (1) при всяком целом рациональном m, взаимно простом с p. Пусть, далее, $h \in H$ и $k \in K_p$. Надо доказать, что элемент kh группы G принадлежит H. Представим число k в виде $k = \frac{n}{m}$, где n и m – целые числа и m – взаимно простое с p. Так как $h \in H$ и $mH = H$, то существует элемент $h_1 \in H$, удовлетворяющий равенству

$$h = mh_1. \tag{2}$$

Поскольку m взаимно просто с p, $\frac{1}{m} \in K_p$. Следовательно, из (2) получаем равенство $\frac{1}{m}h = h_1$, так как G – операторная группа. Таким образом, $\frac{1}{m}h \in H$, откуда $n\left(\frac{1}{m}h\right) \in H$. Но $n\left(\frac{1}{m}h\right) = \frac{n}{m}h = kh$, следовательно, $kh \in H$.

1.11. *Пусть G – группа с кольцом операторов Z_p (целых p-адических чисел). Для того чтобы подгруппа H этой группы была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$mH = H \tag{1}$$

имело место для любого целого p-адического числа m, взаимно простого с p.

Доказательство. 1°. Необходимость условия доказывается так же, как и в предыдущем предложении.

2°. Докажем достаточность условия. Пусть k – целое p-адическое число и h – элемент подгруппы H. Надо показать, что $kh \in H$. Число k можно представить в виде

$$k = p^s m,$$

где m – целое p-адическое число, взаимно простое с p, и s – целое неотрицательное рациональное число. В силу (1) $mh \in H$. Отсюда следует, что $p^s(mh) \in H$. Но $p^s(mh) = (p^s m)h = kh$, так как G – операторная группа. Следовательно, $kh \in H$. Таким образом, H является допустимой подгруппой группы G.

1.12. *Если G – обобщенная примарная относительно p группа, то равенство*

$$mG = G$$

имеет место для любого целого рационального числа m, взаимно простого с p.

Это предложение непосредственно следует из предложений 1.10 и 1.11.

1.13. *Если H – примарная относительно p группа, то равенство $mH = H$ имеет место для любого целого рационального числа m, взаимно простого с p.*

Это предложение непосредственно следует из предложения 1.4.

1.14. *Любая периодическая подгруппа обобщенной примарной группы является ее допустимой подгруппой.*

Доказательство. 1°. Для абелевых групп с кольцом операторов K_p это предложение непосредственно следует из предложений 1.3, 1.13 и 1.10.

2°. Докажем, что это предложение имеет место также для групп с кольцом операторов Z_p. Пусть G – абелева группа с кольцом операторов Z_p и H – ее периодическая подгруппа. Покажем, что H – допустимая подгруппа группы G, т.е. имеет место соотношение

$$kh \in H \qquad (h \in H,\, k \in Z_p). \tag{1}$$

В силу 1.3 H является примарной по отношению к простому числу p. Обозначим через p^s порядок элемента h и представим число k в виде

$$k = n + mp^s, \tag{2}$$

где n – целое рациональное число и m – целое p-адическое число. Так как G – группа с кольцом операторов Z_p, то в силу (2)

$$kh = nh + m(p^s h),$$

откуда, поскольку $p^s h = 0$, следует, что

$$kh = nh. \tag{3}$$

Из того, что n – целое рациональное число и $h \in H$, следует, что $nh \in H$. Отсюда, принимая во внимание (3), получим соотношение (1), т.е. H является допустимой подгруппой группы G.

Абелева группа G называется *полной*, если равенство $nG = G$ имеет место для любого натурального числа n.

1.15. *Любая полная подгруппа абелевой группы с кольцом операторов K_p является допустимой ее подгруппой.*

Это предложение непосредственно следует из определения полной группы и предложения 1.10.

Подгруппа C абелевой группы G называется *сервантной* подгруппой группы G, если для любого натурального числа n имеет место равенство $nC = C \cap nG$.

1.16. *Сервантная подгруппа абелевой группы с кольцом операторов K_p является допустимой ее подгруппой.*

Доказательство. Пусть G – группа с кольцом операторов K_p, C – сервантная ее подгруппа и m – натуральное число, взаимно простое с p. Докажем, что $mC = C$. Из определения сервантной подгруппы следует, что $mC = C \cap mG$. Кроме того, в силу предложения 1.12 $mG = G$. Поэтому $mC = C \cap G = C$, т.е. $mC = C$. Отсюда в силу предложения 1.10 следует, что C является допустимой подгруппой группы G.

1.17. *Прямое слагаемое абелевой группы с кольцом операторов K_p является ее допустимой подгруппой.*

Доказательство. Пусть G – абелева группа с кольцом операторов K_p и H – прямое слагаемое группы G:

$$G = H \oplus B. \tag{1}$$

Пусть m – целое рациональное число, взаимно простое с p. Легко видеть, что из (1) следует равенство

$$mG = mH \oplus mB.$$

Но в силу предложения 1.12 $mG = G$, следовательно,

$$G = mH \oplus mB. \tag{2}$$

Так как $mB \subset B$ и $mH \subset H$, то на основании (1) и (2) заключаем, что $mB = B$ и $mH = H$, откуда в силу 1.10 следует, что H является допустимой подгруппой группы G.

1.18. *Если подгруппа H абелевой группы P и факторгруппа P/H допускают кольцо K_p в качестве области операторов, то можно определить умножение элементов группы P на числа кольца K_p так, что оно превращает P в группу с кольцом операторов K_p, в которой H будет допустимой подгруппой.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа H и факторгруппа P/H допускают кольцо K_p в качестве области операторов. Докажем, что тогда группа P также допускает кольцо K_p в качестве области операторов.

1°. Докажем, что для любого целого рационального числа m, взаимно простого с p, имеет место равенство

$$mP = P. \tag{1}$$

Так как по предположению группы H и $\overline{P}$, $\overline{P} = P/H$, допускают кольцо K_p в качестве области операторов, то на основании теоремы 1.6 имеют место равенства

$$m\overline{P} = \overline{P}, \tag{2}$$

$$mH = H. \tag{3}$$

Пусть $g \in P$ и $\bar{g} = g + H$. В силу (2) существует элемент $\bar{x} \in \overline{P}$ такой, что

$$m\bar{x} = \bar{g}. \tag{4}$$

Пусть x – какой-либо элемент группы P, принадлежащий к классу смежности $\bar{x}$, $\bar{x} = x + H$. Тогда согласно (4)

$$mx = g + h, \qquad \text{где } h \in H. \tag{5}$$

В силу (3) существует элемент $y \in H$, удовлетворяющий равенству

$$my = h. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует равенство $g = m(x - y)$, которое показывает, что $g \in mP$. Этим доказано, что $mP \supset P$, откуда следует равенство (1).

2°. Так как по предположению подгруппа H и факторгруппа P/H допускают кольцо K_p в качестве области операторов, то в силу теоремы 1.6 каждый элемент конечного порядка как подгруппы H, так и факторгруппы P/H имеет порядком степень простого числа p. Отсюда следует, что каждый элемент конечного порядка группы P имеет порядком степень простого числа p.

3°. В пунктах 1°, 2° было показано, что группа P удовлетворяет условиям (a), (b) теоремы 1.6. Поэтому заключаем, что группа P допускает кольцо K_p в качестве области операторов. Следовательно, согласно теореме 1.5 можно одним и только одним способом определить умножение элементов из P на числа кольца K_p, превращающее группу P в группу с кольцом операторов K_p, причем из равенства (3) в силу предложения 1.10 следует, что H будет допустимой подгруппой этой операторной группы.

1.19. *Пусть P – абелева группа, H – группа с кольцом операторов Z_p, являющаяся подгруппой группы P, и факторгруппа P/H есть примарная по отношению к простому числу p группа. Тогда можно определить умножение элементов группы P на элементы кольца Z_p так, что оно превращает группу P в группу с кольцом операторов Z_p и в подгруппе H совпадает с существующим в ней умножением* (*так что при этом H будет допустимой подгруппой операторной группы, в которую превращается группа P*).

Доказательство. 1°. Для каждого элемента $x \in P$ и для всякого элемента $k \in Z_p$ определим произведение $kx \in P$ следующим образом. Для элементов x, принадлежащих подгруппе H, будем считать, что произведение kx совпадает с тем произведением числа $k \in Z_p$ на элемент $x \in H$, которое существует в H как в группе с кольцом операторов Z_p. Если же $x \in P \setminus H$, то существует натуральное число r, удовлетворяющее условию

$$p^r x \in H. \tag{1}$$

Такое число r существует, так как по условию факторгруппа P/H является примарной по отношению к простому числу p. Как известно, целое p-адическое число k можно представить в виде суммы

$$k = n + mp^r, \tag{2}$$

где n, $m \in Z_p$ и n – целое рациональное число. Теперь произведение kx определяем при помощи равенства

$$kx = nx + m(p^r x), \tag{3}$$

причем слагаемое $m(p^r x)$ мы рассматриваем как произведение элемента $m \in Z_p$ на элемент $p^r x \in H$ в операторной группе H[12]. (Отметим, что при $x \in H$ равенство (3) имеет место вследствие того, что H – группа с кольцом операторов Z_p.) Таким образом, сумма, стоящая справа в равенстве (3), является вполне определенным элементом группы P. Оказывается, что этот элемент будет одним и тем же, каким бы ни было натуральное число r и соответствующее ему представление (2) числа k, если только выполняется условие (1). Действительно, пусть l – натуральное число, удовлетворяющее условию

$$p^l x \in H, \tag{4}$$

и

$$k = n^* + m^* p^l \tag{5}$$

[12] Так как должно выполняться условие (S_2), то нетрудно видеть, что данное здесь определение умножения чисел из Z_p на элементы из P является единственно возможным.

– представление числа k, аналогичное представлению (2), в котором $m^* \in Z_p$ и n^* – целое рациональное число. Докажем, что имеет место равенство

$$nx + m(p^r x) = n^* x + m^*(p^l x). \tag{6}$$

Предположим, например, что

$$l \geqslant r. \tag{7}$$

Из (2) и (5) следует, что

$$mp^r = n^* - n + m^* p^l,$$

откуда

$$m = \frac{n^* - n}{p^r} + m^* p^{l-r}, \tag{8}$$

причем в силу (7) число $\frac{n^*-n}{p^r}$ является целым рациональным. Так как $p^r x \in H$ и H – группа с кольцом операторов Z_p, то в силу (8) имеет место равенство

$$m(p^r x) = \frac{n^* - n}{p^r}\,(p^r x) + m^*(p^l x). \tag{9}$$

Поскольку $\frac{n^*-n}{p^r}$ и p^r – целые рациональные числа, то

$$\frac{n^* - n}{p^r}\,(p^r x) = (n^* - n)x = n^* x - nx. \tag{10}$$

На основании (9) и (10) заключаем, что имеет место равенство (6).

Таким образом, равенство (3) имеет место для всякого $x \in H$, так как H – группа с кольцом операторов Z_p. Если же $x \in P \setminus H$ и выполняется условие (1), то равенство (3) имеет место согласно определению произведения kx.

2°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(S_1) \qquad k(x + y) = kx + ky \qquad (k \in Z_p,\ x,\ y \in P).$$

Пусть x, y – два каких-либо фиксированных элемента группы P и r – натуральное число, удовлетворяющее условию

$$p^r x,\ p^r y \in H; \tag{11}$$

такое число r существует, так как по условию факторгруппа P/H является примарной по отношению к простому числу p. Число $k \in Z_p$ можно представить в виде

$$k = n + mp^r,$$

где n, $m \in Z_p$ и n – целое рациональное число. Согласно определению произведения чисел из Z_p на элементы из P, данному в пункте 1°, имеют место равенства

$$kx = nx + m(p^r x), \tag{12}$$

$$ky = ny + m(p^r y) \tag{13}$$

и, кроме того, поскольку в силу (11) $p^r(x+y) \in H$,

$$k(x+y) = n(x+y) + m(p^r(x+y)). \tag{14}$$

Так как H – группа с кольцом операторов Z_p и $p^r(x+y) = p^r x + p^r y \in H$, то

$$m(p^r(x+y)) = m(p^r x) + m(p^r y). \tag{15}$$

Кроме того, поскольку n – целое рациональное число,

$$n(x+y) = nx + ny. \tag{16}$$

На основании (14), (15) и (16) заключаем, что

$$k(x+y) = (nx + m(p^r x)) + (ny + m(p^r y)),$$

откуда, принимая во внимание (12) и (13), получим соотношение (S_1).

3°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(S_2) \qquad (k+k_1)x = kx + k_1 x \qquad (k,\, k_1 \in Z_p,\ x \in P).$$

Для данного элемента $x \in P$ существует натуральное число r, удовлетворяющее условию

$$p^r x \in H. \tag{17}$$

Числа k, k_1 из Z_p можно представить в виде

$$k = n + mp^r, \tag{18}$$

$$k_1 = n_1 + m_1 p^r, \tag{19}$$

где n, n_1, m, $m_1 \in Z_p$ и n, n_1 – целые рациональные числа. Согласно определению умножения элементов из P на числа из Z_p из соотношений (17), (18), (19) следуют равенства

$$kx = nx + m(p^r x), \tag{20}$$

$$k_1 x = n_1 x + m_1(p^r x) \tag{21}$$

и, кроме того, так как в силу (18) и (19)

$$k + k_1 = (n+n_1) + (m+m_1)p^r,$$

имеет место равенство

$$(k+k_1)x = (n+n_1)x + (m+m_1)(p^r x). \tag{22}$$

Но $p^r x \in H$ и H – группа с кольцом операторов Z_p, следовательно,

$$(m+m_1)(p^r x) = m(p^r x) + m_1(p^r x). \tag{23}$$

Кроме того, поскольку n и n_1 – целые рациональные числа,

$$(n+n_1)x = nx + n_1 x. \tag{24}$$

Сопоставляя (22), (23) и (24), получим

$$(k+k_1)x = (nx + m(p^r x)) + (n_1 x + m_1(p^r x)),$$

что в соединении с (20) и (21) дает соотношение (S_2).

4°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(S_3) \qquad (kk_1)x = k(k_1 x) \qquad (k,\, k_1 \in Z_p,\ x \in P).$$

В силу (18) и (19)

$$kk_1 = nn_1 + (nm_1 + n_1 m + mm_1 p^r)\cdot p^r,$$

причем nn_1 является целым рациональным числом. Поэтому согласно определению произведения $(kk_1)x$ имеем

$$(kk_1)x = (nn_1)x + (nm_1 + n_1 m + mm_1 p^r)(p^r x). \tag{25}$$

В силу (21)

$$k(k_1 x) = k(n_1 x + m_1(p^r x)),$$

откуда на основании (S_1) заключаем, что

$$k(k_1 x) = k(n_1 x) + k(m_1(p^r x)). \tag{26}$$

Из (17) следует соотношение $p^r(n_1 x) \in H$. Поэтому, принимая во внимание (18) и определение произведения $k(n_1 x)$, получим

$$k(n_1 x) = n(n_1 x) + m(p^r(n_1 x)). \tag{27}$$

Так как $p^r(n_1 x) = n_1(p^r x),\ p^r x \in H$ и H – группа с кольцом операторов Z_p, то имеют место равенства

$$m(p^r(n_1 x)) = (n_1 m)(p^r x),$$
$$k(m_1(p^r x)) = (km_1)(p^r x),$$
$$(n_1 m)(p^r x) + (km_1)(p^r x) = (n_1 m + km_1)(p^r x).$$

На основании этих равенств и равенств (26) и (27) заключаем, что

$$k(k_1 x) = (nn_1)x + (n_1 m + km_1)(p^r x). \tag{28}$$

Кроме того, принимая во внимание (18), получим

$$n_1 m + km_1 = n_1 m + nm_1 + mm_1 p^r. \tag{29}$$

Теперь, сопоставляя (25) и (28) и принимая во внимание (29), мы видим, что имеет место соотношение (S_3).

5°. Очевидно, имеет место равенство

$$(S_4) \qquad 1\cdot x = x \qquad (x\in P).$$

6°. Таким образом, введенное в пункте 1° умножение элементов группы P на числа из Z_p удовлетворяет условиям (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) и, следовательно, превращает группу P в группу с кольцом операторов Z_p, причем H будет допустимой подгруппой операторной группы, в которую превращается группа P.

1.20. Теорема. *Абелева периодическая группа с кольцом операторов Z_p является примарной относительно p. Обратно, любая примарная относительно p группа допускает кольцо Z_p в качестве области операторов.*

Доказательство. Первая часть теоремы следует из предложения 1.3. Вторая часть теоремы непосредственно следует из предложения 1.19, так как в этом предложении в качестве P можно взять любую примарную группу и в качестве H – нулевую подгруппу группы P.

1.21. Теорема. *Всякое гомоморфное отображение одной группы с кольцом операторов K_p на другую группу с тем же кольцом операторов является операторным гомоморфизмом. В частности, всякий изоморфизм между группами с кольцом операторов K_p является операторным изоморфизмом (относительно области операторов K_p).*

Доказательство. Пусть G и H – группы с кольцом операторов K_p и φ – гомоморфное отображение G на H. Докажем, что φ является операторным гомоморфизмом, т.е. равенство

$$\varphi(kg) = k\varphi(g) \tag{1}$$

имеет место для любых $g\in G$ и $k\in K_p$. Представим число k в виде $k=\frac{n}{m}$, где n и m – целые рациональные числа и m – взаимно простое с p. Тогда, поскольку G – группа с кольцом операторов K_p, $m(kg)=(mk)g=ng$, т.е. $m(kg)=ng$. Отсюда, так как φ – гомоморфизм, следует равенство

$$m(\varphi(kg)) = n(\varphi g). \tag{2}$$

Число $\frac{1}{m}\in K_p$, поскольку число m – взаимно простое с p. Так как по условию H – группа с кольцом операторов K_p, то из (2) следует равенство

$$\tfrac{1}{m}\big(m(\varphi(kg))\big) = \tfrac{1}{m}(n(\varphi g)),$$

откуда

$$\varphi(kg) = \left(\tfrac{1}{m}\cdot n\right)(\varphi g),$$

т.е. имеет место равенство (1). Таким образом, φ является операторным гомоморфизмом.

В частности, если φ – изоморфное отображение G на H, то φ будет операторным изоморфизмом.

1.22. *Всякое гомоморфное отображение одной примарной (относительно p) группы на другую примарную группу является операторным относительно области операторов K_p, если эти примарные группы рассматривать как группы с кольцом операторов K_p.*

Доказательство. В силу теоремы 1.7 любую примарную (по отношению к простому числу p) группу можно рассматривать как группу с кольцом операторов K_p. Поэтому предложение 1.22 является следствием теоремы 1.21.

1.23. *Всякое гомоморфное отображение одной примарной* (*относительно* p) *группы на другую примарную группу является операторным относительно области операторов* Z_p, *если эти примарные группы рассматривать как группы с кольцом операторов* Z_p.

Доказательство. Пусть G и H – примарные (по отношению к простому числу p) группы и φ – гомоморфизм группы G на H. В силу теоремы 1.20 группы G и H можно рассматривать как группы с кольцом операторов Z_p. Докажем, что φ – операторный гомоморфизм. Пусть $x \in G$ и $k \in Z_p$. Обозначим через p^s порядок элемента x. Тогда, очевидно,

$$p^s x = 0, \qquad p^s(\varphi x) = 0. \tag{1}$$

Целое p-адическое число k можно представить в виде

$$k = n + mp^s, \tag{2}$$

где n, $m \in Z_p$, причем n – целое рациональное число. Так как G и H мы рассматриваем как группы с кольцом операторов Z_p, то из (2) следуют равенства

$$kx = nx + m(p^s x),$$
$$k(\varphi x) = n(\varphi x) + m(p^s(\varphi x)),$$

которые в силу (1) можно записать в виде

$$kx = nx, \tag{3}$$
$$k(\varphi x) = n(\varphi x). \tag{4}$$

Кроме того, так как φ – гомоморфизм и n – целое рациональное число, то $\varphi(nx) = n(\varphi x)$. Отсюда в силу (3) получим

$$\varphi(kx) = n(\varphi x). \tag{5}$$

Теперь, сопоставляя (4) и (5), получим соотношение

$$\varphi(kx) = k(\varphi x) \qquad (k \in Z_p,\ x \in G),$$

которое показывает, что гомоморфизм φ является операторным относительно области операторов Z_p.

1.24. *Пусть* φ – *гомоморфизм обобщенной примарной* (*относительно* p) *группы* G *на периодическую группу* A, *ядром которого является допустимая подгруппа группы* G. *Тогда* A *является примарной* (*относительно* p) *группой и* φ – *операторным гомоморфизмом, если* A *рассматривать как группу с тем же кольцом операторов, что и группа* G.

Доказательство. 1°. Пусть H – ядро гомоморфизма φ. Тогда

$$G/H \cong A. \tag{1}$$

По условию H – допустимая подгруппа группы G. Поэтому факторгруппа G/H также является обобщенной примарной группой (с тем же кольцом операторов, что и группа G). Так как по условию A – периодическая группа, то на основании (1) периодической является также и факторгруппа G/H. Следовательно, в силу 1.3 факторгруппа G/H является примарной (по отношению к p) группой. Отсюда согласно (1) следует, что A является примарной по отношению к простому числу p группой.

2°. В силу теоремы 1.7 и теоремы 1.20 примарную группу A мы можем рассматривать как группу с тем же кольцом операторов, что и группа G. Поэтому, если G – группа с кольцом операторов K_p, то доказываемое предложение является частным случаем теоремы 1.21.

3°. Предположим, что G – группа с кольцом операторов Z_p. Докажем, что φ – операторный гомоморфизм. Обозначим через φ^* изоморфное отображение факторгруппы G/H на группу A, индуцируемое гомоморфизмом φ. Так как G/H и A – примарные группы, то в силу предложения 1.23 φ^* является операторным (относительно области операторов Z_p) изоморфным отображением. Обозначим через ψ естественный гомоморфизм группы G на факторгруппу G/H. Так как по условию H – допустимая подгруппа группы G, то ψ является операторным гомоморфизмом. Легко видеть, что $\varphi = \varphi^*\psi$, т.е. φ является произведением операторных гомоморфизмов φ^* и ψ. Поэтому φ также является операторным (относительно области операторов Z_p) гомоморфизмом.

Предложение 1.24 доказано.

1.25. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа и H – ее подгруппа такая, что факторгруппа G/H является периодической группой. Если H – допустимая подгруппа группы G, то факторгруппа G/H является примарной (относительно p).*

Это предложение является частным случаем предложения 1.24.

Теоремы 1.7, 1.20, 1.21 и предложения 1.22, 1.23 показывают, что теория примарных (относительно p) групп совпадает как с теорией периодических абелевых групп с кольцом операторов K_p, так и с теорией периодических абелевых групп с кольцом операторов Z_p. Таким образом, теория примарных групп является частью теории обобщенных примарных групп.

Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа. Если ненулевой элемент $x \in G$ принадлежит подгруппе $p^\omega G$ группы G, то будем говорить, что элемент x имеет в G бесконечную высоту. Если $p^\omega G = \{0\}$, то будем говорить, что G – группа без элементов бесконечной высоты.

Всюду в дальнейшем под «подгруппами» обобщенной примарной группы будем подразумевать допустимые подгруппы, а под «гомоморфизмом» – гомоморфизм, ядром которого является допустимая подгруппа. Вместо слов «факторгруппа по допустимой подгруппе» будем говорить просто «факторгруппа».

При этом предложения 1.8–1.14 о допустимых подгруппах в дальнейшем будут часто использоваться без указания на это.

§ 2. Полные группы

2.1. Определение. Абелева группа G называется *полной*, если для любого натурального числа n имеет место равенство $nG = G$.

2.2. Определение. Абелева группа называется *редуцированной*, если она не содержит полных подгрупп, отличных от нулевой подгруппы.

2.3. *Для того чтобы обобщенная примарная относительно p группа G была полной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(a) $pG = G$, *т.е. для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $h \in G$, удовлетворяющий равенству $ph = g$.*

Доказательство. 1°. Необходимость условия непосредственно следует из определения полной группы.

2°. Докажем достаточность условия. Предположим, что обобщенная примарная группа G удовлетворяет условию (a), и покажем, что G есть полная группа. Пусть n – натуральное число. Его можно представить в виде $n = m \cdot p^k$, где k – целое неотрицательное число и m – натуральное число, взаимно простое с p. Применяя k раз соотношение $pG = G$, получим

$$p^k G = G. \tag{1}$$

Далее, поскольку G – обобщенная примарная (относительно p) группа и натуральное число m взаимно просто с p, то в силу предложения 1.12

$$mG = G. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $nG = m(p^k G) = mG = G$, т.е. $nG = G$. Этим доказано, что G является полной группой.

2.4. *Гомоморфный образ полной абелевой группы является полной группой. В частности, факторгруппа полной абелевой группы является полной группой.*

Доказательство. Пусть A – полная абелева группа, φ – гомоморфизм группы A в группу B и G – образ группы A при гомоморфизме φ. Докажем, что G является полной группой, т.е. для любого натурального числа n имеет место равенство

$$nG = G. \tag{1}$$

Пусть $g \in G$ и a – прообраз элемента g при гомоморфизме φ, $\varphi a = g$, $a \in A$. Так как A – полная группа, то $nA = A$ и, следовательно, существует элемент $x \in A$ такой, что $nx = a$. Отсюда, поскольку $\varphi a = g$, получим $n\varphi(x) = g$, т.е. $g \in nG$. Этим доказано, что $nG \supset G$, откуда следует равенство (1). Таким образом, G является полной группой.

2.5. *Любое прямое слагаемое полной абелевой группы есть полная группа.*

Это предложение непосредственно следует из предложения 2.4.

2.6. *Если подгруппа N абелевой группы G и факторгруппа G/N суть полные группы, то и G является полной группой.*

Доказательство. Предположим, что N и $\overline{G}$, $\overline{G} = G/N$, суть полные группы. Докажем, что для любого натурального числа n имеет место равенство $nG = G$. Пусть $g \in G$ и $\bar{g} = g + N$. Так как $\overline{G}$ – полная группа, то согласно определению 2.1 $n\overline{G} = \overline{G}$, т.е. существует элемент $\bar{h} \in \overline{G}$ такой, что $n\bar{h} = \bar{g}$. Пусть h – элемент группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{h}$, $\bar{h} = h + N$. Тогда $nh = g + d$, где $d \in N$. Так как N – полная группа, то существует элемент $c \in N$ такой, что $nc = d$. Следовательно, $n(h - c) = g$. Этим доказано, что $nG \supset G$. Отсюда следует, что $nG = G$, т.е. G является полной группой.

2.7. *Пусть G – абелева группа, H – подгруппа G и C – подгруппа H. Если факторгруппы G/H и H/C суть полные группы, то факторгруппа G/C является полной группой.*

Доказательство. Так как G/H – полная группа и

$$(G/C)/(H/C) \cong G/H,$$

то факторгруппа $(G/C)/(H/C)$ является полной группой. Кроме того, по предположению H/C есть полная группа. Отсюда в силу предложения 2.6 следует, что факторгруппа G/C является полной группой.

2.8. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа и H – ее подгруппа, удовлетворяющая условию*

$$G = [H, pG]. \qquad (a)$$

Тогда факторгруппа G/H является полной группой.

Доказательство. Положим $\overline{G} = G/H$ и докажем, что $p\overline{G} = \overline{G}$. Пусть $\bar{g} \in \overline{G}$ и g – элемент группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{g}$, $\bar{g} = g + H$. В силу (a)

$$g = h + pc, \quad \text{где } h \in H,\ c \in G.$$

Отсюда, полагая $\bar{c} = c + H$, получим

$$p\bar{c} = pc + H = g + H = \bar{g},$$

т.е. $p\bar{c} = \bar{g}$. Этим доказано, что $p\overline{G} \supset \overline{G}$. Отсюда следует равенство $p\overline{G} = \overline{G}$, которое в силу предложения 2.3 показывает, что факторгруппа $\overline{G}$ является полной группой.

2.9. *Пусть H – подгруппа абелевой группы G такая, что факторгруппа G/H есть полная группа. Тогда для всякого натурального числа n имеет место равенство*

$$G = [H, nG]. \qquad (a)$$

Доказательство. По условию факторгруппа $\overline{G}$, $\overline{G} = G/H$, является полной группой. Следовательно, согласно определению 2.1 для любого натурального числа n имеет место равенство

$$n\overline{G} = \overline{G}. \tag{1}$$

Докажем, что имеет место равенство (a). Пусть $g \in G$ и $\bar{g} = g + H$. На основании (1) заключаем, что существует элемент $\bar{x} \in \overline{G}$ такой, что

$$n\bar{x} = \bar{g}. \tag{2}$$

Обозначим через x элемент группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$, $\bar{x} = x + H$. Тогда из (2) следует соотношение $g - nx \in H$ и, значит, $g \in [H,\, nG]$. Этим доказано, что $G \subset [H,\, nG]$. Отсюда, поскольку имеет место и обратное включение, следует равенство (a).

2.10. *Полная (допустимая) подгруппа P обобщенной примарной группы G является прямым слагаемым группы G*:

$$G = P \oplus H, \tag{1}$$

причем в качестве прямого слагаемого H можно взять любую (допустимую) подгруппу группы G, максимальную по отношению к условию

$$P \cap H = \{0\}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть H – (допустимая) подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, максимальная по отношению к условию (2). Тогда группа $[P,\, H]$ является прямой суммой подгрупп P и H,

$$[P,\, H] = P \oplus H.$$

Докажем, что имеет место прямое разложение (1). Допустим, что $G \neq P \oplus H$. Тогда существует элемент $a \in G$ такой, что

$$a \notin P \oplus H.$$

Обозначим через $[a]$ (допустимую) подгруппу группы G, порожденную элементом a. Если $(P \oplus H) \cap [a] = \{0\}$, то $P \cap (H \oplus [a]) = \{0\}$ и $H \oplus [a] \neq H$, что противоречит определению подгруппы H. Поэтому мы предположим, что

$$(P \oplus H) \cap [a] \neq \{0\}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае существует элемент $c \in [a]$ такой, что

$$pc \in P \oplus H, \qquad c \notin P \oplus H. \tag{3}$$

В силу (3)

$$pc = d + b, \quad \text{где } d \in P,\ b \in H. \tag{4}$$

Так как по условию P – полная группа, то существует элемент $e \in P$ такой, что $pe = d$. Отсюда, принимая во внимание (4), получим

$$p(c - e) \in H. \tag{5}$$

Обозначим через H_1 (допустимую) подгруппу группы G, порожденную подгруппой H и элементом $(c - e)$:

$$H_1 = [H, (c - e)]. \tag{6}$$

Покажем, что она удовлетворяет условию

$$P \cap H_1 = \{0\}, \tag{7}$$

т.е. покажем, что всякий элемент z, принадлежащий пересечению $P \cap H_1$,

$$z \in P \cap H_1, \tag{8}$$

является нулевым элементом группы G. В силу (6)

$$z = h + k(c - e), \tag{9}$$

где $h \in H$ и k – число из кольца операторов группы G. Из (9), поскольку $h \in H$ и z, $e \in P$, получим

$$kc \in P \oplus H. \tag{10}$$

Покажем, что число k делится на p. Допустим, что это не так, т.е. допустим, что числа k и p – взаимно простые. Тогда существуют числа m и n, принадлежащие кольцу операторов группы G $(K_p$ или $Z_p)$, такие, что

$$mp + nk = 1.$$

Следовательно, $c = (mp+nk)c = m(pc)+n(kc)$, откуда в силу (3) и (10) получим

$$c \in P \oplus H,$$

что невозможно, так как согласно (3) $c \notin P \oplus H$. Таким образом, число k делится на p. Поэтому на основании (5) заключаем, что $k(c - e) \in H$, откуда, принимая во внимание (9), получим

$$z \in H. \tag{11}$$

На основании (2), (11) и (8) приходим к выводу, что $z = 0$. Таким образом, доказано, что имеет место соотношение (7). Но соотношение (7) противоречит определению подгруппы H как максимальной подгруппы, удовлетворяющей условию (2), так как $H_1 \supset H$ и $H_1 \neq H$. Следовательно, предположение о том, что $G \neq P \oplus H$, мы должны отвергнуть, т.е. имеет место прямое разложение (1). Предложение 2.10 доказано.

2.11. [13] *Полная подгруппа P абелевой группы G является прямым слагаемым группы G:*

$$G = P \oplus H, \tag{1}$$

причем в качестве прямого слагаемого H можно взять любую подгруппу группы G, максимальную по отношению к условию

$$P \cap H = \{0\}. \tag{2}$$

Доказательство предложения 2.11 протекает так же, как и доказательство предложения 2.10. Надо только в доказательстве предложения 2.10 фразу, относящуюся к соотношению (3), заменить следующей: «В этом случае существует элемент $c \in [a]$ и простое число p, удовлетворяющее соотношению (3)».

2.12. *Пусть P – полная подгруппа абелевой группы G и A – подгруппа группы G, удовлетворяющая условию*

$$P \cap A = \{0\}. \tag{1}$$

Тогда существует подгруппа H группы G, содержащая A и удовлетворяющая равенству

$$G = P \oplus H.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех подгрупп группы G, содержащих A и имеющих в пересечении с P только нулевой элемент. Легко видеть, что объединение возрастающей последовательности подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{A}$, также является подгруппой, принадлежащей $\mathfrak{A}$. Поэтому согласно теореме Куратовского о насыщенных множествах существует в $\mathfrak{A}$ максимальная подгруппа, т.е. существует подгруппа $H \in \mathfrak{A}$ такая, что из соотношений $B \in \mathfrak{A}$, $H \subset B$ следует $H = B$. Поскольку $H \in \mathfrak{A}$, то H содержит A и удовлетворяет условию

$$P \cap H = \{0\}. \tag{2}$$

Подгруппа H группы G является максимальной по отношению к условию (2). Действительно, если подгруппа H_1 группы G содержит H (следовательно, содержит также A) и имеет в пересечении с P только нулевой элемент, то $H_1 \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, согласно определению H, $H = H_1$. Поэтому на основании предложения 2.11 заключаем, что имеет место прямое разложение $G = P \oplus H$.

2.13. *Подгруппа абелевой группы, порожденная каким-либо множеством полных подгрупп этой группы, также является полной группой.*

Доказательство. Пусть A – абелева группа, $\mathfrak{A}$ – какое-либо множество полных подгрупп группы A и H – подгруппа группы A, порожденная полными подгруппами, принадлежащими $\mathfrak{A}$. Докажем, что равенство $nH = H$ имеет место для любого натурального числа n. Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Тогда, так как B – полная

[13] Предложения 2.11–2.17, 2.20–2.24, 2.35, 2.36 хорошо известны (см. работы [1], [2], [11], [15]), но для удобства читателя некоторые из них даны с доказательствами.

группа, $nB = B$. Кроме того, поскольку $B \subset H$, $nB \subset nH$. Следовательно, $B \subset nH$. Таким образом, подгруппа nH содержит любую подгруппу, принадлежащую $\mathfrak{A}$, и потому содержит H. Отсюда следует, что $nH = H$ и, таким образом, H является полной группой.

2.14. Определение. *Максимальной полной* подгруппой абелевой группы называется полная подгруппа, содержащая любую полную подгруппу этой группы.

Легко видеть, что максимальная полная подгруппа абелевой группы является вполне характеристической подгруппой этой группы. Отсюда следует, что максимальная полная подгруппа обобщенной примарной группы является ее допустимой подгруппой.

2.15. *Любая абелева группа разлагается в прямую сумму максимальной полной подгруппы и редуцированной подгруппы.*

Доказательство. Пусть A – абелева группа. Обозначим через P подгруппу группы A, порожденную всеми полными подгруппами группы A. В силу предложения 2.13 P является полной группой. Кроме того, P является максимальной полной подгруппой группы A, так как она содержит любую полную подгруппу группы A. В силу предложения 2.11 P является прямым слагаемым группы A:

$$A = P \oplus G.$$

Прямое слагаемое G не содержит полных подгрупп, отличных от нулевой, так как все они содержатся в P. Следовательно, G есть редуцированная группа.

Предложение 2.15 показывает, что изучение абелевых групп в значительной степени сводится к изучению редуцированных абелевых групп.

2.16. *Максимальная периодическая подгруппа полной группы является полной группой.*

Доказательство. Пусть H – максимальная периодическая подгруппа полной группы A. Покажем, что из соотношения $x \in H$ следует $x \in nH$ для всякого натурального числа n. Так как по условию A является полной группой, то $nA = A$, следовательно, существует элемент $y \in A$ такой, что $ny = x$. Поскольку x – элемент конечного порядка, то конечный порядок имеет также элемент y. Следовательно, $y \in H$. Отсюда, поскольку $x = ny$ и $ny \in nH$, следует, что $x \in nH$. Этим доказано, что $H \subset nH$, откуда получаем равенство $H = nH$. Таким образом, H является полной группой.

Простейшими полными группами являются аддитивная группа R рациональных чисел и факторгруппа группы R по аддитивной группе кольца K_p. Эта факторгруппа (или группа, ей изоморфная) называется *квазициклической* примарной группой.

Полной группой является также аддитивная группа рациональных p-адических чисел. Факторгруппа этой группы по аддитивной группе кольца Z_p целых p-адических чисел также является примарной (относительно p) квазициклической группой.

В дальнейшем будет использована следующая теорема Прюфера [15], описывающая строение полных примарных групп:

2.17. *Всякая полная примарная группа разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп.*

2.18. Теорема. *Полная абелева группа с кольцом операторов Z_p разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп и (допустимых) подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных p-адических чисел.*

Доказательство. 1°. Пусть G – полная абелева группа с кольцом операторов Z_p. Если G – периодическая группа, то согласно предложению 1.3 она является примарной и поэтому в силу предложения 2.17 разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп.

2°. Предположим, что G – непериодическая группа. Обозначим через P максимальную периодическую подгруппу группы G. В силу предложения 1.3 она является примарной (относительно p) группой. Согласно предложению 1.14 P является допустимой подгруппой группы G. Кроме того, в силу предложения 2.16 P является полной группой. Поэтому согласно 2.10 существует (допустимая) подгруппа H группы G такая, что

$$G = P \oplus H. \tag{1}$$

Отсюда согласно предложению 2.5 следует, что H является полной группой. Кроме того, H – группа без кручения, поскольку P – максимальная периодическая подгруппа группы G. Первое прямое слагаемое P в разложении (1) согласно предложению 2.17 разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп (если только не является нулевой подгруппой). Поэтому для доказательства теоремы 2.18 нам остается показать, что второе прямое слагаемое H разлагается в прямую сумму (допустимых) подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных p-адических чисел.

3°. Докажем, что любой ненулевой элемент $x \in H$ содержится в допустимой подгруппе группы H, изоморфной аддитивной группе рациональных p-адических чисел. Поскольку H – полная группа, существует бесконечная последовательность $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$ элементов $x_i \in H$, удовлетворяющих условию

$$px_1 = x, \qquad px_{i+1} = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Так как H – группа без кручения, то последовательность $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$, удовлетворяющая условию (2), для заданного элемента x определяется однозначно. Обозначим через C_x подгруппу группы H, являющуюся объединением возрастающей последовательности вложенных друг в друга (допустимых) циклических подгрупп $[x_i]$:

$$C_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} [x_i]. \tag{3}$$

Подгруппа C_x является допустимой, поскольку она есть объединение допустимых подгрупп. Так как H – группа с кольцом операторов Z_p и x_i – ненулевой элемент группы H, то в силу предложения 1.2 циклическая подгруппа $[x_i]$ изоморфна аддитивной группе целых p-адических чисел, $i = 1, 2 \ldots$ Поэтому, принимая во внимание (2), (3), нетрудно видеть, что подгруппа C_x изоморфна аддитивной группе рациональных p-адических чисел.

4°. Докажем, что группа H разлагается в прямую сумму (допустимых) подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных p-адических чисел. Пусть F – максимальное линейно независимое относительно кольца операторов Z_p множество элементов группы H. Согласно доказанному в пункте 3° каждому элементу $x \in F$ соответствует допустимая подгруппа C_x группы H, изоморфная аддитивной группе рациональных p-адических чисел. Обозначим через A подгруппу группы H, порожденную подгруппами, принадлежащими множеству $\{C_x\}_{x \in F}$; поскольку C_x – допустимые подгруппы, то A также является допустимой подгруппой. Так как F – линейно независимое относительно Z_p множество и A – группа без кручения, то нетрудно видеть, что A разлагается в прямую сумму подгрупп C_x:

$$A = \bigoplus_{x \in F} C_x. \tag{4}$$

В силу предложения 2.13 группа A является полной, поскольку она порождается полными подгруппами C_x. Поэтому согласно предложению 2.10 A является прямым слагаемым группы H. Кроме того, A является допустимой подгруппой группы H и содержит максимальное линейно независимое множество F элементов группы H. Отсюда, поскольку H – группа без кручения, получаем, что $A = H$. Следовательно, в силу (4)

$$H = \bigoplus_{x \in F} C_x,$$

т.е. H разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных p-адических чисел.

2.19. Теорема. *Полная абелева группа с кольцом операторов K_p разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.18.

2.20. *Число прямых слагаемых в любом разложении полной примарной (относительно p) группы A в прямую сумму квазициклических подгрупп равно числу прямых слагаемых в разложении группы $A[p]$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p.*

Доказательство. Пусть

$$A = \bigoplus_{i \in M} C_i \tag{1}$$

– разложение группы A в прямую сумму квазициклических подгрупп. Нетрудно видеть, что из разложения (1) следует прямое разложение

$$A[p] = \bigoplus_{i \in M} C_i[p]. \tag{2}$$

Так как $C_i[p]$ – группа порядка p, то (2) есть разложение группы $A[p]$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p. Число прямых слагаемых в разложении (2) равно числу прямых слагаемых в разложении (1). Кроме того, поскольку каждый отличный от нуля элемент группы $A[p]$ имеет порядок p, то любые два разложения этой группы в прямую сумму циклических подгрупп порядка p имеют одинаковое число прямых слагаемых. Поэтому предложение 2.20 мы можем считать доказанным.

2.21. *Если A – ненулевая полная примарная группа, то имеет место равенство* $|A| = |A[p]| \cdot \aleph_0$.

Доказательство. Так как квазициклическая группа является счетной, то это предложение следует из предложений 2.17 и 2.20.

2.22. *Пусть A и B – полные примарные (относительно p) группы, удовлетворяющие условию $A[p] \cong B[p]$. Тогда группы A и B изоморфны.*

Доказательство. Из условия в силу 2.20 следует, что прямые разложения групп A и B в прямые суммы квазициклических подгрупп имеют одинаковое число прямых слагаемых. Отсюда следует, что группы A и B изоморфны.

2.23. Определение. Полная абелева группа P называется *минимальной полной* для G группой, если G является подгруппой группы P и в P нет полных подгрупп, содержащих G и отличных от P.

В дальнейшем нужна будет следующая теорема из работы [7].

2.24. *Каждая абелева группа является подгруппой некоторой полной абелевой группы.*

2.25. Теорема. *Для любой абелевой группы G существует абелева группа, которая является минимальной полной для G группой.*

Доказательство. В силу предложения 2.24 группа G является подгруппой некоторой полной абелевой группы S. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех полных подгрупп B группы S, удовлетворяющих условию

$$B \cap G = \{0\}.$$

Принимая во внимание предложение 2.13, легко видеть, что объединение возрастающей последовательности подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{A}$, также является группой из $\mathfrak{A}$. Поэтому на основании теоремы Куратовского о насыщенных множествах заключаем, что множество $\mathfrak{A}$ содержит хотя бы одну максимальную подгруппу, т.е. существует подгруппа $D \in \mathfrak{A}$ такая, что из $B \in \mathfrak{A}$ и $D \subset B$ следует $D = B$.

Так как D – полная подгруппа группы S, удовлетворяющая условию

$$D \cap G = \{0\},$$

то на основании предложения 2.12 заключаем, что существует подгруппа P группы S, содержащая G и удовлетворяющая равенству

$$S = D \oplus P. \tag{1}$$

В силу предложения 2.5 P является полной группой как прямое слагаемое полной группы S. Докажем, что P – минимальная полная для G группа. Допустим, что P не является минимальной полной для G группой. Тогда существует полная подгруппа H группы P, отличная от P и содержащая G. В силу предложения 2.11 полная подгруппа H является прямым слагаемым группы P:

$$P = F \oplus H, \tag{2}$$

причем F – ненулевая подгруппа, так как H не совпадает с P.

Из (1) и (2) следует, что

$$S = (D \oplus F) \oplus H, \tag{3}$$

откуда

$$(D \oplus F) \cap G = \{0\},$$

так как G – подгруппа группы H. Кроме того, так как S – полная группа, то из (3) в силу предложения 2.5 следует, что прямое слагаемое $D \oplus F$ является полной группой. Таким образом, группа $D \oplus F$ является элементом множества $\mathfrak{A}$, содержащим подгруппу D. Отсюда в силу максимальности D следует, что $D = D \oplus F$. Но это равенство невозможно, так как F – ненулевая подгруппа группы P. Этим доказано, что P является минимальной полной для G группой.

2.26. *Пусть G – подгруппа полной абелевой группы P. Для того чтобы P была минимальной полной для G группой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение любой ненулевой циклической подгруппы группы P с группой G было ненулевой подгруппой группы G.*

Доказательство. 1°. Докажем достаточность условия. Предположим, что P не является минимальной полной для G группой. Тогда существует полная подгруппа H группы P, отличная от P и содержащая G. В силу 2.11 H является прямым слагаемым группы P:

$$P = H \oplus A, \tag{1}$$

причем A – ненулевая подгруппа группы P, так как H не совпадает с P. Из (1), поскольку G – подгруппа группы H, следует, что

$$G \cap A = \{0\}. \tag{2}$$

Так как A – ненулевая подгруппа группы P, то на основании (2) заключаем, что существует ненулевая циклическая подгруппа группы P, пересечение которой с группой G содержит только нулевой элемент. Этим доказана достаточность условия.

2°. Докажем необходимость условия. Предположим, что существует ненулевая циклическая подгруппа C группы P, пересечение которой с G содержит только нулевой элемент:

$$C \cap G = \{0\}. \tag{3}$$

Если C – конечная подгруппа, то будем считать, что ее порядок является простым числом. Если бы порядок конечной группы C не был простым числом, то вместо C мы могли бы взять ее подгруппу простого порядка. Так как P – полная группа, то легко видеть, что среди полных ее подгрупп, содержащих циклическую подгруппу C, существует хотя бы одна минимальная; обозначим ее через Z. Если C – бесконечная циклическая группа, то Z изоморфна аддитивной группе всех рациональных чисел; если же C – конечная группа простого порядка p, то Z является квазициклической примарной (по отношению к p) группой. На основании (3) заключаем, что

$$Z \cap G = \{0\}. \tag{4}$$

Так как Z – полная подгруппа группы P, удовлетворяющая соотношению (4), то в силу предложения 2.12 существует подгруппа H группы P, содержащая G и удовлетворяющая равенству

$$P = Z \oplus H. \tag{5}$$

В силу предложения 2.5 подгруппа H является полной группой как прямое слагаемое полной группы P. Таким образом, существует полная подгруппа H группы P, содержащая G и отличная от P. Следовательно, P не является минимальной полной для G группой.

2.27. *Пусть G – подгруппа полной абелевой группы P. Для того чтобы P была минимальной полной для G группой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия*:

(a) *для всякого простого p имеет место равенство $G[p] = P[p]$;*

(b) *факторгруппа P/G является периодической группой.*

Доказательство. 1°. Докажем необходимость условий. Предположим, что P – минимальная полная для G группа, и докажем, что тогда выполняются условия (a) и (b). Пусть x – ненулевой элемент из $P[p]$. Обозначим через C циклическую подгруппу группы P, порожденную элементом x. В силу предложения 2.26 пересечение $C \cap G$ является ненулевой подгруппой группы G. Но C, будучи группой простого порядка, не содержит ненулевых подгрупп, отличных от C. Поэтому $C \subset G$ и, следовательно, $x \in G[p]$. Этим доказано, что $P[p] \subset G[p]$. Отсюда, поскольку G – подгруппа группы P, следует, что $P[p] = G[p]$, т.е. выполняется условие (a).

По предположению P – минимальная полная для G группа. Следовательно, в силу предложения 2.26 пересечение любой ненулевой циклической подгруппы группы P с группой G является ненулевой подгруппой группы G. Отсюда следует, что факторгруппа P/G есть периодическая группа, т.е. выполняется условие (b).

2°. Докажем достаточность условий. Предположим, что условия (a), (b) выполняются, и докажем, что тогда P – минимальная полная для G группа.

В силу предложения 2.26 для этого достаточно показать, что пересечение любой ненулевой циклической подгруппы C группы P с группой G является ненулевой подгруппой группы G. Если C – бесконечная циклическая подгруппа группы P, то из условия (b) следует, что пересечение $C \cap G$ есть ненулевая подгруппа группы G. Если же C – ненулевая конечная циклическая подгруппа группы P, то она содержит хотя бы один элемент простого порядка и поэтому в силу условия (a) пересечение $C \cap G$ является ненулевой подгруппой группы G.

Этим доказано, что P является минимальной полной для G группой.

2.28. *Пусть P – группа, являющаяся минимальной полной для обобщенной примарной относительно p группы G. Тогда группы P и G обладают следующими свойствами:*

(a) $G[p] = P[p]$;

(b) *P/G является полной примарной (относительно p) группой;*

(c) $(P/pG)[p] = G/pG$;

(d) $(P/G)[p] \cong G/pG$;

(e) *если G – примарная группа, то примарной будет и группа P;*

(f) *если G – бесконечная группа, то $|G| = |P|$.*

Доказательство. 1°. Равенство (a) имеет место в силу предложения 2.27.

2°. По условию P – минимальная полная для G группа. Поэтому согласно предложению 2.27 факторгруппа P/G является периодической группой. Докажем, что факторгруппа P/G является примарной (относительно p) группой. Для этого, поскольку P/G есть периодическая группа, достаточно показать, что, каково бы ни было простое число q, отличное от p, факторгруппа P/G не содержит элементов порядка q. Допустим, что существует элемент $\bar{x}$ порядка q факторгруппы P/G. Пусть x – элемент группы P, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$, $\bar{x} = x + G$. Тогда, очевидно,

$$qx \in G \tag{1}$$

и

$$x \notin G. \tag{2}$$

По условию G – обобщенная примарная (относительно p) группа. Кроме того, q – простое число, отличное от p. Следовательно, в силу предложения 1.12 имеет место равенство

$$qG = G. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что существует элемент $y \in G$, удовлетворяющий равенству

$$qy = qx. \tag{4}$$

Из (4) следует, что $q(x - y) = 0$, т.е.

$$x - y \in P[q].$$

Но в силу предложения 2.27 $G[q] = P[q]$; следовательно,

$$x - y \in G[q],$$

откуда, поскольку $y \in G$, получим $x \in G$, что невозможно в силу (2). Этим доказано, что факторгруппа P/G является примарной (относительно p) группой. Кроме того, в силу предложения 2.4 P/G есть полная группа как факторгруппа полной группы P. Таким образом, группы P и G обладают свойством (b).

3°. Докажем, что имеет место соотношение (c). Пусть $\bar{x} \in (P/pG)[p]$ и x – элемент класса смежности $\bar{x}$: $\bar{x} = x + pG$. Тогда, очевидно,

$$px \in pG, \tag{5}$$

и поэтому существует в G элемент y, удовлетворяющий равенству

$$px = py. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $p(x - y) = 0$, т.е. $x - y \in P[p]$. Отсюда, принимая во внимание соотношение (a), приходим к выводу, что $x - y \in G$, и, поскольку $y \in G$, получаем

$$x \in G. \tag{7}$$

Так как $\bar{x} = x + pG$, то на основании (7) заключаем, что $\bar{x}$ является элементом факторгруппы G/pG. Этим доказано, что

$$(P/pG)[p] \subset G/pG,$$

откуда, поскольку G – подгруппа P, следует равенство (c).

4°. Докажем, что имеет место соотношение (d). Рассмотрим гомоморфизм φ группы P на подгруппу pP, определяемый следующим образом:

$$\varphi x = px \qquad (x \in P).$$

По условию P является полной группой, следовательно, $pP = P$. Поэтому φ отображает P на P. Обозначим через C полный прообраз группы G при гомоморфизме φ. Элемент x из P тогда и только тогда принадлежит C, когда $px \in G$. Поэтому имеет место равенство

$$C/G = (P/G)[p]. \tag{8}$$

Из равенства (c) следует, что полным прообразом подгруппы pG при гомоморфизме φ является группа G. Так как C и G суть полные прообразы при гомоморфизме φ соответственно подгрупп G и pG, то согласно теореме о гомоморфизме

$$C/G \cong G/pG. \tag{9}$$

Теперь, сопоставляя (8) и (9), получим соотношение (d).

Если G – примарная группа, то примарной будет и P, поскольку согласно (b) факторгруппа P/G является примарной группой. Таким образом, имеет место свойство (e).

5°. Если $G = P$, то имеет место свойство (f). Допустим, что G – бесконечная группа, отличная от P. Легко видеть, что в этом случае имеет место равенство

$$|P| = |G| + |P/G|. \tag{10}$$

Согласно (b) P/G есть полная примарная группа и притом ненулевая, так как $G \neq P$. Поэтому в силу 2.21 имеет место равенство

$$|P/G| = |(P/G)[p]\,| \cdot \aleph_0.$$

Отсюда в силу (d) получим

$$|P/G| = |G/pG| \cdot \aleph_0. \tag{11}$$

Так как G – бесконечная группа, то из (11) следует неравенство

$$|P/G| \leqslant |G|,$$

откуда в силу (10) получим

$$|P| \leqslant |G|.$$

Но G – подгруппа P, следовательно, $|P| = |G|$. Таким образом, имеет место свойство (f).

2.29. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа и P – минимальная полная для G группа. Тогда можно определить умножение элементов группы P на числа из кольца операторов группы G (т.е. на числа из K_p или Z_p) так, что оно превращает P в группу с этим же кольцом операторов, в которой G будет допустимой подгруппой.*

Доказательство. По условию G – обобщенная примарная группа и P – минимальная полная для G группа. Отсюда в силу предложения 2.28 следует, что факторгруппа P/G является примарной по отношению к простому числу p группой. Поэтому в силу 1.18 и 1.19 доказываемое предложение имеет место.

2.30. Теорема. *Для любой заданной обобщенной примарной группы G существует обобщенная примарная группа $P(G)$ (с тем же кольцом операторов, что и группа G), которая является минимальной полной для G группой и содержит G в качестве допустимой подгруппы.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 2.25 и предложения 2.29.

Бэром [2] была доказана для абелевых групп с произвольным кольцом операторов R следующая теорема.

2.31. *Для каждой (допустимой) подгруппы G полной абелевой группы K с кольцом операторов R существует (допустимая) полная подгруппа G^* группы K, которая содержит G в качестве подгруппы и удовлетворяет условию*

(E) *Каждый операторный изоморфизм группы G на (допустимую) подгруппу полной абелевой группы H с кольцом операторов R индуцируется некоторым операторным изоморфизмом группы G^* на (допустимую) подгруппу группы H.*

Нетрудно видеть, что из этой теоремы Бэра и теоремы 2.30 следует

2.32. Теорема. *Если G – обобщенная примарная группа, то обобщенная примарная группа (с тем же кольцом операторов, что и группа G), являющаяся минимальной полной для G и содержащая G в качестве допустимой подгруппы, определяется однозначно с точностью до операторных изоморфизмов, переводящих все элементы группы G в самих себя.*

Следующее предложение будет использовано только в § 6 при доказательстве предложения 6.1.

2.33. *Пусть Q – полная обобщенная примарная группа. Существует полная обобщенная примарная группа без кручения P (с тем же кольцом операторов, что и группа Q) и операторный гомоморфизм группы P на Q, ядром которого является редуцированная допустимая подгруппа группы P.*

Доказательство. Обозначим через H максимальную периодическую подгруппу обобщенной примарной (относительно p) группы Q. Она, очевидно, является вполне характеристической и, следовательно, допустимой подгруппой группы Q. Если H – нулевая подгруппа, то, очевидно, доказываемое предложение верно, так как можно положить $P = Q$. Поэтому мы будем предполагать, что H – ненулевая подгруппа.

В силу предложения 2.16 H является полной группой. Следовательно, согласно предложению 2.10 имеет место прямое разложение

$$Q = H \oplus A, \tag{1}$$

причем A также является допустимой подгруппой группы Q. Подгруппа A является группой без кручения, так как H – максимальная периодическая подгруппа группы Q. Кроме того, в силу предложения 2.5 A является полной группой как прямое слагаемое полной группы Q.

На основании предложения 1.3 H является примарной (относительно p) группой; так как H – ненулевая полная примарная группа, то согласно предложению 2.17 она разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп; пусть

$$H = \bigoplus_{i \in M} H_i \tag{2}$$

– одно из таких разложений. Каждому прямому слагаемому H_i, $i \in M$, поставим в соответствие группу D_i, изоморфную аддитивной группе рациональных чисел, если Q – группа с кольцом операторов K_p. Если же Q – группа с кольцом операторов Z_p, то слагаемому H_i, $i \in M$, поставим в соответствие группу D_i, изоморфную аддитивной группе рациональных p-адических чисел. При этом каждую группу D_i мы будем считать группой с тем же кольцом операторов, что и группа Q. Кроме того, будем предполагать, что группы из множества

$\{D_i\}_{i\in M}$ с различными индексами не пересекаются. Обозначим через D прямую сумму групп D_i:

$$D = \bigoplus_{i\in M} D_i, \tag{3}$$

причем D будем рассматривать как обобщенную примарную группу. В каждой группе D_i существует ненулевая допустимая подгруппа C_i, отличная от D_i, $i \in M$. Подгруппа C_i, очевидно, изоморфна аддитивной группе кольца операторов группы Q. Легко видеть, что

$$D_i/C_i \cong H_i \qquad (i \in M). \tag{4}$$

Обозначим через C допустимую подгруппу группы D, порожденную подгруппами C_i, $C = \big[\bigcup_{i\in M} C_i\big]$. Принимая во внимание (3), заключаем, что

$$C = \bigoplus_{i\in M} C_i. \tag{5}$$

Так как C_i – подгруппа D_i, $i \in M$, то из (3) и (5) легко следует, что

$$D/C \cong \bigoplus_{i\in M} D_i/C_i. \tag{6}$$

Теперь на основании соотношений (2), (4) и (6) заключаем, что

$$D/C \cong H. \tag{7}$$

Обозначим через P прямую сумму групп D и A:

$$P = D \oplus A. \tag{8}$$

Поскольку P – прямая сумма обобщенных примарных групп, то будем рассматривать P как обобщенную примарную группу (с той же областью операторов, что и группа Q).

В силу (7) существует гомоморфизм группы D на H с ядром C. Так как C – допустимая подгруппа группы D и H – примарная группа, то согласно предложению 1.24 этот гомоморфизм является операторным. Отсюда, принимая во внимание (1) и (8), заключаем, что существует операторный гомоморфизм группы P на Q с ядром C. Так как D и A суть полные группы без кручения, то на основании (8) и P является полной группой без кручения. Кроме того, ядро гомоморфизма C является редуцированной группой, так как в силу (5) C является прямой суммой K_p-циклических или Z_p-циклических подгрупп.

Таким образом, предложение 2.33 доказано.

2.34. *Если подгруппа C группы G и факторгруппа G/C являются редуцированными группами, то редуцированной будет и группа G.*

Доказательство. Пусть Q есть максимальная полная подгруппа группы G. Рассмотрим естественный гомоморфизм φ группы G на факторгруппу G/C. Согласно предложению 2.4 образом полной группы Q при гомоморфизме

φ является полная группа. Но факторгруппа G/C не содержит полных подгрупп, отличных от нулевой, так как по условию она является редуцированной. Следовательно, Q отображается в нулевую подгруппу группы G/C. Отсюда делаем вывод, что ядро C гомоморфизма φ содержит Q. Но по условию C является редуцированной группой, следовательно, Q является нулевой подгруппой группы C. Таким образом, максимальная полная подгруппа Q группы G является нулевой группой. Это означает, что G является редуцированной группой.

2.35. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{i \in M} G_i \tag{1}$$

– прямое разложение абелевой группы G. Пусть, далее, каждому прямому слагаемому G_i разложения (1) *поставлена в соответствие подгруппа C_i такая, что факторгруппа G_i/C_i является полной группой. Обозначим через C подгруппу группы G, порожденную подгруппами C_i, $C = \big[\bigcup\limits_{i \in M} C_i\big]$. Тогда факторгруппа G/C является полной группой.*

Доказательство. Принимая во внимание, что $C = \big[\bigcup\limits_{i \in M} C_i\big]$ и $C_i \subset G_i$, $i \in M$, мы на основании (1) заключаем, что имеет место прямое разложение

$$C = \bigoplus_{i \in M} C_i. \tag{2}$$

Из того, что C_i является подгруппой группы G_i для всякого $i \in M$, следует, что факторгруппа $\big(\bigoplus\limits_{i \in M} G_i\big)/\big(\bigoplus\limits_{i \in M} C_i\big)$ изоморфна группе $\bigoplus\limits_{i \in M} G_i/C_i$ и потому согласно (1) и (2) имеет место соотношение

$$G/C \cong \bigoplus_{i \in M} G_i/C_i. \tag{3}$$

Так как по условию G_i/C_i есть полная группа для всякого $i \in M$, то на основании (3) заключаем, что факторгруппа G/C разложима в прямую сумму полных подгрупп. Отсюда согласно предложению 2.13 следует, что факторгруппа G/C является полной группой.

2.36. *Пусть Q – полная абелева группа и S – ненулевая подгруппа группы $Q[p]$. Тогда существует полная примарная подгруппа C группы Q, удовлетворяющая условию $C[p] = S$.*

Доказательство. Так как S – ненулевая подгруппа группы $Q[p]$, то S разлагается в прямую сумму циклических подгрупп порядка p; пусть

$$S = \bigoplus_{i \in M} S_i \tag{1}$$

– одно из таких разложений. Легко видеть, что в полной группе Q существует примарная (относительно p) квазициклическая подгруппа C_i, содержащая S_i, $i \in M$. Так как S_i – подгруппа порядка p квазициклической группы C_i, то

$$C_i[p] = S_i \qquad (i \in M). \tag{2}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что имеет место соотношение

$$C_i \cap \Big[\bigcup_{k\neq i} C_k\Big] = \{0\} \qquad (i \in M). \tag{3}$$

Рассмотрим подгруппу C, $C = \big[\bigcup\limits_{i\in M} C_i\big]$, группы Q. В силу (3) группа C разлагается в прямую сумму подгрупп C_i:

$$C = \bigoplus_{i\in M} C_i. \tag{4}$$

Из (4) легко следует равенство

$$C[p] = \bigoplus_{i\in M} C_i[p]. \tag{5}$$

На основании (1), (2) и (5) заключаем, что

$$C[p] = S.$$

Далее, согласно (4) C является прямой суммой квазициклических примарных (относительно p) групп. Следовательно, C есть примарная (относительно p) группа. Наконец, из (4) в силу предложения 2.13 следует, что C является полной группой.

Предложение 2.37, которое мы сейчас докажем, будет использовано только в § 9 при доказательстве предложения 9.2.

2.37. *Пусть G – бесконечная подгруппа обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы G' такая, что факторгруппа G'/G является полной группой. Пусть, далее, заданы кардинальные числа $\mathfrak{m}^*$ и $\mathfrak{n}$, удовлетворяющие условиям*

(*a*) $$|G| \leqslant \mathfrak{n} \leqslant |G| + |(G'/G)[p]\,|;$$

(*b*) $$\mathfrak{m}^* \leqslant |(G'/G)[p]\,|,$$

причем если $\mathfrak{m}^*$ – конечное число, то $\mathfrak{m}^*$ является степенью p.

Тогда существует подгруппа H группы G' и подгруппа C группы H со следующими свойствами:

(u_1) *G является подгруппой группы C и факторгруппа C/G является полной примарной группой;*

(u_2) *факторгруппа H/C есть полная примарная группа, удовлетворяющая условию $|(H/C)[p]\,| = \mathfrak{m}^*$;*

(u_3) $|C| = \mathfrak{n}$;

(u_4) *факторгруппа H/G является полной примарной группой.*

Доказательство. 1°. Рассмотрим случай, когда

$$|G| = \mathfrak{n}. \tag{1}$$

В этом случае полагаем

$$C = G. \tag{2}$$

Обозначим через A факторгруппу G'/G. На основании условия (b) заключаем, что существует подгруппа V группы $A[p]$, удовлетворяющая условию

$$|V| = \mathfrak{m}^*. \tag{3}$$

По условию группа A является полной. Так как V – подгруппа группы $A[p]$, то согласно предложению 2.36 существует полная примарная подгруппа B группы A, удовлетворяющая условию

$$B[p] = V. \tag{4}$$

Обозначим через H полный прообраз группы B при естественном гомоморфизме группы G' на факторгруппу A, $A = G'/G$. Тогда

$$H/G \cong B. \tag{5}$$

Легко видеть, что группы H и C обладают свойствами (u_1) – (u_4). Действительно, свойство (u_1) имеет место в силу (2). Так как B – полная примарная группа, то свойство (u_2) непосредственно следует из соотношений (2), (5), (4) и (3). Из равенств (1) и (2) вытекает равенство (u_3). Наконец, свойство (u_4) имеет место в силу (5), поскольку B – полная примарная группа.

2°. Рассмотрим случай, когда

$$|G| < \mathfrak{n}. \tag{6}$$

В этом случае из условия (a) следует, что

$$\mathfrak{n} \leqslant |(G'/G)[p]\,|. \tag{7}$$

Так как G – бесконечная группа, то из условия (a) следует, что $\mathfrak{n}$ является бесконечным кардинальным числом. Поэтому из (7) и условия (b) следует неравенство

$$\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^* \leqslant |(G'/G)[p]\,|. \tag{8}$$

На основании соотношения (8) заключаем, что существуют подгруппы Z и E группы $A[p]$, где $A = G'/G$, удовлетворяющие условиям

$$|Z| = \mathfrak{n}, \tag{9}$$

$$|E| = \mathfrak{m}^*, \tag{10}$$

$$Z \cap E = \{0(A)\}. \tag{11}$$

Так как по условию A – полная группа и Z, E – подгруппы группы $A[p]$, то в силу предложения 2.36 существуют полные примарные подгруппы S и D группы A, удовлетворяющие условиям

$$S[p] = Z, \tag{12}$$

$$D[p] = E. \tag{13}$$

В силу (12) и (13) равенство (11) можно записать в виде

$$S[p] \cap D[p] = \{0(A)\}. \tag{14}$$

Обозначим через B подгруппу группы A, порожденную группами S и D:

$$B = [S,\, D]. \tag{15}$$

Так как S и D – примарные (относительно p) группы, то на основании соотношений (14) и (15) заключаем, что

$$B = S \oplus D. \tag{16}$$

Обозначим через H и C полные прообразы соответственно групп B и S при естественном гомоморфизме группы G' на факторгруппу $A = G'/G$. Тогда

$$H/G = B, \tag{17}$$

$$C/G = S. \tag{18}$$

Докажем, что группы H и C обладают свойствами (u_1) – (u_4). Так как S – полная примарная группа, то на основании (18) заключаем, что C обладает свойством (u_1).

Принимая во внимание (16), (17) и (18) и используя вторую теорему об изоморфизме, получим

$$H/C \cong (H/G)/(C/G) = B/S \cong D,$$

т.е.

$$H/C \cong D. \tag{19}$$

Отсюда, поскольку D – полная примарная группа, следует, что факторгруппа H/C является полной примарной группой. Кроме того, на основании (10), (13) и (19) заключаем, что

$$|(H/C)[p]\,| = \mathfrak{m}^*.$$

Таким образом, группы H и C обладают свойством (u_2).

Сопоставляя (9) и (12), получим $|S[p]\,| = \mathfrak{n}$. Отсюда, поскольку $\mathfrak{n}$ – бесконечное кардинальное число и S – полная примарная группа, в силу предложения 2.21 следует, что

$$|S| = \mathfrak{n}. \tag{20}$$

На основании (6), (18) и (20) заключаем, что

$$|C| = \mathfrak{n},$$

т.е. группа C обладает свойством (u_3).

Так как S и D – полные примарные группы и согласно (15) $B = [S, D]$, то в силу предложения 2.13 B также является полной примарной группой. Отсюда в силу (17) следует, что факторгруппа H/G является полной примарной группой, т.е. группа H обладает свойством (u_4).

Таким образом, предложение 2.37 доказано.

§ 3. Изотипные и сервантные подгруппы

3.1. Определение. Подгруппа C абелевой группы G называется *сервантной* подгруппой группы G, если для любого натурального числа n имеет место равенство

$$(a) \qquad nC = C \cap nG.$$

3.2. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа. Существуют порядковые числа β, удовлетворяющие условию*

$$(b) \qquad p^{\beta}G = p^{\beta+1}G.$$

Наименьшее среди порядковых чисел β, удовлетворяющих условию (b), будем обозначать символом $\tau^*(G)$.

Доказательство. Если G – полная группа, то $G = pG$ и поэтому любое порядковое число β удовлетворяет условию (b). Если же группа G не является полной, то подгруппы $p^{\alpha}G$ образуют убывающую последовательность

$$G \supset pG \supset p^2G \supset \ldots \supset p^{\alpha}G \supset p^{\alpha+1}G \supset \ldots \qquad (1)$$

Легко видеть, что множество всех порядковых чисел α, для которых

$$p^{\alpha}G \neq p^{\alpha+1}G,$$

имеет мощность, не бóльшую, чем мощность группы G. Поэтому существуют порядковые числа β, удовлетворяющие условию (b).

Нетрудно видеть, что $\tau^*(G)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\tau^*(G) \leqslant \omega \cdot \tau(G).$$

3.3. *Если G – обобщенная примарная (относительно p) группа, то $p^{\tau^*(G)}G$ является полной обобщенной примарной группой, причем если G – редуцированная группа, то имеет место равенство*

$$p^{\tau^*(G)}G = \{0\}. \qquad (1)$$

Доказательство. В силу определения $\tau^*(G)$

$$p^{\tau^*(G)}G = p(p^{\tau^*(G)}G).$$

Отсюда в силу предложения 2.3 следует, что $p^{\tau^*(G)}G$ является полной группой. (Отметим при этом, что в силу 1.9 $p^{\tau^*(G)}G$ является допустимой подгруппой группы G.) Если G – редуцированная группа, то она не имеет полных подгрупп, отличных от нулевой, и поэтому имеет место равенство (1).

Легко убедиться также в том, что $p^{\tau^*(G)}G$ является максимальной полной подгруппой группы G.

3.4. Определение. Подгруппа C обобщенной примарной (относительно p) группы G называется *изотипной* подгруппой группы G, если для любого порядкового числа α имеет место равенство

$$p^\alpha C = C \cap p^\alpha G.$$

3.5. *Пусть C – (допустимая) подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, удовлетворяющая условию*

$$(e) \qquad p^n C \supset C \cap p^n G$$

при любом натуральном n. Тогда C – сервантная подгруппа группы G.

Доказательство. Пусть k – любое натуральное число. Его можно представить в виде $k = p^n m$, где m – натуральное число, взаимно простое с p. Поскольку G, C – обобщенные примарные группы, то в силу предложения 1.12 $mG = G$ и $mC = C$. Следовательно, $kG = p^n(mG) = p^n G$ и $kC = p^n(mC) = p^n C$. Отсюда, принимая во внимание условие (e), получим

$$kC = p^n C \supset C \cap p^n G = C \cap kG,$$

т.е.

$$kC \supset C \cap kG. \tag{1}$$

Так как $kC \subset C$ и $kC \subset kG$, то из (1) следует равенство

$$kC = C \cap kG.$$

Этим доказано, что C является сервантной подгруппой группы G.

3.6. *Пусть C – подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, удовлетворяющая условию*

$$p^\alpha C \supset C \cap p^\alpha G \tag{1}$$

при любом $\alpha \leqslant \tau^*(C)$. Тогда C является изотипной подгруппой группы G.

Доказательство. Докажем, что соотношение (1) имеет место также для всякого $\alpha > \tau^*(C)$. Из определения $\tau^*(C)$ легко следует, что $p^\alpha C = p^{\tau^*(C)}C$ при

$\alpha > \tau^*(C)$. Кроме того, по условию $p^{\tau^*(C)}C \supset C \cap p^{\tau^*(C)}G$. Следовательно,

$$p^\alpha C \supset C \cap p^{\tau^*(C)}G \supset C \cap p^\alpha G$$

при $\alpha > \tau^*(C)$. Таким образом, соотношение (1) имеет место для любого порядкового числа α. Отсюда, поскольку $p^\alpha C$ – подгруппа групп C и $p^\alpha G$, следует, что $p^\alpha C = C \cap p^\alpha G$ для любого порядкового числа α. Следовательно, C является изотипной подгруппой группы G.

3.7. *Всякая изотипная подгруппа обобщенной примарной группы является также сервантной подгруппой этой группы.*

Это предложение непосредственно следует из предложения 3.5.

3.8. *Каждая сервантная подгруппа обобщенной примарной группы, не содержащей элементов бесконечной высоты, является ее изотипной подгруппой.*

Доказательство. Пусть A – обобщенная примарная (относительно p) группа, не содержащая элементов бесконечной высоты, и C – ее сервантная подгруппа. Тогда равенство

$$C \cap p^\alpha A = p^\alpha C \tag{1}$$

имеет место для любого $\alpha < \omega$. Это равенство имеет место также при $\alpha \geqslant \omega$. Действительно, группа A не содержит элементов бесконечной высоты, и потому этим свойством обладает также каждая ее подгруппа. Отсюда следует, что

$$p^\alpha C = p^\alpha A = \{0\} \qquad (\alpha \geqslant \omega). \tag{2}$$

На основании (2) заключаем, что равенство (1) имеет место также при $\alpha \geqslant \omega$. Таким образом, C является изотипной подгруппой группы A.

3.9. *Пусть C – подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, удовлетворяющая условию*

$$p^{\alpha+1}C \supset p^\alpha C \cap p^{\alpha+1}G \qquad (\alpha < \tau^*(C)). \tag{1}$$

Тогда C является изотипной подгруппой группы G.

Доказательство. Докажем методом трансфинитной индукции, что

$$p^\alpha C \supset C \cap p^\alpha G \tag{2}$$

при всяком $\alpha \leqslant \tau^*(C)$. Этим в силу предложения 3.6 предложение 3.9 будет доказано. Соотношение (2), очевидно, имеет место при $\alpha = 0$. Предположим, что оно верно всякий раз, когда $\alpha < \beta$, где $\beta \leqslant \tau^*(C)$, и докажем, что тогда оно верно также при $\alpha = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число. В силу (1) $p^\beta C \supset p^{\beta-1}C \cap p^\beta G$. Кроме того, по индуктивному предположению $p^{\beta-1}C \supset C \cap p^{\beta-1}G$. Следовательно,

$$p^\beta C \supset (C \cap p^{\beta-1}G) \cap p^\beta G = C \cap (p^{\beta-1}G \cap p^\beta G) = C \cap p^\beta G,$$

т.е. $p^\beta C \supset C \cap p^\beta G$.

2-й случай: β – предельное число $\leqslant \tau^*(C)$. В этом случае $p^\beta C = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha C$. По индуктивному предположению $p^\alpha C \supset C \cap p^\alpha G$ при $\alpha < \beta$. Следовательно, $p^\alpha C \supset C \cap p^\beta G$, откуда $p^\beta C = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha C \supset C \cap p^\beta G$, т.е. (2) имеет место при $\alpha = \beta$.

Этим доказано, что (2) имеет место при $\alpha \leqslant \tau^*(C)$. Следовательно, доказано также предложение 3.9.

3.10. *Пусть C – подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, удовлетворяющая условию*

$$p^n C \supset p^{n-1} C \cap p^n G$$

при любом натуральном числе n. Тогда C является сервантной подгруппой группы G.

Это предложение доказывается так же, как и предыдущее.

3.11. *Пусть C – изотипная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда соотношения*

$$p^\alpha C = p^\beta C \cap p^\alpha G, \tag{a}$$

$$C^\alpha = C^\beta \cap G^\alpha \tag{b}$$

имеют место для любых двух порядковых чисел α и β, удовлетворяющих условию $\beta \leqslant \alpha$.

Доказательство. 1°. Так как по условию C – изотипная подгруппа группы G, то $p^\alpha C = C \cap p^\alpha G$. Кроме того, очевидно, $p^\beta C \subset C$. Следовательно,

$$p^\alpha C \supset p^\beta C \cap p^\alpha G. \tag{1}$$

Теперь, поскольку $p^\alpha C$ – подгруппа групп $p^\alpha G$ и $p^\beta C$ при $\beta \leqslant \alpha$, из (1) следует соотношение (a).

2°. Так как $C^\alpha = p^{\omega\alpha} C$, $C^\beta = p^{\omega\beta} C$ и $G^\alpha = p^{\omega\alpha} G$, то равенство ($b$) можно записать в виде

$$p^{\omega\alpha} C = p^{\omega\beta} C \cap p^{\omega\alpha} G.$$

Но по доказанному в пункте 1° это равенство имеет место при $\beta \leqslant \alpha$, поскольку $\omega\beta \leqslant \omega\alpha$ при $\beta \leqslant \alpha$.

3.12. *Пусть C – сервантная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда соотношение*

$$p^n C = p^m C \cap p^n G$$

имеет место для любых двух натуральных чисел m и n, удовлетворяющих условию $m \leqslant n$.

Это предложение доказывается так же, как и предыдущее.

3.13. *Пусть C – изотипная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда соотношение*

$$C^\alpha[p] \cap G^\beta[p] = C^\beta[p] \tag{1}$$

имеет место для любых двух порядковых чисел, удовлетворяющих условию $\alpha \leqslant \beta$.

Доказательство. Так как по условию C – изотипная подгруппа группы G, то в силу предложения 3.11 имеет место равенство

$$C^\alpha \cap G^\beta = C^\beta \qquad (\alpha \leqslant \beta). \tag{2}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$(C^\alpha \cap G^\beta)[p] = C^\alpha[p] \cap G^\beta[p]. \tag{3}$$

Теперь, сопоставляя (2) и (3), получим соотношение (1).

3.14. *Пусть C – изотипная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда для любого порядкового числа β группа $p^\beta C$ является изотипной подгруппой группы $p^\beta G$.*

Доказательство. Согласно определению 3.4 $p^\beta C$ будет изотипной подгруппой группы $p^\beta G$, если для всякого порядкового числа α имеет место соотношение $p^\alpha(p^\beta C) = p^\beta C \cap p^\alpha(p^\beta G)$, т.е. если $p^{\beta+\alpha} C = p^\beta C \cap p^{\beta+\alpha} G$. Но последнее соотношение в силу предложения 3.11 имеет место для любых порядковых чисел α и β.

3.15. *Пусть C – сервантная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда для любого натурального числа n $p^n C$ является сервантной подгруппой группы $p^n G$.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 3.14.

3.16. *Для того чтобы подгруппа C обобщенной примарной (относительно p) группы G была изотипной в G, необходимо и достаточно, чтобы для всякого порядкового числа α $p^\alpha C$ была сервантной подгруппой группы $p^\alpha G$.*

Доказательство. Если C – изотипная подгруппа группы G, то в силу предложения 3.14 $p^\alpha C$ является изотипной и, значит, согласно предложению 3.7 сервантной подгруппой группы $p^\alpha G$.

Обратно, если $p^\alpha C$ – сервантная подгруппа группы $p^\alpha G$ при любом α, то $p(p^\alpha C) = p^\alpha C \cap p(p^\alpha G)$, т.е. при любом α имеет место равенство

$$p^{\alpha+1} C = p^\alpha C \cap p^{\alpha+1} G.$$

Отсюда в силу предложения 3.9 следует, что C является изотипной подгруппой группы G.

3.17. *Пусть C – изотипная подгруппа группы B и B – изотипная подгруппа обобщенной примарной группы G. Тогда C является изотипной подгруппой группы G.*

Доказательство. Так как C – изотипная подгруппа группы B, то

$$p^\alpha C = C \cap p^\alpha B$$

для любого α. Точно так же $p^\alpha B = B \cap p^\alpha G$. Следовательно,

$$p^\alpha C = C \cap p^\alpha B = C \cap (B \cap p^\alpha G) = (C \cap B) \cap p^\alpha G = C \cap p^\alpha G.$$

Таким образом, $p^\alpha C = C \cap p^\alpha G$ для любого порядкового числа α, т.е. C – изотипная подгруппа группы G.

3.18. *Если C – сервантная подгруппа группы B и B – сервантная подгруппа абелевой группы G, то C является сервантной подгруппой группы G.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 3.17.

3.19. *Изотипная подгруппа C обобщенной примарной группы G будет изотипной также в любой подгруппе группы G, содержащей C.*

Доказательство. Пусть B есть подгруппа группы G, содержащая C. Так как C – изотипная подгруппа группы G, то $p^\alpha C \supset C \cap p^\alpha G$. Но $G \supset B$, следовательно, $p^\alpha C \supset C \cap p^\alpha B$ для любого порядкового числа α. Поэтому согласно предложению 3.6 C является изотипной подгруппой группы B.

Аналогично доказывается следующее предложение.

3.20. *Если C – сервантная подгруппа группы G, то C будет сервантной и в любой подгруппе группы G, содержащей C.*

3.21. *Полная подгруппа обобщенной примарной группы является изотипной подгруппой этой группы.*

Доказательство. Пусть C есть полная подгруппа обобщенной примарной группы G. Из соотношения $C \subset G$ следует, что $p^\alpha C \subset p^\alpha G$ для любого α. По условию C является полной группой, следовательно, $pC = C$ и $p^\alpha C = C$. Отсюда следует, что $C \subset p^\alpha G$. Поэтому

$$C \cap p^\alpha G = C = p^\alpha C,$$

т.е. согласно определению 3.4 C является изотипной подгруппой группы G.

Аналогично доказывается следующее предложение.

3.22. *Полная подгруппа абелевой группы является сервантной подгруппой этой группы.*

3.23. *Прямое слагаемое обобщенной примарной группы является изотипной подгруппой этой группы.*

Доказательство. Пусть C есть прямое слагаемое обобщенной примарной группы G: $G = C \oplus H$. Тогда $p^\alpha G = p^\alpha C \oplus p^\alpha H$ для всякого порядкового числа α. Следовательно,

$$C \cap p^\alpha G = C \cap (p^\alpha C \oplus p^\alpha H),$$

откуда $C \cap p^\alpha G = p^\alpha C$, так как $p^\alpha C \subset C$ и $C \cap p^\alpha H = \{0\}$. Таким образом, согласно определению 3.4 C является изотипной подгруппой группы G.

Аналогично доказывается следующее предложение.

3.24. *Прямое слагаемое абелевой группы является сервантной подгруппой этой группы.*

3.25. *Пусть C – сервантная подгруппа группы A, B – подгруппа группы A, содержащая C, и факторгруппа B/C является сервантной подгруппой факторгруппы A/C. Тогда B является сервантной подгруппой группы A.*

Это предложение доказано в работе [6] (лемма 2).

3.26. *Пусть C – сервантная подгруппа группы A, B – подгруппа группы A, содержащая C, и факторгруппа B/C является полной группой. Тогда B является сервантной подгруппой группы A.*

Это предложение непосредственно следует из предложений 3.22 и 3.25.

3.27. *Максимальная периодическая подгруппа абелевой группы является ее сервантной подгруппой.*

Доказательство. Пусть H есть максимальная периодическая подгруппа абелевой группы G и x – элемент пересечения $H \cap nG$, где n – заданное натуральное число. Так как $x \in nG$, то существует элемент $g \in G$ такой, что

$$ng = x. \tag{1}$$

Но x имеет конечный порядок, так как принадлежит группе H. Отсюда следует, что g также имеет конечный порядок и, значит,

$$g \in H. \tag{2}$$

Условия (1) и (2) показывают, что $x \in nH$. Этим доказано, что $H \cap nG \subset nH$. Следовательно,

$$H \cap nG = nH. \tag{3}$$

Так как равенство (3) имеет место при любом натуральном числе n, то H является сервантной подгруппой группы G.

3.28. *Пусть M есть множество подгрупп обобщенной примарной группы G, удовлетворяющее следующим условиям:*

(a) *любая группа, принадлежащая M, является изотипной подгруппой группы G;*

(b) *для любых двух групп A и B, принадлежащих M, существует в M группа, содержащая и A, и B.*

Обозначим через C объединение подгрупп, принадлежащих M. Тогда C является изотипной подгруппой группы G.

Доказательство. Из условия (b) легко следует, что множество C является группой. Также легко проверить, что C является допустимой подгруппой группы G. Пусть задано произвольное порядковое число α. Докажем, что $C \cap p^\alpha G \subset p^\alpha C$. Пусть c есть произвольный элемент пересечения $C \cap p^\alpha G$. Из определения C следует, что существует группа $A \in M$ такая, что $c \in A$. Из условия (a) следует, что $A \cap p^\alpha G = p^\alpha A$. Следовательно, $c \in p^\alpha A$. Затем из соотношения $A \subset C$ следует, что $p^\alpha C \supset C \cap p^\alpha G$ при любом α. Следовательно, в силу предложения 3.6 C является изотипной подгруппой группы G.

Аналогично доказывается следующее предложение.

3.29. *Пусть M – множество сервантных подгрупп абелевой группы G, удовлетворяющее условию 3.28(b). Обозначим через C объединение подгрупп группы G, принадлежащих M. Тогда C является сервантной подгруппой группы G.*

3.30. *Пусть G – обобщенная примарная* (*относительно p*) *группа. Если среди элементов класса смежности $x + pG$ элемент x имеет наименьший порядок*[14], *то* (*допустимая*) *подгруппа $[x]$ группы G сервантна в G.*

Доказательство. Если $x = 0$, то нулевая подгруппа $[x]$, очевидно, сервантна в G. Поэтому мы будем предполагать, что $x \neq 0$. Докажем, что для любого натурального числа n имеет место соотношение

$$p^n[x] \supset [x] \cap p^n G. \tag{1}$$

Предположим, что y – ненулевой элемент пересечения $[x] \cap p^n G$, и докажем, что $y \in p^n[x]$. Так как $y \in [x]$, то $y = kx$, где k – число, принадлежащее кольцу операторов группы G. Число k можно представить в виде

$$k = mp^s,$$

где m – число кольца операторов группы G, взаимно простое с p, и s – целое неотрицательное рациональное число. Поскольку число m взаимно просто с p, то число $\frac{1}{m}$ также принадлежит кольцу операторов группы G.

Рассмотрим случай, когда $s < n$. Так как число $\frac{1}{m}$ принадлежит кольцу операторов и $y = kx \in p^n G$, то $\frac{1}{m}(kx) \in p^n G$, т.е.

$$p^s x \in p^n G.$$

Отсюда, поскольку $s < n$, следует, что существует элемент $g \in G$ такой, что $p^s x = p^{s+1} g$, или

$$p^s(x - pg) = 0. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$p^s x \neq 0, \tag{3}$$

так как $m(p^s x) = y \neq 0$. Соотношения (2) и (3) показывают, что порядок элемента $x - pg$, принадлежащего классу смежности $x + pG$, меньше порядка x, что противоречит условию. Таким образом, случай, когда $s < n$, невозможен. Следовательно, $s \geqslant n$ и $y = p^s(mx) \in p^n[x]$. Этим соотношение (1) доказано. Поэтому на основании предложения 3.5 заключаем, что подгруппа $[x]$ сервантна в G. Предложение 3.30 доказано.

Если G – неполная обобщенная примарная (относительно p) группа, то $G \neq pG$. Поэтому на основании 3.30 заключаем, что имеет место следующее важное предложение.

3.31. *Любая неполная обобщенная примарная группа имеет ненулевые циклические* (*допустимые*) *сервантные подгруппы.*

3.32. *Пусть C – сервантная подгруппа абелевой группы G, $\overline{G} = G/C$ и n – натуральное число. Тогда полным прообразом подгруппы $\overline{G}[n]$ при естественном гомоморфизме группы G на факторгруппу $\overline{G}$ является подгруппа $\big[G[n], C\big]$ группы G.*

[14] Если x – элемент группы G, то *порядком* элемента x называется наименьшее натуральное число n, для которого $nx = 0$. Если же для любого натурального n выполнено $nx \neq 0$, то x называется *элементом бесконечного порядка.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in \overline{G}[n]$; надо доказать, что любой элемент x группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$, содержится в $\big[G[n], C\big]$. Так как C – сервантная подгруппа группы G и $nx \in C \cap nG$, то $nx \in nC$, т.е. существует элемент $c \in C$ такой, что $nc = nx$. Следовательно, $n(x-c) = 0$, $x - c \in G[n]$ и, значит, $x \in \big[G[n], C\big]$. Предложение 3.32 доказано.

3.33. *Пусть C – сервантная подгруппа группы G. Тогда для любого натурального числа n имеет место соотношение*

$$(a) \qquad (G/C)[n] \cong G[n]/C[n].$$

Доказательство. В силу предложения 3.32 полным прообразом группы $(G/C)[n]$ при естественном гомоморфизме группы G на факторгруппу G/C является подгруппа $\big[G[n], C\big]$ группы G. Поэтому имеет место соотношение

$$\big[G[n], C\big]\big/ C \cong (G/C)[n]. \tag{1}$$

Так как C – подгруппа группы G, то имеет место равенство

$$C \cap G[n] = C[n]. \tag{2}$$

Применяя первую теорему об изоморфизме и используя (2), получим

$$\big[G[n], C\big]\big/ C \cong G[n]/(C \cap G[n]) = G[n]/C[n],$$

откуда в силу (1) следует соотношение (a).

3.34. *Пусть A и B суть подгруппы абелевой группы G, удовлетворяющие для всякого натурального числа n следующим условиям*:

$$(a) \qquad G = [A, B],$$

$$(b) \qquad C \cap nB \subset nC, \quad \text{где } C = A \cap B.$$

Тогда для всякого натурального числа n имеет место равенство

$$G[n] = \big[A[n], B[n]\big]. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть n – какое-либо натуральное число и $x \in G[n]$; докажем, что $x \in \big[[A[n], B[n]\big]$. В силу условия (a)

$$x = a + b, \quad \text{где } a \in A,\ b \in B. \tag{2}$$

Так как $nx = 0$, то

$$na + nb = 0 \tag{3}$$

и, следовательно, $na = -nb \in nB$. Отсюда заключаем, что $na \in C \cap nB$, откуда согласно условию (b) следует, что $na \in nC$. Соотношение $na \in nC$ показывает, что существует элемент $y \in C$ такой, что

$$ny = na. \tag{4}$$

Так как $y, a \in A$ и согласно (4) $n(a-y)=0$, то

$$a - y \in A[n]. \tag{5}$$

Кроме того,

$$b + y \in B[n], \tag{6}$$

так как $b, y \in B$ и согласно (4) и (3)

$$n(b+y) = nb + ny = nb + na = 0.$$

Элемент x в силу (2) можно представить в виде

$$x = (a-y) + (b+y). \tag{7}$$

Соотношения (5), (6) и (7) показывают, что

$$x \in \bigl[A[n],\, B[n]\bigr].$$

Этим доказано, что

$$G[n] \subset \bigl[A[n],\, B[n]\bigr]. \tag{8}$$

Теперь равенство (1) следует из соотношения (8), так как $A[n]$ и $B[n]$ являются подгруппами группы $G[n]$.

3.35. *Пусть A и B – подгруппы абелевой группы G, удовлетворяющие следующим условиям:*

(*a*) $$G = [A,\, B];$$

(b_1) *пересечение C подгрупп A и B является сервантной подгруппой группы B.*

Тогда для любого натурального числа n имеет место равенство

(*c*) $$G[n] = \bigl[A[n],\, B[n]\bigr].$$

Доказательство. Если выполняется условие (b_1), то будет, очевидно, выполняться также и условие (b) предложения 3.34. Поэтому предложение 3.35 следует из предложения 3.34.

3.36. *Пусть $\{S_i\}_{i\in W(N)}$, $N \leqslant \omega$, есть последовательность подгрупп обобщенной примарной (относительно p) группы G, удовлетворяющая следующим условиям:*

(c_1) $$G = \Bigl[\bigcup_{i<N} S_i\Bigr];$$

(c_2) *пересечение $\left[\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} S_i\right] \cap S_k$ является сервантной подгруппой группы S_k при любом $k \in W(N)$.*

Тогда имеет место соотношение

$$(a) \qquad G[p] = \Big[\bigcup_{i<N} S_i[p]\Big].$$

Доказательство. Обозначим через D_k подгруппу группы G, определяемую соотношением

$$D_k = \left[\bigcup_{i=0}^{k-1} S_i\right] \qquad (0 < k < 1 + N). \tag{1}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$D_k[p] = \left[\bigcup_{i=0}^{k-1} S_i[p]\right] \qquad (0 < k < 1 + N). \tag{2}$$

При $k = 1$, очевидно, равенство (2) верно. Предположим, что оно верно всякий раз, когда $k < n$, где n – натуральное число, меньшее или равное N, и докажем, что тогда оно верно при $k = n$.

В силу (1) $D_n = [D_{n-1}, S_{n-1}]$. Кроме того, согласно условию (c_2) пересечение $D_{n-1} \cap S_{n-1}$ является сервантной подгруппой группы S_{n-1}. Следовательно, в силу предложения 3.35 имеет место равенство

$$D_n[p] = \big[D_{n-1}[p],\, S_{n-1}[p]\big]. \tag{3}$$

По индуктивному предположению имеет место равенство

$$D_{n-1}[p] = \left[\bigcup_{i=0}^{n-2} S_i[p]\right]. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получим

$$D_n[p] = \left[\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i[p]\right].$$

Таким образом, доказано, что соотношение (2) имеет место для любого натурального числа $k \leqslant N$.

Предположим, что $N < \omega$. Тогда $G = D_N$ и

$$G[p] = D_N[p]. \tag{5}$$

Кроме того, в силу (2)

$$D_N[p] = \left[\bigcup_{i=0}^{N-1} S_i[p]\right]. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), получим соотношение (a).

Рассмотрим теперь случай, когда $N = \omega$. Из (1) и условия (c_1) следует, что

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k, \tag{7}$$

т.е. G является объединением вложенных друг в друга подгрупп, принадлежащих возрастающей последовательности $\{D_k\}_{0<k<\omega}$. Из (7) следует равенство

$$G[p] = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k[p],$$

которое в силу (2) можно записать в виде

$$G[p] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\bigcup_{i=0}^{k-1} S_i[p] \right]. \tag{8}$$

На основании (8) заключаем, что имеет место соотношение

$$G[p] = \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i[p] \right].$$

Таким образом, предложение 3.36 доказано.

3.37. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{i \in M} G_i \tag{1}$$

– прямое разложение абелевой группы G и C_i – сервантная подгруппа группы G_i, $i \in M$. Тогда подгруппа C группы G, порожденная подгруппами C_i, является сервантной подгруппой группы G.

Доказательство. Так как $C = \left[\bigcup_{i \in M} C_i \right]$ и $C_i \subset G_i$, $i \in M$, то из (1) следует, что имеет место прямое разложение

$$C = \bigoplus_{i \in M} C_i. \tag{2}$$

Пусть $x \in C \cap nG$, где n – натуральное число. В силу (2)

$$x = \sum_{i \in M} x_i, \quad \text{где } x_i \in C_i. \tag{3}$$

Так как $x \in nG$, то в силу (1) $x_i \in nG_i$, $i \in M$. Следовательно, $x_i \in C_i \cap nG_i$. Но по условию C_i является сервантной подгруппой группы G_i и, значит,

$$C_i \cap nG_i = nC_i.$$

Поэтому

$$x_i \in nC_i \qquad (i \in M). \tag{4}$$

На основании (3) и (4) заключаем, что $x \in nC$. Этим доказано, что

$$C \cap nG \subset nC.$$

Отсюда, поскольку $nC \subset nG$, следует равенство

$$C \cap nG = nC.$$

Таким образом, C является сервантной подгруппой группы G.

В оставшейся части этого параграфа доказаны различные свойства изотипных и плотных подгрупп редуцированных обобщенных примарных групп. Эти свойства будут использованы в седьмом, восьмом и девятом параграфах.

3.38. Определение. Подгруппа C редуцированной обобщенной примарной (относительно p) группы G называется *плотной* подгруппой группы G, если для любого порядкового числа $\beta < \tau^*(G)$ имеет место равенство

$$G = [C,\, p^\beta G]. \tag{c}$$

Оправданием для такого определения является следующее обстоятельство. Любую редуцированную обобщенную примарную (относительно p) группу G можно сделать топологической, принимая в качестве системы окрестностей нуля группы множество $\{p^\alpha G\}_{\alpha\in W(\tau^*(G))}$, причем введенная таким образом топология будет хаусдорфовой, когда $\tau^*(G)$ есть предельное число. При этом если подгруппа C группы G при любом $\beta < \tau^*(G)$ удовлетворяет условию (c), то C будет всюду плотной подгруппой топологизированной таким образом группы G.

3.39. *Пусть C – плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной группы G, для которой $\tau^*(G) > 1$. Тогда факторгруппа G/C является полной группой.*

Доказательство. Так как по условию C является плотной подгруппой группы G и $\tau^*(G) > 1$, то имеет место равенство

$$G = [C,\, pG].$$

Из этого равенства в силу предложения 2.8 следует, что факторгруппа G/C является полной группой.

3.40. *Пусть C – плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной группы G и H – подгруппа группы G, содержащая C. Тогда H также является плотной подгруппой группы G.*

Доказательство. Так как по условию C – плотная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, то имеет место соотношение

$$G = [C,\, p^\beta G] \qquad (\beta < \tau^*(G)). \tag{1}$$

Из (1), поскольку $C \subset H$, следует соотношение

$$G = [H,\, p^\beta G] \qquad (\beta < \tau^*(G)),$$

т.е. H также является плотной подгруппой группы G.

3.41. *Пусть G – редуцированная обобщенная примарная группа, у которой $\tau^*(G)$ является изолированным числом, бо́льшим, чем 1. Тогда любая плотная подгруппа группы G совпадает с G.*

Доказательство. Пусть C – плотная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Положим $\beta = \tau^*(G) - 1$. По условию G – редуцированная группа, и поэтому $p^{\tau^*(G)}G = \{0\}$. Отсюда следует, что $p(p^\beta G) = \{0\}$. Следовательно, отличные от нуля элементы группы $p^\beta G$ имеют порядок p. Далее, поскольку C – плотная подгруппа группы G, имеет место равенство

$$G = [C,\, p^\beta G]. \tag{1}$$

Покажем, что имеет место соотношение

$$p^\beta G \subset C. \tag{2}$$

Предположим, что $x \in p^\beta G$, и докажем, что тогда $x \in C$. По условию $\tau^*(G) > 1$, следовательно, $\beta \geqslant 1$. Поэтому существует элемент $y \in G$ такой, что

$$py = x. \tag{3}$$

В силу (1) y можно представить в виде

$$y = c + d, \quad \text{где } c \in C,\ d \in p^\beta G. \tag{4}$$

Так как отличные от нуля элементы группы $p^\beta G$ имеют порядок p, то $pd = 0$, откуда в силу (4) получим

$$py = pc. \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что $x = pc$, т.е. $x \in C$. Этим соотношение (2) доказано.

Из (1) и (2) следует, что $G = C$.

3.42. *Пусть C – ненулевая изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной группы G. Тогда имеют место равенства*

$$\tau^*(C) = \tau^*(G), \tag{1}$$

$$\tau(C) = \tau(G). \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (2) следует из (1); поэтому надо доказать только равенство (1).

Если $\tau^*(G) = 1$, то также $\tau^*(C) = 1$, так как по условию C является ненулевой подгруппой группы G. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\tau^*(G) > 1$. Пусть задано порядковое число $\beta < \tau^*(G)$, $\beta > 0$. Так как C – плотная подгруппа группы G, то

$$G = [C,\, p^\beta G]. \tag{3}$$

Кроме того,

$$C \cap p^\beta G = p^\beta C. \tag{4}$$

Используя (3) и (4) и применяя первую теорему об изоморфизме, получим

$$G/C = [C,\, p^\beta G]/C \cong p^\beta G/(C \cap p^\beta G) = p^\beta G/p^\beta C,$$

т.е.

$$G/C \cong p^\beta G/p^\beta C. \tag{5}$$

Так как $\beta > 0$, то из (3) имеем $G = [C,\, pG]$. Из этого равенства в силу предложения 2.8 следует, что G/C является полной группой. Если мы предположим, что $p^\beta C = \{0\}$, то из (5) будет следовать, что $p^\beta G$ является полной группой. Так как $p^\beta G \neq \{0\}$ (поскольку $\beta < \tau^*(G)$), то это невозможно, и, значит,

$$p^\beta C \neq \{0\} \quad \text{при } \beta < \tau^*(G). \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\tau^*(C) \geqslant \tau^*(G)$. С другой стороны, $\tau^*(C) \leqslant \tau^*(G)$, так как C является подгруппой редуцированной группы G. Отсюда заключаем, что $\tau^*(C) = \tau^*(G)$.

3.43. *Пусть C – изотипная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, удовлетворяющая при всяком $\beta < \tau^*(C)$ условию*

$$(a) \qquad G = [C, p^\beta G].$$

Тогда имеет место соотношение

$$(b) \qquad p^\alpha G = [p^\alpha C, p^\beta G] \qquad (\alpha \leqslant \beta < \tau^*(C)).$$

Доказательство. Пусть $g \in p^\alpha G$. Согласно условию (a) $g = c + b$, где $c \in C,\ b \in p^\beta G$. Следовательно, при $\alpha \leqslant \beta$ $c = g - b \in p^\alpha G$ и $c \in C \cap p^\alpha G$. Кроме того, $C \cap p^\alpha G = p^\alpha C$, так как по условию C – изотипная подгруппа группы G. Поэтому $c \in p^\alpha C$ и $g = c + b \in [p^\alpha C, p^\beta G]$. Этим доказано, что $p^\alpha G \subset [p^\alpha C, p^\beta G]$ при $\alpha \leqslant \beta < \tau^*(C)$. Отсюда, поскольку при $\alpha \leqslant \beta$ $p^\alpha C$ и $p^\beta G$ суть подгруппы группы $p^\alpha G$, следует соотношение (b).

3.44. *Если C – ненулевая изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной (относительно p) группы G, то имеет место соотношение*

$$p^\alpha G = [p^\alpha C, p^\beta G] \qquad (\alpha \leqslant \beta < \tau^*(G)).$$

Это предложение непосредственно следует из предложений 3.42 и 3.43.

3.45. *Пусть C и G суть подгруппы редуцированной обобщенной примарной группы H, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a) *C есть изотипная и плотная подгруппа группы H;*

(b) *C является подгруппой группы G и факторгруппа G/C является полной группой.*

Тогда G является редуцированной обобщенной примарной группой со следующими свойствами:

(a_1) *C является изотипной подгруппой группы G;*

(a_2) *G является плотной подгруппой группы H;*

(a_3) *G является изотипной подгруппой группы H;*

(a_4) *C является плотной подгруппой группы G.*

Доказательство. По условию G – подгруппа редуцированной обобщенной примарной группы H. Поэтому G также является редуцированной обобщенной примарной группой.

В силу предложения 3.19 свойство (a_1) вытекает из условий (a) и (b). Свойство (a_2) в силу предложения 3.40 непосредственно следует из условий (a) и (b).

Докажем, что группа G обладает следующими свойствами:

$$
\begin{array}{lll}
(t_1) & p^\alpha G = G \cap p^\alpha H & \big(\alpha \in W(\tau^*(G))\big); \\
(t_2) & G = [C, p^\alpha G] & \big(\alpha \in W(\tau^*(G))\big); \\
(t_3) & G/C \cong p^\alpha G / p^\alpha C & \big(\alpha \in W(\tau^*(G))\big).
\end{array}
$$

При $\alpha = 0$ соотношения (t_1), (t_2) и (t_3), очевидно, верны. Допустим, что эти соотношения верны всякий раз, когда $\alpha < \beta$, где β – порядковое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \beta < \tau^*(G)$, и докажем, что тогда эти соотношения верны также при $\alpha = \beta$.

Докажем, что равенство (t_1) имеет место при $\alpha = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число. Согласно условию (a) C является изотипной подгруппой группы H. Следовательно, в силу 3.14 $p^{\beta-1}C$ является изотипной подгруппой группы $p^{\beta-1}H$. Кроме того, факторгруппа $p^{\beta-1}G/p^{\beta-1}C$ является полной группой, так как согласно условию (b) G/C является полной группой и по индуктивному предположению соотношение (t_3) имеет место при $\alpha = \beta - 1$. Поэтому в силу предложения 3.26 $p^{\beta-1}G$ является сервантной подгруппой группы $p^{\beta-1}H$. Отсюда следует, что $p(p^{\beta-1}G) = p^{\beta-1}G \cap p(p^{\beta-1}H)$, или

$$p^\beta G = p^{\beta-1}G \cap p^\beta H. \tag{1}$$

По индуктивному предположению $p^{\beta-1}G = G \cap p^{\beta-1}H$. Заменяя в равенстве (1) группу $p^{\beta-1}G$ через $G \cap p^{\beta-1}H$, получим

$$p^\beta G = G \cap p^{\beta-1}H \cap p^\beta H = G \cap p^\beta H,$$

т.е.

$$p^\beta G = G \cap p^\beta H. \tag{2}$$

2-й случай: β – предельное число. По индуктивному предположению

$$p^\alpha G = G \cap p^\alpha H$$

при любом $\alpha < \beta$, откуда следует, что

$$p^\alpha G \supset G \cap p^\beta H \qquad (\alpha < \beta).$$

На основании последнего соотношения и равенства $p^\beta G = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha G$ заключаем, что

$$p^\beta G \supset G \cap p^\beta H. \tag{3}$$

С другой стороны,
$$p^\beta G \subset G \cap p^\beta H, \tag{4}$$
так как, очевидно, $p^\beta G \subset G$ и $p^\beta G \subset p^\beta H$. Из соотношений (3) и (4) следует, что равенство (2) имеет место также и во втором случае.

Докажем, что равенство (t_2) имеет место при $\alpha = \beta$. Согласно условию (a) C является плотной подгруппой группы H, и поэтому
$$H = [C,\, p^\beta H]. \tag{5}$$
Пусть g есть произвольный элемент группы G. В силу (5) элемент g можно представить в следующем виде:
$$g = c + h, \quad \text{где } c \in C,\ h \in p^\beta H. \tag{6}$$
Следовательно, $h = g - c \in G \cap p^\beta H$. Отсюда на основании равенства (2) заключаем, что
$$h \in p^\beta G. \tag{7}$$
Условия (6) и (7) показывают, что $g \in [C,\, p^\beta G]$. Этим доказано, что
$$G \subset [C,\, p^\beta G].$$
Но, очевидно, $G \supset p^\beta G$ и согласно условию (b) $G \supset C$. Поэтому имеет место равенство
$$G = [C,\, p^\beta G], \tag{8}$$
т.е. равенство (t_2) имеет место при $\alpha = \beta$.

Докажем, что соотношение (t_3) имеет место при $\alpha = \beta$. Согласно свойству (a_1) C является изотипной подгруппой группы G, и поэтому
$$C \cap p^\beta G = p^\beta C. \tag{9}$$
Используя соотношения (8) и (9) и первую теорему об изоморфизме, получим
$$G/C = [C,\, p^\beta G]/C \cong p^\beta G/(C \cap p^\beta G) = p^\beta G/p^\beta C,$$
откуда
$$G/C \cong p^\beta G/p^\beta C,$$
т.е. соотношение (t_3) имеет место при $\alpha = \beta$.

Индукция проведена полностью и, таким образом, доказано, что группа G обладает свойствами (t_1), (t_2) и (t_3).

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве соотношения (t_1), можно показать, что из справедливости соотношений (t_1), (t_2) и (t_3) при всех $\alpha < \tau^*(G)$ следует справедливость равенства $p^\alpha G = G \cap p^\alpha H$ и при $\alpha = \tau^*(G)$. Следовательно, согласно предложению 3.6 G является изотипной подгруппой группы H, т.е. имеет место свойство (a_3). Наконец, равенства (t_2) показывают, что C является плотной подгруппой группы G, т.е. имеет место свойство (a_4).

Итак, предложение 3.45 доказано.

3.46. *Пусть C – изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной группы G. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad G^\alpha = [C^\alpha,\, G^\beta] \qquad (\alpha \leqslant \beta < \tau(G)).$$

Доказательство. Пусть α и β – порядковые числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha \leqslant \beta < \tau(G). \tag{1}$$

Так как $\beta < \tau(G)$, то $G^\beta \neq \{0\}$. Но $p^{\omega\beta}G = G^\beta$. Следовательно, $p^{\omega\beta}G \neq \{0\}$. Отсюда, учитывая, что G по условию есть редуцированная группа, получаем

$$\omega\beta < \tau^*(G). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следуют неравенства

$$\omega\alpha \leqslant \omega\beta < \tau^*(G). \tag{3}$$

Принимая во внимание (3), мы на основании предложения 3.44 заключаем, что имеет место соотношение

$$p^{\omega\alpha}G = [p^{\omega\alpha}C,\, p^{\omega\beta}G] \qquad (\alpha \leqslant \beta < \tau(G)). \tag{4}$$

Но $p^{\omega\alpha}G = G^\alpha$, $p^{\omega\alpha}C = C^\alpha$ и $p^{\omega\beta}G = G^\beta$, откуда получаем соотношение (a).

3.47. *Пусть C – изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда имеют место соотношения*

$$(a) \qquad G^\alpha/G^\beta \cong C^\alpha/C^\beta \qquad (\alpha < \beta < \tau(G));$$

$$(b) \qquad p^iG/p^kG \cong p^iC/p^kC \qquad (i < k < \tau^*(G)).$$

Доказательство. В силу 3.46 имеет место соотношение

$$G^\alpha = [C^\alpha,\, G^\beta] \qquad (\alpha < \beta < \tau(G)). \tag{1}$$

Кроме того, в силу предложения 3.11

$$C^\alpha \cap G^\beta = C^\beta \qquad (\alpha < \beta). \tag{2}$$

Применяя первую теорему об изоморфизме и используя (1) и (2), получим

$$G^\alpha/G^\beta = [C^\alpha,\, G^\beta]/G^\beta \cong C^\alpha/(C^\alpha \cap G^\beta) = C^\alpha/C^\beta,$$

т.е. имеет место соотношение

$$(a) \qquad G^\alpha/G^\beta \cong C^\alpha/C^\beta \qquad (\alpha < \beta < \tau(G)).$$

Аналогично доказывается соотношение (b).

3.48. *Пусть C – изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad G^\alpha[p] = \big[C^\alpha[p],\, G^\beta[p]\big] \qquad (\alpha < \beta < \tau(G)).$$

Доказательство. Пусть заданы порядковые числа α и β, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha < \beta < \tau(G).$$

По условию C – изотипная и плотная подгруппа группы G. Следовательно, в силу предложения 3.46 имеет место соотношение

$$G^\alpha = [C^\alpha,\, G^\beta] \qquad (\alpha < \beta < \tau(G)).$$

Так как C – изотипная подгруппа группы G, то в силу предложения 3.11

$$C^\alpha \cap G^\beta = C^\beta \qquad (\alpha < \beta)$$

и в силу предложения 3.14 C^β является изотипной подгруппой группы G^β. Следовательно, в силу предложения 3.7 C^β является сервантной подгруппой группы G^β. Применяя теперь предложение 3.35 и полагая при этом $A = C^\alpha$, $B = G^\beta$, мы получим соотношение (a).

3.49. *Пусть C – изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы G. Тогда факторгруппы $p^\alpha G/p^\alpha C$ при $0 < \alpha < \tau^*(G)$ и G^α/C^α при $0 < \alpha < \tau(G)$ являются полными группами, изоморфными факторгруппе G/C.*

Доказательство. Пусть задано порядковое число α, удовлетворяющее условию

$$0 < \alpha < \tau^*(G). \tag{1}$$

По условию C – плотная подгруппа группы G, и поэтому

$$G = [C,\, p^\alpha G] \qquad (0 < \alpha < \tau^*(G)). \tag{2}$$

Но по условию C является также изотипной подгруппой группы G, т.е. имеет место соотношение

$$C \cap p^\alpha G = p^\alpha C \qquad (0 < \alpha < \tau^*(G)). \tag{3}$$

Если $\tau^*(G) = 1$, то чисел α, удовлетворяющих условию (1), нет. Если же $\tau^*(G) > 1$, то согласно предложению 3.39 факторгруппа G/C является полной группой. Используя (2), (3) и применяя первую теорему об изоморфизме, получим

$$G/C = [C,\, p^\alpha G]/C \cong p^\alpha G/(C \cap p^\alpha G) = p^\alpha G/p^\alpha C,$$

т.е. факторгруппа $p^\alpha G/p^\alpha C$ изоморфна полной группе G/C при всяком α, удовлетворяющем условию (1).

Так же доказывается, что имеет место соотношение

$$G^\alpha/C^\alpha \cong G/C \qquad (0 < \alpha < \tau(G)).$$

Предложение 3.49 доказано.

3.50. *Если C – ненулевая изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной группы G, то имеют место следующие соотношения:*

$$\tau(C) = \tau(G),$$

$$C^\alpha/C^{\alpha+1} \cong G^\alpha/G^{\alpha+1} \qquad (\alpha + 1 < \tau(G)),$$

т.е. группы C и G имеют один и тот же тип и одинаковые последовательности ульмовских факторов.

Это предложение непосредственно следует из предложений 3.42 и 3.47.

§ 4. Базисные подгруппы

4.1. Определение. Подгруппу C обобщенной примарной группы G будем называть *базисной подгруппой* группы G, если она обладает следующими тремя свойствами:

(a) группа C разлагается в прямую сумму (операторных) циклических подгрупп;

(b) C – сервантная подгруппа группы G;

(c) факторгруппа G/C является полной группой.

4.2. Теорема. *Любая обобщенная примарная группа имеет по крайней мере одну базисную подгруппу.*

Доказательство. 1°. Пусть G – группа с кольцом операторов K_p. Обозначим символом $\mathfrak{A}$ семейство подмножеств T группы G, удовлетворяющих следующим двум условиям:

(d) подгруппа (допустимая) группы G, порожденная множеством T, сервантна в G;

(e) если M – конечное подмножество множества T, то $[M] = \bigoplus\limits_{z \in M} [z]$ [15].

Легко видеть, что объединение возрастающей последовательности множеств из $\mathfrak{A}$ также принадлежит $\mathfrak{A}$. Действительно, в силу предложения 3.29 объединение возрастающей последовательности множеств, удовлетворяющих условию (d), является множеством, также удовлетворяющим этому условию. Кроме того, очевидно, объединение возрастающей последовательности множеств, удовлетворяющих условию (e), является множеством, также удовлетворяющим этому условию. Отсюда согласно теореме Куратовского о насыщенных множествах следует, что существует по крайней мере одно множество $Z \in \mathfrak{A}$ такое, что любое множество $T \in \mathfrak{A}$, содержащее Z, совпадает с Z.

[15] Символом $[z]$ мы обозначаем наименьшую (допустимую) подгруппу группы G, содержащую элемент z, т.е. $[z]$ – циклическая (операторная) подгруппа группы G, порожденная элементом z.

Докажем, что (допустимая) *подгруппа* C *группы* G, *порожденная множеством* Z, *является базисной подгруппой группы* G.

Так как Z удовлетворяет условию (e), то группа C разлагается в прямую сумму (операторных) циклических подгрупп, т.е.

$$C = \bigoplus_{z \in Z} [z].$$

Подгруппа C является сервантной в G, так как $Z \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, Z удовлетворяет условию (d).

Докажем, что факторгруппа G/C является полной группой. Допустим, что факторгруппа $\overline{G} = G/C$ есть неполная группа. Тогда в силу предложения 2.3 $\overline{G} \neq p\overline{G}$. Пусть $\bar{x}$ – элемент множества $\overline{G} \setminus p\overline{G}$, имеющий среди элементов этого множества наименьший порядок. Обозначим через x какой-либо элемент группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$, $\bar{x} = x + C$, и имеющий среди элементов этого класса наименьший порядок. Докажем, что множество $T = Z \cup \{x\}$ принадлежит $\mathfrak{A}$, т.е. удовлетворяет условиям (d), (e). Обозначим через A (допустимую) подгруппу группы G, порожденную множеством T. Легко видеть, что $A/C = [\bar{x}]$. Среди элементов класса смежности $\bar{x} + p\overline{G}$ элемент $\bar{x}$ имеет наименьший порядок, ибо этот класс смежности является подмножеством множества $\overline{G} \setminus p\overline{G}$. Отсюда в силу предложения 3.30 следует, что циклическая подгруппа $[\bar{x}]$ сервантна в $\overline{G}$. Кроме того, C – сервантная подгруппа группы G. Поэтому на основании предложения 3.25 заключаем, что подгруппа A сервантна в G, т.е. множество T удовлетворяет условию (d).

Множество T удовлетворяет также условию (e). Чтобы в этом убедиться, очевидно, достаточно доказать, что

$$A = C \oplus [x]. \tag{1}$$

Так как $A = [Z, x] = [C, x]$, то надо только показать, что

$$C \cap [x] = \{0\}. \tag{2}$$

Допустим, что отличный от нуля элемент $mx \in [x]$, где $m \in K_p$, принадлежит C. Число m можно представить в виде $m = kp^n$, где $k \in K_p \setminus pK_p$ и n – целое неотрицательное рациональное число. Легко видеть, что $\frac{1}{k} \in K_p$. Отсюда, поскольку C – допустимая подгруппа группы G и $mx \in C$, следует, что $\frac{1}{k}(mx) \in C$, т.е.

$$p^n x \in C. \tag{3}$$

Кроме того,

$$p^n x \neq 0, \tag{4}$$

так как $p^n x = \frac{1}{k}(mx)$, $mx \neq 0$ и $\frac{1}{k} \in K_p \setminus pK_p$. Подгруппа C сервантна в G. Следовательно, в силу (3) существует элемент $c \in C$ такой, что $p^n c = p^n x$, т.е. $p^n(x - c) = 0$. Отсюда и из (4) следует, что элемент $x - c$, принадлежащий классу смежности $x + C$, имеет порядок, меньший порядка x. Но это невозможно, так как среди элементов класса смежности $x + C$ элемент x имеет наименьший порядок. Этим доказано, что имеет место (2) и, следовательно, имеет место прямое разложение (1).

Таким образом, $T \in \mathfrak{A}$. Кроме того, T содержит множество Z, но не совпадает с ним, ибо $\bar{x} \notin p\overline{G}$; следовательно, $x \notin C$ и, значит, $x \notin Z$. Но это противоречит определению множества Z. Поэтому факторгруппа $\overline{G}$ в действительности является полной группой.

Итак, доказано, что C обладает свойствами (a), (b) и (c) определения 4.1 и, следовательно, является базисной подгруппой группы G.

2°. Если G – группа с кольцом операторов Z_p, то доказательство теоремы протекает совершенно так же, как и в пункте 1°. Надо только всюду в пункте 1° заменить K_p через Z_p.

Теорема доказана.

4.3. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы G. Тогда для любого натурального числа n имеет место соотношение*

$$(a) \qquad G = [C,\, p^n G].$$

Доказательство. По условию C – базисная подгруппа группы G. Следовательно, факторгруппа G/C является полной группой. Поэтому в силу предложения 2.9 имеет место соотношение (a).

4.4. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы G. Тогда для всякого натурального числа n имеет место соотношение*

$$(a) \qquad p^n G / p^n C \cong G/C.$$

Доказательство. По условию C является базисной и, следовательно, сервантной подгруппой группы G. Поэтому для любого натурального числа n имеет место равенство

$$C \cap p^n G = p^n C. \tag{1}$$

Кроме того, в силу предложения 4.3

$$G = [C,\, p^n G]. \tag{2}$$

Используя (1), (2) и применяя первую теорему об изоморфизме, получим

$$G/C = [C,\, p^n G]/C \cong p^n G/(C \cap p^n G) = p^n G/p^n C,$$

откуда следует соотношение (a).

4.5. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы G. Тогда для любого целого неотрицательного рационального числа n имеют место следующие соотношения*:

$$(a) \qquad (p^n G)[p] = \big[(p^n C)[p],\, (p^{n+1} G)[p]\big];$$

$$(b) \qquad (p^{n+1}C)[p] = (p^nC)[p] \cap (p^{n+1}G)[p];$$

$$(c) \qquad (p^nC)[p] \big/ (p^{n+1}C)[p] \cong (p^nG)[p] \big/ (p^{n+1}G)[p].$$

Доказательство. По условию C – базисная подгруппа группы G. Следовательно, факторгруппа G/C является полной группой. Отсюда в силу предложения 4.4 следует, что факторгруппа p^nG/p^nC, где n – натуральное число или нуль, также является полной группой. Поэтому в силу предложения 2.9 имеет место соотношение

$$p^nG = [p^nC,\, p^{n+1}G]. \tag{1}$$

Так как C – сервантная подгруппа группы G, то в силу предложения 3.12 имеет место равенство

$$p^{n+1}C = p^nC \cap p^{n+1}G \tag{2}$$

и, кроме того, в силу предложения 3.15 $p^{n+1}C$ является сервантной подгруппой группы $p^{n+1}G$. Поэтому из (1) в силу предложения 3.35 следует соотношение (a).

Соотношение (b) непосредственно следует из (2).

Используя (a), (b) и применяя первую теорему об изоморфизме, получим

$$(p^nG)[p] \big/ (p^{n+1}G)[p] \cong (p^nC)[p] \big/ \big((p^nC)[p] \cap (p^{n+1}G)[p]\big) = (p^nC)[p] \big/ (p^{n+1}C)[p],$$

откуда следует соотношение (c).

4.6. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Число прямых слагаемых порядка p^n, где n – натуральное число, в каком-либо разложении группы C в прямую сумму циклических подгрупп равно числу прямых слагаемых в каком-либо разложении факторгруппы $(p^{n-1}G)[p] \big/ (p^nG)[p]$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p.*

Доказательство. Пусть

$$C = \bigoplus_{i \in M} C_i \tag{1}$$

– разложение группы C в прямую сумму циклических подгрупп. Легко видеть, что число конечных циклических прямых слагаемых в разложении (1), порядок которых больше или равен p^n, равно числу прямых слагаемых в каком-либо разложении группы $(p^{n-1}C)[p]$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p. Поэтому в разложении (1) нет циклических прямых слагаемых порядка p^n, если $(p^{n-1}C)[p] = (p^nC)[p]$. Если же $(p^{n-1}C)[p] \neq (p^nC)[p]$, то разложение (1) содержит прямые слагаемые порядка p^n и легко видеть, что число их равно числу прямых слагаемых в каком-либо разложении факторгруппы $(p^{n-1}C)[p] \big/ (p^nC)[p]$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p. Теперь, принимая во внимание предложение 4.5, мы видим, что утверждение 4.6 доказано.

4.7. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G и H – максимальная периодическая подгруппа группы G. Число бесконечных прямых слагаемых в каком-либо разложении группы C в прямую сумму (допустимых) циклических подгрупп равно числу прямых слагаемых в каком-либо разложении факторгруппы $G/\,[H,\, pG]$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p.*

Доказательство. Пусть

$$C = \bigoplus_{i \in M} C_i \tag{1}$$

– разложение группы C в прямую сумму циклических подгрупп и $\{C_i\}_{i \in F}$ – множество всех бесконечных прямых слагаемых в разложении (1). Обозначим через A подгруппу группы C, порожденную подгруппами C_i, принадлежащими множеству $\{C_i\}_{i \in F}$. Тогда, очевидно,

$$A = \bigoplus_{i \in F} C_i. \tag{2}$$

Докажем, что имеет место соотношение

$$A \cap [H,\, pG] = pA. \tag{3}$$

Пусть $a \in A \cap [H,\, pG]$. Покажем, что $a \in pA$. Так как $a \in [H,\, pG]$, то $a = h + pg$, где $h \in H$ и $g \in G$. Пусть p^n – порядок элемента h. Тогда $p^n h = 0$,

$$p^n a = p^n(h + pg) = p^{n+1} g,$$

и поэтому

$$p^n a \in A \cap p^{n+1} G. \tag{4}$$

Подгруппа A является прямым слагаемым группы C. Следовательно, в силу предложения 3.24 A является сервантной подгруппой группы G. Поэтому имеет место равенство

$$A \cap p^{n+1} G = p^{n+1} A. \tag{5}$$

Сопоставляя (4) и (5), получим

$$p^n a \in p^{n+1} A. \tag{6}$$

Соотношение (6) показывает, что существует элемент $c \in A$, удовлетворяющий условию

$$p^{n+1} c = p^n a. \tag{7}$$

Из (7) следует равенство

$$p^n(a - pc) = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) показывает, что элемент $a - pc$ имеет конечный порядок. Но $a - pc$ является элементом группы без кручения A. Следовательно, $a - pc = 0$, $a = pc$, и поэтому $a \in pA$. Этим доказано, что $A \cap [H,\, pG] \subset pA$. Отсюда, поскольку $pA \subset A$ и $pA \subset pG$, следует соотношение (3).

По условию C – базисная подгруппа группы G; поэтому в силу предложения 4.3 имеет место равенство

$$G = [C,\, pG]. \tag{9}$$

Прямые слагаемые разложения (1), не принадлежащие подгруппе A, содержатся в H, поскольку H – максимальная периодическая подгруппа группы G; поэтому имеет место соотношение

$$C \subset [A,\, H]. \tag{10}$$

На основании (9) и (10) заключаем, что

$$G = [A,\, H,\, pG]. \tag{11}$$

Используя соотношения (3), (11) и применяя первую теорему об изоморфизме, получим

$$G/\,[H,\, pG] = [A,\, H,\, pG]/\,[H,\, pG] \cong A/(A \cap [H,\, pG]) = A/pA,$$

откуда следует соотношение

$$G/\,[H,\, pG] \cong A/pA. \tag{12}$$

Положим $\overline{C}_i = [C_i,\, pA]/pA$. Очевидно, $\overline{C}_i$ – группа порядка p, если $i \in F$. Легко видеть, что разложение (2) индуцирует прямое разложение

$$A/pA = \bigoplus_{i \in F} \overline{C}_i \tag{13}$$

факторгруппы A/pA в прямую сумму циклических подгрупп порядка p. Разложения (2) и (13) имеют одинаковое число прямых слагаемых. Следовательно, число бесконечных прямых слагаемых в разложении (1) равно числу прямых слагаемых в разложении (13). Кроме того, нетрудно видеть, что любые два разложения факторгруппы A/pA в прямую сумму циклических подгрупп порядка p имеют одинаковое число прямых слагаемых. Поэтому число бесконечных прямых слагаемых в разложении (1) равно числу прямых слагаемых в каком-либо разложении факторгруппы A/pA в прямую сумму циклических подгрупп порядка p. Таким образом, принимая во внимание (12), предложение 4.7 доказано.

4.8. Теорема. *Любые две базисные подгруппы одной и той же обобщенной примарной группы изоморфны.*

Доказательство. Пусть заданы две базисные подгруппы B и C обобщенной примарной (относительно p) группы G и их разложения в прямую сумму циклических подгрупп. На основании предложения 4.6 заключаем, что для любого натурального числа n число циклических прямых слагаемых порядка p^n в этих разложениях групп B и C будет одним и тем же. Далее, на основании предложения 4.7 заключаем, что число бесконечных циклических прямых слагаемых в рассматриваемых разложениях групп B и C будет одним и тем же. Поэтому группы B и C изоморфны. Теорема доказана.

4.9. *Пусть B – базисная подгруппа редуцированной обобщенной примарной (относительно p) группы H. Если B не содержит элементов конечного порядка, отличных от нулевого, то H является группой без кручения.*

Доказательство. Обозначим через F максимальную периодическую подгруппу группы H. Согласно предложению 1.3 F является примарной по отношению к p группой. Докажем, что

$$F \subset pH. \tag{1}$$

Пусть $x \in F$. Если p^k – порядок элемента x, то

$$p^k x = 0. \tag{2}$$

Согласно предложению 4.3

$$H = [B,\, pH]. \tag{3}$$

По условию B – сервантная подгруппа группы H. Следовательно,

$$B \cap pH = pB, \tag{4}$$

и согласно предложению 3.15 pB является сервантной подгруппой группы pH. Поэтому из соотношений (3) и (4) в силу предложения 3.35 следует соотношение

$$H[p^k] = \big[B[p^k],\, (pH)[p^k]\big]. \tag{5}$$

По условию B не содержит элементов конечного порядка, отличных от нулевого. Следовательно, $B[p^k] = \{0\}$, и поэтому соотношение (5) можно записать в виде

$$H[p^k] = (pH)[p^k]. \tag{6}$$

На основании (2) и (6) заключаем, что $x \in pH$. Этим доказано, что имеет место соотношение (1).

Группа F есть сервантная подгруппа группы H, поскольку она является максимальной периодической ее подгруппой. Следовательно,

$$pF = F \cap pH. \tag{7}$$

На основании (1) и (7) заключаем, что $F = pF$. Отсюда согласно предложению 2.3 следует, что F – полная группа. Но по условию H – редуцированная группа. Следовательно, F является нулевой группой. Этим доказано, что H является группой без кручения.

4.10. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной группы H и B – базисная подгруппа группы C. Тогда B является базисной подгруппой группы H.*

Доказательство. Подгруппа B разлагается в прямую сумму циклических подгрупп, так как по условию она является базисной подгруппой группы C.

Так как B и C – базисные подгруппы соответственно групп C и H, то B сервантна в C и C сервантна в H. Отсюда в силу предложения 3.18 следует, что B является сервантной подгруппой группы H.

Факторгруппы H/C и C/B являются полными группами, поскольку C и B – базисные подгруппы соответственно групп H и C. Отсюда в силу предложения 2.7 следует, что H/B является полной группой.

Таким образом, B является базисной подгруппой группы H.

4.11. *Пусть C – базисная подгруппа обобщенной примарной группы G и H – подгруппа группы G^1 $(G^1 = p^\omega G)$. Тогда факторгруппа $[C, H]/H$ является базисной подгруппой факторгруппы G/H.*

Доказательство. 1°. Положим

$$\overline{G} = G/H \quad \text{и} \quad \overline{C} = [C, H]/H.$$

По условию C – базисная подгруппа группы G. Следовательно, C разлагается в прямую сумму циклических подгрупп и сервантна в G. Отсюда, как нетрудно видеть, следует, что

$$C \cap G^1 = \{0\} \tag{1}$$

(т.е. C не содержит элементов, имеющих в G бесконечную высоту). Так как по условию $H \subset G^1$, то из (1) следует, что $[C, H] = C \oplus H$ и

$$\overline{C} \cong C. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $\overline{C}$ разлагается в прямую сумму циклических подгрупп, так как этим свойством обладает группа C.

2°. Докажем, что $\overline{C}$ является сервантной подгруппой группы $\overline{G}$. Пусть n – какое-либо натуральное число и $\bar{x} \in \overline{C} \cap p^n\overline{G}$. Тогда существует элемент $\bar{y} \in \overline{G}$ такой, что $p^n\bar{y} = \bar{x}$. Пусть y – элемент класса смежности $\bar{y}$ и x – элемент группы C, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$. Тогда

$$p^n y = x + h, \quad \text{где } h \in H. \tag{3}$$

По условию $H \subset G^1$, следовательно, $h \in G^1$. Поэтому существует элемент $a \in G$ такой, что

$$p^n a = h. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что $x = p^n(y - a)$, т.е.

$$x \in p^n G. \tag{5}$$

Так как C, будучи базисной подгруппой группы G, сервантна в G, то

$$C \cap p^n G = p^n C. \tag{6}$$

Поскольку $x \in C$, из (5) и (6) следует, что $x \in p^n C$. Следовательно, существует элемент $z \in C$ такой, что $p^n z = x$; поэтому $\bar{x} = p^n\bar{z} \in p^n\overline{C}$, где $\bar{z} = z + H$. Этим доказано, что $p^n\overline{C} \supset \overline{C} \cap p^n\overline{G}$. Отсюда в силу предложения 3.5 следует, что $\overline{C}$ является сервантной подгруппой группы $\overline{G}$.

3°. Факторгруппа $\overline{G}/\,\overline{C}$ является полной группой. Действительно, применяя вторую теорему об изоморфизме, имеем

$$\overline{G}/\,\overline{C} \cong G/(C \oplus H) \cong (G/C)\big/\big((C \oplus H)/C\big),$$

откуда

$$\overline{G}/\,\overline{C} \cong (G/C)\big/\big((C \oplus H)/C\big). \tag{7}$$

Факторгруппа G/C является полной группой, поскольку C – базисная подгруппа группы G. Соотношение (7) показывает, что факторгруппа $\overline{G}/\,\overline{C}$ изоморфна факторгруппе полной группы G/C; поэтому в силу предложения 2.4 факторгруппа $\overline{G}/\,\overline{C}$ является полной группой.

Таким образом, доказано, что $\overline{C}$ является базисной подгруппой группы $\overline{G}$.

4.12. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы H. Тогда имеет место соотношение*

$$H/pH \cong B/pB. \tag{a}$$

Доказательство. В силу предложения 4.3

$$H = [B,\, pH]. \tag{1}$$

По условию B – базисная подгруппа группы H. Следовательно, B – сервантная подгруппа группы H, и поэтому имеет место равенство

$$B \cap pH = pB. \tag{2}$$

Используя (1), (2) и применяя первую теорему об изоморфизме, получим

$$H/pH = [B,\, pH]/pH \cong B/(B \cap pH) = B/pB,$$

откуда следует соотношение (a).

4.13. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы G. Тогда имеет место соотношение*

$$|B| \leqslant |G/pG| \cdot \mathfrak{c}. \tag{a}$$

Доказательство. Пусть

$$B = \bigoplus_{i \in M} [x_i] \tag{1}$$

– прямое разложение группы B в прямую сумму (допустимых) циклических подгрупп, $x_i \in B$. Такое разложение существует, поскольку B – базисная подгруппа группы G. Если разложение (1) содержит конечное число прямых слагаемых, то, очевидно, соотношение (a) имеет место. Поэтому мы будем предполагать, что разложение (1) содержит бесконечное множество прямых слагаемых. Положим

$$\overline{B} = B/pB \tag{2}$$

и
$$\bar{x}_i = x_i + pB \qquad (i \in M).$$
Легко видеть, что прямое разложение (1) индуцирует прямое разложение
$$\overline{B} = \bigoplus_{i \in M} [\bar{x}_i] \tag{3}$$
группы $\overline{B}$ в прямую сумму циклических подгрупп порядка p. Число прямых слагаемых в разложении (3) равно мощности группы $\overline{B}$, так как число этих слагаемых [как и в разложении (1)] бесконечно и каждое слагаемое является группой порядка p. Кроме того, разложения (1) и (3) содержат одинаковое число прямых слагаемых, и каждое прямое слагаемое $[x_i]$ разложения (1) имеет мощность либо конечную, либо счетную, либо континуальную. Поэтому имеет место соотношение
$$|B| \leqslant |\overline{B}| \cdot \mathfrak{c}. \tag{4}$$

Так как по условию B – базисная подгруппа группы G, то в силу предложения 4.12 $B/pB \cong G/pG$; поэтому имеет место равенство
$$|B/pB| = |G/pG|. \tag{5}$$
Сопоставляя (2), (4) и (5), получим соотношение (a).

4.14. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда для любого натурального числа n p^nB является базисной подгруппой группы p^nG.*

Доказательство. По условию B – базисная подгруппа группы G. Следовательно, B разлагается в прямую сумму циклических подгрупп, а тогда подгруппа p^nB также разлагается в прямую сумму циклических подгрупп. Так как B – базисная подгруппа группы G, то она сервантна в G. Отсюда в силу предложения 3.15 следует, что p^nB является сервантной подгруппой группы p^nG. Далее, факторгруппа G/B является полной группой, поскольку B – базисная подгруппа группы G. Отсюда в силу предложения 4.4 следует, что факторгруппа p^nG/p^nB также является полной группой. Этим доказано, что p^nB является базисной подгруппой группы p^nG.

4.15. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда*

$$(a) \qquad (G/B)[p] \cong G[p]/B[p].$$

Доказательство. По условию B – базисная подгруппа группы G. Следовательно, B – сервантная подгруппа группы G. Поэтому соотношение (a) имеет место в силу предложения 3.33.

4.16. *Если B – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, то для любого натурального числа n имеет место соотношение*

$$(b) \qquad (p^nG/p^nB)[p] \cong (p^nG)[p]\big/(p^nB)[p].$$

Это предложение непосредственно следует из предложений 4.14 и 4.15.

4.17. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G. Тогда для любого натурального числа n имеет место соотношение*

$$(G/B)[p] \cong (p^n G)[p] \big/ (p^n B)[p]. \tag{c}$$

Доказательство. В силу предложения 4.4 $G/B \cong p^n G/p^n B$, откуда

$$(G/B)[p] \cong (p^n G/p^n B)[p]. \tag{1}$$

Из соотношений (1) и условия 4.16(b) следует соотношение (c).

4.18. *Если B – базисная подгруппа обобщенной примарной (относительно p) группы G, то для любого натурального числа n имеет место соотношение*

$$|(G/B)[p]\,| \leqslant |(p^n G)[p]\,|.$$

Это предложение непосредственно следует из предложения 4.17.

4.19. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{i \in M} G_i \tag{1}$$

– прямое разложение обобщенной примарной группы G и C_i – базисная подгруппа группы G_i, $i \in M$. Тогда подгруппа C группы G, порожденная подгруппами C_i, $C = \big[\bigcup\limits_{i \in M} C_i\big]$, является базисной подгруппой группы G.

Доказательство. Так как $C_i \subset G_i$ и $C = \big[\bigcup\limits_{i \in M} C_i\big]$, то на основании равенства (1) заключаем, что имеет место прямое разложение

$$C = \bigoplus_{i \in M} C_i. \tag{2}$$

Отсюда следует, что C разлагается в прямую сумму циклических подгрупп, поскольку этим свойством обладает каждое прямое слагаемое разложения (2).

По условию каждое слагаемое C_i разложения (2) является базисной и, следовательно, сервантной подгруппой группы G_i. Отсюда в силу предложения 3.37 следует, что C является сервантной подгруппой группы G.

Из того, что C_i есть базисная подгруппа группы G_i, следует, что факторгруппа G_i/C_i является полной группой. Поэтому, принимая во внимание (1), на основании предложения 2.35 заключаем, что факторгруппа G/C является полной группой.

Таким образом, доказано, что C является базисной подгруппой группы G.

Перейдем к рассмотрению предложений 4.20–4.25, необходимых для доказательства теоремы 4.26 и предложения 4.27, которые будут использованы при доказательстве предложения 9.3.

4.20. *Пусть G – примарная группа, обладающая разложением*

$$G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_n \tag{1}$$

в прямую сумму счетного числа циклических подгрупп Z_n, порядки которых неограниченно возрастают (так что порядок группы Z_{n+1} больше порядка группы Z_n). Тогда существует базисная подгруппа V группы G такая, что факторгруппа G/V является квазициклической группой.

Доказательство. Обозначим через p^{k_n} порядок циклической группы Z_n, $n = 1, 2, \ldots$ По условию

$$1 < p^{k_1} < p^{k_2} < \ldots < p^{k_n} < p^{k_{n+1}} < \ldots \tag{2}$$

Обозначим через c_n образующий элемент группы Z_n: $Z_n = [c_n]$. В силу (1) тогда

$$G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} [c_n]. \tag{3}$$

Положим

$$b_n = c_n - p^{k_{n+1}-k_n} c_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

и

$$V_n = [b_1, b_2, \ldots, b_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Принимая во внимание (3), (4) и (5), нетрудно видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$V_n \cap [b_{n+1}] = \{0\} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{6}$$

$$V_n \cap [c_{n+1}] = \{0\} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{7}$$

$$c_1 \notin V_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Обозначим через V подгруппу группы G, порожденную элементами множества $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots}$. В силу (5) имеет место равенство

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n. \tag{9}$$

Докажем, что V является искомой базисной подгруппой группы G.

Равенства (6) показывают, что V разлагается в прямую сумму циклических подгрупп:

$$V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} [b_n].$$

Докажем, что V_n является прямым слагаемым группы G. Легко видеть, что

$$V_n \cap \Big(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Z_i \Big) = \{0\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Действительно, на основании (4) и (5) заключаем, что $V_n \subset \bigoplus_{i=1}^{n+1} Z_i$, откуда в силу (1) имеем

$$V_n \cap \Big(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Z_i\Big) \subset \Big(\bigoplus_{i=1}^{n+1} Z_i\Big) \cap \Big(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Z_i\Big) = Z_{n+1}.$$

Поэтому

$$V_n \cap \Big(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Z_i\Big) \subset V_n \cap Z_{n+1}. \tag{11}$$

Из (7) и (11), учитывая, что $Z_{n+1} = [c_{n+1}]$, получаем (10). На основании (4) и (5) заключаем, что

$$c_i \in [V_n,\, Z_{n+1}] \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n+1).$$

Отсюда следует, что

$$G = \Big[V_n,\, \bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Z_i\Big] \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{12}$$

Равенства (10) и (12) показывают, что подгруппа V_n является прямым слагаемым группы G:

$$G = V_n \oplus \Big(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Z_i\Big) \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{13}$$

Из (13) в силу предложения 3.24 следует, что V_n является сервантной подгруппой группы G, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда на основании (5) и (9) получаем, что V является объединением возрастающей последовательности сервантных подгрупп группы G. Следовательно, в силу предложения 3.29 V является сервантной подгруппой группы G.

Докажем, что факторгруппа $\overline{G} = G/V$ является квазициклической группой. Положим

$$\bar{c}_n = c_n + V \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

В силу (3) множество $\{\bar{c}_n\}_{n=1,2,\ldots}$ является множеством образующих элементов факторгруппы $\overline{G}$. Поскольку $b_n \in V$, $n = 1, 2, \ldots$, мы на основании (4) заключаем, что элементы этого множества удовлетворяют следующим соотношениям:

$$p^{k_{n+1}-k_n}\bar{c}_{n+1} = \bar{c}_n \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

причем в силу (2)

$$p^{k_{n+1}-k_n} > 1 \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Кроме того, в силу (8) и (9) $\bar{c}_1$ является ненулевым элементом факторгруппы $\overline{G}$. Поэтому факторгруппа $\overline{G}$, $\overline{G} = G/V$, является квазициклической группой.

Таким образом, V есть базисная подгруппа группы G, и факторгруппа G/V является квазициклической группой.

4.21. *Пусть G – примарная (относительно p) группа, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) *G разлагается в прямую сумму циклических подгрупп;*

(b) *для любого натурального числа k имеет место равенство $|p^kG| = |G|$.*

Тогда существует базисная подгруппа C группы G, удовлетворяющая условию

(c) $$|(G/C)[p]\,| = |G[p]\,|.$$

Доказательство. Пусть

$$G = \bigoplus_{\alpha\in N} Z_\alpha \tag{1}$$

– разложение группы G в прямую сумму циклических подгрупп. Согласно условию (a) такое разложение существует. Если G – нулевая группа, то можно положить $C = G$; поэтому дальше считаем, что $G \neq \{0\}$.

Нетрудно видеть, что равенство $|p^kG| = |G|$ имеет место тогда и только тогда, когда число циклических прямых слагаемых разложения (1), порядки которых больше, чем p^k, равно мощности группы G. Поэтому, принимая во внимание условия (a) и (b), нетрудно видеть, что существует прямое разложение группы G,

$$G = \bigoplus_{i\in M} G_i, \tag{2}$$

со следующими свойствами:

(d) число прямых слагаемых в разложении (2) равно мощности группы G;

(e) каждое прямое слагаемое G_i в разложении (2) является прямой суммой счетного числа циклических прямых слагаемых из разложения (1), причем порядки этих циклических подгрупп неограниченно возрастают.

На основании предложения 4.20, учитывая свойство (e), заключаем, что каждое прямое слагаемое G_i разложения (2) имеет базисную подгруппу C_i такую, что факторгруппа G_i/C_i является квазициклической группой. Положим $C = \bigl[\bigcup_{i\in M} C_i\bigr]$. Так как $C_i \subset G_i$, то в силу (2)

$$C = \bigoplus_{i\in M} C_i.$$

Далее, в силу предложения 4.19 C является базисной подгруппой группы G.

Поскольку $C_i \subset G_i$ при $i \in M$, легко видеть, что

$$G/C \cong \bigoplus_{i\in M} G_i/C_i. \tag{3}$$

Каждое прямое слагаемое G_i/C_i в соотношении (3) является квазициклической группой, и в силу (d) число этих слагаемых равно мощности группы G; отсюда, учитывая (3), заключаем, что

$$|(G/C)[p]\,| = |G|. \tag{4}$$

На основании условий (a) и (b) заключаем, что G можно разложить в прямую сумму бесконечного множества конечных циклических подгрупп. Поэтому имеет место равенство

$$|G| = |G[p]\,|. \tag{5}$$

Теперь, сопоставляя (4) и (5), получим соотношение (c).

4.22. *Пусть C – примарная (относительно p) группа, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп. Тогда существует базисная подгруппа B группы C, удовлетворяющая условию*

$$|(C/B)[p]\,| = \min_{k\geqslant 1}\bigl\{|(p^kC)[p]\,|\bigr\}. \tag{a}$$

Доказательство. Пусть

$$C = \bigoplus_{i\in M} Z_i \tag{1}$$

– разложение группы C в прямую сумму циклических подгрупп. По условию такое разложение существует.

Обозначим через B_n подгруппу группы C, являющуюся прямой суммой тех слагаемых разложения (1), порядки которых меньше, чем p^n. (Если таких слагаемых нет, то через B_n будем обозначать нулевую подгруппу группы C.) Через A_n обозначим прямую сумму тех слагаемых разложения (1), порядки которых больше или равны p^n. Тогда в силу (1)

$$C = B_n \oplus A_n \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{2}$$

Но $|A_n| \geqslant |A_m|$ при $n < m$, следовательно, существует натуральное число s такое, что

$$|A_m| = |A_s| \quad \text{при } m \geqslant s. \tag{3}$$

Из того, что A_s есть прямая сумма примарных (относительно p) циклических подгрупп, мы на основании (3) заключаем, что имеет место соотношение

$$|p^kA_s| = |A_s| \qquad (k = 1,\, 2,\, \dots); \tag{4}$$

поэтому согласно предложению 4.21 существует базисная подгруппа D группы A_s, удовлетворяющая условию

$$|(A_s/D)[p]\,| = |A_s[p]\,|. \tag{5}$$

Далее, так как A_s – прямая сумма примарных (относительно p) циклических подгрупп, то на основании (4) заключаем, что имеет место соотношение

$$|(p^kA_s)[p]\,| = |A_s[p]\,| \qquad (k = 1,\, 2,\, \dots). \tag{6}$$

Положим $B = [B_s,\, D]$. Так как в силу (2)

$$C = B_s \oplus A_s \tag{7}$$

и $D \subset A_s$, то

$$B = B_s \oplus D. \tag{8}$$

На основании (7) и (8) заключаем, что $C/B \cong A_s/D$, откуда

$$|(C/B)[p]\,| = |(A_s/D)[p]\,|. \tag{9}$$

Сопоставляя (5) и (9), получим

$$|(C/B)[p]\,| = |A_s[p]\,|. \tag{10}$$

Из определения B_s следует, что $p^s B_s = \{0\}$. Поэтому на основании (7) заключаем, что $p^k C = p^k A_s$ и

$$(p^k C)[p] = (p^k A_s)[p] \quad \text{при } k \geqslant s. \tag{11}$$

Из (6) и (11) следует соотношение

$$|(p^k C)[p]\,| = |A_s[p]\,| \quad \text{при } k \geqslant s. \tag{12}$$

Сопоставляя (10) и (12), получим

$$|(C/B)[p]\,| = |(p^k C)[p]\,| \quad \text{при } k \geqslant s. \tag{13}$$

На основании (13) заключаем, что имеет место соотношение (a).

4.23. *Пусть C – базисная подгруппа примарной (относительно p) группы H, удовлетворяющая условию*

(a)
$$|(H/C)[p]\,| < \min_{k\geqslant 1}\bigl\{|(p^k H)[p]\,|\bigr\}.$$

Тогда имеет место равенство

(b)
$$\min_{k\geqslant 1}\bigl\{|(p^k H)[p]\,|\bigr\} = \min_{k\geqslant 1}\bigl\{|(p^k C)[p]\,|\bigr\}.$$

Доказательство. На основании условия (a) заключаем, что при любом натуральном k

$$|(H/C)[p]\,| < |(p^k H)[p]\,|. \tag{1}$$

Но по условию C – базисная подгруппа группы H; тогда в силу предложения 4.17 имеет место соотношение

$$(H/C)[p] \cong (p^k H)[p]\big/(p^k C)[p]. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует неравенство

$$\bigl|(p^k H)[p]\big/(p^k C)[p]\bigr| < |(p^k H)[p]\,|. \tag{3}$$

На основании условия (a) заключаем, что $(p^k H)[p]$ – бесконечная группа, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому нетрудно видеть, что из (3) следует равенство

$$|(p^k H)[p]\,| = |(p^k C)[p]\,|. \tag{4}$$

Теперь на основании (4) заключаем, что имеет место соотношение (b).

4.24. *Пусть H – примарная (относительно p) группа. Существует базисная подгруппа B группы H, удовлетворяющая условию*

$$(a) \qquad |(H/B)[p]\,| = \min_{k \geqslant 1}\bigl\{|(p^k H)[p]\,|\bigr\}.$$

Доказательство. В силу теоремы 4.2 H обладает хотя бы одной базисной подгруппой. Обозначим через C какую-либо базисную подгруппу группы H. В силу предложения 4.18 она удовлетворяет соотношению

$$|(H/C)[p]\,| \leqslant |(p^k H)[p]\,| \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{n}$ кардинальное число, определяемое равенством

$$\mathfrak{n} = \min_{k \geqslant 1}\bigl\{|(p^k H)[p]\,|\bigr\}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует неравенство

$$|(H/C)[p]\,| \leqslant \mathfrak{n}. \tag{3}$$

Если $|(H/C)[p]\,| = \mathfrak{n}$, то, полагая $B = C$, получим искомую базисную подгруппу, удовлетворяющую условию (a).

Рассмотрим случай, когда

$$|(H/C)[p]\,| < \mathfrak{n}.$$

В этом случае в силу предложения 4.23 имеет место равенство

$$\mathfrak{n} = \min_{k \geqslant 1}\bigl\{|(p^k C)[p]\,|\bigr\}. \tag{4}$$

Так как C – примарная группа, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп, то в силу предложения 4.22 существует базисная подгруппа B группы C, удовлетворяющая условию

$$|(C/B)[p]\,| = \min_{k \geqslant 1}\bigl\{|(p^k C)[p]\,|\bigr\}. \tag{5}$$

Поскольку $B \subset C \subset H$, то

$$(H/B)[p] \supset (C/B)[p],$$

откуда

$$|(H/B)[p]\,| \geqslant |(C/B)[p]\,|. \tag{6}$$

На основании (4), (5) и (6) заключаем, что

$$|(H/B)[p]\,| \geqslant \mathfrak{n}. \tag{7}$$

Так как B – базисная подгруппа группы C и C – базисная подгруппа группы H, то в силу предложения 4.10 B является базисной подгруппой группы H. Следовательно, в силу предложения 4.18 имеет место соотношение

$$|(H/B)[p]\,| \leqslant |(p^k H)[p]\,| \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots),$$

из которого в силу (2) следует неравенство

$$|(H/B)[p]\,| \leqslant \mathfrak{n}. \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получим соотношение (a). Таким образом, предложение 4.24 доказано.

4.25. *Пусть заданы примарная* (*относительно* p) *группа* H, *не содержащая элементов бесконечной высоты, и кардинальное число* $\mathfrak{m}$, *удовлетворяющее следующему условию*:

(s) $$\mathfrak{m} \leqslant |(p^k H)[p]\,| \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots),$$

причем если $\mathfrak{m}$ – *конечное число, то* $\mathfrak{m}$ *является степенью числа* p. *Тогда существует подгруппа* S *группы* H *со следующими свойствами*:

(a_1) $$|S[p]\,| = |H[p]\,|;$$

(a_2) S *является сервантной подгруппой группы* H *и факторгруппа* H/S *является полной примарной группой*;

(a_3) $$|(H/S)[p]\,| = \mathfrak{m}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{n}$ кардинальное число, определяемое следующим равенством:

$$\mathfrak{n} = \min_{k \geqslant 1}\bigl\{|(p^k H)[p]\,|\bigr\}. \tag{1}$$

Если порядки элементов группы H в совокупности ограничены, то очевидно, что $\mathfrak{m}$ может быть равно только единице. Полагая в этом случае $S = H$, мы получим искомую группу. Поэтому в дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что порядки элементов группы H в совокупности не ограничены. Легко видеть, что в этом случае кардинальное число $\mathfrak{n}$ будет бесконечным, так как H по условию не содержит элементов бесконечной высоты.

В силу предложения 4.24 существует базисная подгруппа B группы H такая, что

$$|(H/B)[p]\,| = \mathfrak{n}. \tag{2}$$

Обозначим через $\overline{H}$ факторгруппу H/B:

$$\overline{H} = H/B.$$

Факторгруппа $\overline{H}$ является полной примарной группой, так как B – базисная подгруппа группы H. Равенство (2) можно переписать следующим образом:

$$|\overline{H}[p]\,| = \mathfrak{n}. \tag{3}$$

Отметим, что из условия (s) и равенства (1) следует, что

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Так как $\overline{H}[p]$ разлагается в прямую сумму циклических подгрупп и имеет бесконечную мощность $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, то $\overline{H}[p]$ можно представить в виде прямой суммы двух слагаемых

$$\overline{H}[p] = S_1 \oplus D_1, \tag{4}$$

удовлетворяющих условиям

$$|D_1| = \mathfrak{m}, \tag{5}$$

$$|S_1| = \mathfrak{n}. \tag{6}$$

Группа $D_1 \subset \overline{H}[p]$, и $\overline{H}$ является полной группой. Поэтому согласно предложению 2.36 существует полная примарная подгруппа $\overline{D}$ группы $\overline{H}$ такая, что

$$\overline{D}[p] = D_1. \tag{7}$$

В силу предложения 2.12 $\overline{D}$ является прямым слагаемым группы $\overline{H}$:

$$\overline{H} = \overline{D} \oplus \overline{S}, \tag{8}$$

причем, так как на основании (4) и (7) $\overline{D} \cap S_1 = \{0\}$, в качестве второго слагаемого можно взять группу $\overline{S}$, содержащую S_1.

Так как $\overline{S}[p] \subset \overline{H}[p]$, то согласно (3) $|\overline{S}[p]\,| \leqslant \mathfrak{n}$. С другой стороны, $\overline{S}[p] \supset S_1$, и, значит, в силу (6) $|\overline{S}[p]\,| \geqslant \mathfrak{n}$. Следовательно,

$$|\overline{S}[p]\,| = \mathfrak{n}. \tag{9}$$

Обозначим через S полный прообраз группы $\overline{S}$ при естественном гомоморфизме группы H на факторгруппу $\overline{H}$, $\overline{H} = H/B$.

Группа B является сервантной подгруппой группы H. В силу предложения 3.20 группа B будет сервантной подгруппой группы S, так как S является подгруппой группы H. Отсюда на основании предложения 3.33 заключаем, что имеют место соотношения

$$H[p]/B[p] \cong (H/B)[p], \tag{10}$$

$$S[p]/B[p] \cong (S/B)[p]. \tag{11}$$

Так как $\overline{S} = S/B$ и $\overline{H} = H/B$, то на основании (3) и (9) заключаем, что

$$|(S/B)[p]\,| = |(H/B)[p]\,| = \mathfrak{n}. \tag{12}$$

Поэтому из соотношений (10), (11) и (12) вытекают следующие равенства:

$$|S[p]\,| = |B[p]\,| \cdot \mathfrak{n},$$
$$|H[p]\,| = |B[p]\,| \cdot \mathfrak{n}.$$

Эти равенства показывают, что

$$|S[p]\,| = |H[p]\,|.$$

Таким образом, равенство (a_1) доказано.

Докажем, что S является сервантной подгруппой группы H. В силу (8) $\overline{S}$ изоморфна факторгруппе полной примарной группы $\overline{H}$. Поэтому согласно предложению 2.4 $\overline{S}$ является полной примарной группой. Но $S/B = \overline{S}$. Следовательно, факторгруппа S/B является полной примарной группой. Кроме того, B является сервантной подгруппой группы H. Отсюда на основании предложения 3.26 заключаем, что S является сервантной подгруппой группы H.

Используя (8) и применяя вторую теорему об изоморфизме, получим

$$H/S \cong (H/B)/(S/B) = \overline{H}/\,\overline{S} \cong \overline{D},$$

т.е.

$$H/S \cong \overline{D}, \tag{13}$$

откуда $(H/S)[p] \cong \overline{D}[p]$. Но в силу (5) и (7) $|\overline{D}[p]\,| = \mathfrak{m}$. Следовательно,

$$|(H/S)[p]\,| = \mathfrak{m},$$

т.е. равенство (a_3) доказано.

Так как $\overline{D}$ – полная примарная группа, то на основании (13) заключаем, что факторгруппа H/S является полной примарной группой. Кроме того, выше было показано, что S является сервантной подгруппой группы H. Таким образом, подгруппа S группы H обладает также свойством (a_2).

Итак, предложение 4.25 доказано.

4.26. Теорема. *Пусть заданы обобщенная примарная (относительно p) группа A, не содержащая элементов бесконечной высоты, и кардинальное число $\mathfrak{m}$, удовлетворяющее следующему условию:*

$$\mathfrak{m} \leqslant |(p^k A)[p]\,| \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots), \tag{1}$$

причем если $\mathfrak{m}$ – конечное число, то $\mathfrak{m}$ является степенью p. Тогда существует подгруппа C группы A со следующими свойствами:

(b_1) $$|C[p]\,| = |A[p]\,|;$$

(b_2) *C является сервантной подгруппой группы A и факторгруппа A/C является полной примарной группой;*

(b_3) $$|(A/C)[p]\,| = \mathfrak{m}.$$

Доказательство. Обозначим через H максимальную периодическую подгруппу группы A. В силу предложения 1.3 H является примарной (относительно p) группой. Группа A по условию не содержит элементов бесконечной высоты, следовательно, H также не содержит элементов бесконечной высоты.

Найдем максимальную периодическую подгруппу группы p^kA, где k – натуральное число. Она, очевидно, равна пересечению $H \cap p^kA$. Но H, будучи максимальной периодической подгруппой группы A, является ее сервантной подгруппой. Следовательно, $H \cap p^kA = p^kH$. Таким образом, максимальной периодической подгруппой группы p^kA является p^kH. Отсюда следует, что

$$(p^kA)[p] = (p^kH)[p]. \tag{2}$$

Из условия (1) и равенства (2) следует, что

$$\mathfrak{m} \leqslant |(p^kH)[p]\,| \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Таким образом, группа H и кардинальное число $\mathfrak{m}$ удовлетворяют условиям предложения 4.25. На основании этого предложения мы можем утверждать, что существует подгруппа S группы H со следующими свойствами:

(a_1) $$|S[p]\,| = |H[p]\,|;$$

(a_2) S является сервантной подгруппой группы H, и факторгруппа H/S является полной примарной группой;

(a_3) $$|(H/S)[p]\,| = \mathfrak{m}.$$

Факторгруппы A/S и H/S обозначим соответственно через $\overline{A}$ и $\overline{H}$, т.е.

$$\overline{A} = A/S, \tag{3}$$
$$\overline{H} = H/S. \tag{4}$$

Согласно (a_2) $\overline{H}$ является полной примарной группой. Следовательно, в силу предложения 2.10 $\overline{H}$ является прямым слагаемым группы $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \overline{H} \oplus \overline{C}. \tag{5}$$

Так как S является подгруппой группы H и H – максимальная периодическая подгруппа группы A, то факторгруппа $\overline{H}$ является максимальной периодической подгруппой группы $\overline{A}$. Следовательно, в равенстве (5) прямое слагаемое $\overline{C}$ является группой без кручения.

Обозначим через C полный прообраз группы $\overline{C}$ при естественном гомоморфизме группы A на факторгруппу $\overline{A}$. Тогда

$$\overline{C} = C/S. \tag{6}$$

Так как S есть периодическая группа, а $\overline{C}$ – группа без кручения, то S является максимальной периодической подгруппой группы C. Поэтому имеют место равенства

$$C \cap H = S, \tag{7}$$

$$C[p] = S[p]. \tag{8}$$

Далее,

$$A[p] = H[p], \tag{9}$$

так как H является максимальной периодической подгруппой группы A. Из равенств (8), (9) и свойства (a_1) группы S следует, что

$$|A[p]\,| = |C[p]\,|.$$

Таким образом, доказано, что группа C обладает свойством (b_1).

Докажем, что группа C обладает свойством (b_2). Согласно (a_2) S является сервантной подгруппой группы H. Далее, группа H является максимальной периодической и, значит, сервантной подгруппой группы A. Поэтому в силу предложения 3.18 S является сервантной подгруппой группы A. Кроме того, из (5) в силу предложения 3.24 следует, что $\overline{C}$ является сервантной подгруппой группы $\overline{A}$. Теперь на основании предложения 3.25 мы заключаем, что C является сервантной подгруппой группы A.

Далее, принимая во внимание равенства (3), (5) и (6), имеем

$$A/C \cong (A/S)/(C/S) = \overline{A}/\,\overline{C} \cong \overline{H},$$

т.е. $A/C \cong \overline{H}$. Но $\overline{H}$ есть полная примарная группа, откуда следует, что факторгруппа A/C является полной примарной группой.

Таким образом, доказано, что группа C обладает свойством (b_2).

Из равенств (4), (5) и (6), очевидно, следует равенство

$$A = [H,\, C]. \tag{10}$$

Применяя первую теорему об изоморфизме и используя (7) и (10), получим

$$A/C = [H,\, C]/C \cong H/(H \cap C) = H/S,$$

т.е.

$$A/C \cong H/S,$$

откуда

$$|(A/C)[p]\,| = |(H/S)[p]\,|.$$

Из последнего равенства и равенства (a_3) следует равенство (b_3).

Итак, теорема 4.26 доказана.

4.27. *Пусть A и B – обобщенные примарные группы, удовлетворяющие следующим условиям*:

(l_1) *A является группой без элементов бесконечной высоты;*

$$(l_2) \qquad |B/pB| \leqslant |(p^kA)[p]\,| \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Тогда существует подгруппа C группы A со следующими свойствами:

$$(б_1) \qquad |C[p]\,| = |A[p]\,|;$$

$(б_2)$ *C является изотипной и плотной подгруппой группы A и факторгруппа A/C является полной примарной группой;*

$$(б_3) \qquad |(A/C)[p]\,| = |B/pB|.$$

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{m} = |B/pB|. \tag{1}$$

Условия (l_1) и (l_2) показывают, что группа A и кардинальное число $\mathfrak{m}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.26. На основании этой теоремы мы можем утверждать, что существует подгруппа C группы A, обладающая свойствами (b_1), (b_2), (b_3), перечисленными в теореме 4.26.

Легко видеть, что C является искомой группой. Действительно, ввиду равенства (1) свойства $(б_1)$ и $(б_3)$ следуют соответственно из (b_1) и (b_3).

Покажем, что группа C обладает свойством $(б_2)$. Согласно условию (l_1) группа A и, значит, ее подгруппа C не содержат элементов бесконечной высоты. Кроме того, в силу (b_2) C является сервантной подгруппой группы A. Следовательно, согласно предложению 3.8 C является изотипной подгруппой группы A. Далее, согласно (b_2) факторгруппа A/C является полной примарной группой. Отсюда в силу предложения 2.9 следует, что для любого натурального числа n имеет место равенство

$$A = [C,\, p^nA].$$

Но A не содержит элементов бесконечной высоты, а тогда последнее равенство показывает, что C является плотной подгруппой группы A.

Таким образом, мы убедились в том, что группа C обладает свойством $(б_2)$.

Итак, предложение 4.27 доказано.

Поступило 28/IV 1951 г.

Литература

1. Baer R., *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. J., **3:1** (1937), 68–122.

2. Baer R., *Abelian groups that are direct summands of every containing Abelian group*, Bull. Amer. Math. Soc., **46:10** (1940), 800–806.

3. Derry D., *Über eine Klasse von Abelschen Gruppen*, Proc. London Math. Soc., **43** (1937), 490–506.

4. Kakutani S., *On cardinal numbers related with a compact Abelian group*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **19:7** (1943), 366–372.

5. Kampen E. R. van, *Locally bicompact Abelian groups and their character groups*, Ann. Math., **36:2** (1935), 448–463.

6. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **9(51):1** (1941), 165–181.

7. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **16(58):2** (1945), 129–162.

8. Курош А. Г., *Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп*, Успехи мат. наук, вып. **3** (1937), 5–15.

9. Курош А. Г., *Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range*, Ann. Math., **38:1** (1937), 175–203.

10. Курош А. Г., *Несколько замечаний к теории бесконечных групп*, Мат. сб., **5(47):2** (1939), 347–354.

11. Курош А. Г., *Теория групп*, М.; Л.: Гостехиздат, 1944.

12. Мальцев А. И., *Абелевы группы конечного ранга без кручения*, Мат. сб., **4(46):1** (1938), 45–68.

13. Понтрягин Л. С., *The theory of topological commutative groups*, Ann. Math., **35:2** (1934), 361–388.

14. Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы*, М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938.

15. Prüfer H., *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **17** (1923), 35–61.

16. Prüfer H., *Theorie der Abelschen Gruppen*, Math. Z., **20** (1924), 165–187; **22** (1925), 222–249.

17. Ulm H., *Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen*, Math. Ann., **107** (1933), 774–803.

18. Ulm H., *Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **40** (1935), 205–207.

19. Zippin L., *Countable torsion groups*, Ann. Math., **36:1** (1935), 86–99.

Обобщенные примарные группы. II

(Доложено на заседании Общества 20/III 1951 г.) [1]

§ 5. Построение обобщенной примарной группы G, у которой подгруппа G^α и факторгруппа G/G^α изоморфны заданным группам

5.1. Определение. Пусть заданы:

(a) редуцированные обобщенные примарные (с одним и тем же кольцом операторов) группы A и A_1, причем $\tau^*(A)$ является предельным порядковым числом;

(b) изотипная и плотная (допустимая) подгруппа C группы A;

(c) гомоморфизм φ обобщенной примарной группы $P(A_1)$ на факторгруппу A/C с ядром A_1 [$P(A_1)$ – минимальная полная для A_1 группа, содержащая A_1 в качестве допустимой подгруппы (см. теорему 2.30) [2]].

Обозначим через ψ естественный гомоморфизм группы A на факторгруппу A/C. В прямой сумме $A \oplus P(A_1)$ рассмотрим множество всех элементов вида $a + b,\ a \in A,\ b \in P(A_1)$, удовлетворяющих условию $\psi a = \varphi b$. Это множество образует подгруппу группы $A \oplus P(A_1)$, и эту подгруппу мы будем обозначать символом $[A;\, C;\, \varphi;\, P(A_1)]$.

Так как C – допустимая подгруппа обобщенной примарной группы A, то естественный гомоморфизм ψ группы A на факторгруппу A/C является операторным. В силу предложения 2.28 факторгруппа $P(A_1)/A_1$ является примарной группой. Следовательно, φ является гомоморфизмом обобщенной примарной группы $P(A_1)$ на примарную группу A/C. Поэтому в силу предложения 1.24 φ является операторным гомоморфизмом. Так как φ и ψ – операторные гомоморфизмы, то легко видеть, что группа $[A;\, C;\, \varphi;\, P(A_1)]$ является допустимой подгруппой обобщенной примарной группы $A \oplus P(A_1)$.

5.2. Теорема. *Группа $G = [A;\, C;\, \varphi;\, P(A_1)]$ является обобщенной примарной группой, обладающей следующими свойствами*:

[1] Часть первая (§ 1–4) напечатана в томе 1 Трудов Московского математического общества, с. 247–326.

[2] Здесь и во всем дальнейшем тексте ссылки на теоремы, предложения и определения, в нумерации которых первая цифра имеет значения от 1 до 4, относятся к части I настоящей статьи.

$$(s_1) \qquad G \cap A = C,$$

$$(s_2) \qquad [G,\, A] = A \oplus P(A_1),$$

$$(s_3) \qquad G/C \cong P(A_1),$$

$$(s_4) \qquad G \cap P(A_1) = A_1,$$

$$(s_5) \qquad [G,\, P(A_1)] = A \oplus P(A_1),$$

$$(s_6) \qquad C \textit{ есть изотипная подгруппа группы } G,$$

$$(s_7) \qquad G^{\tau(A)} = A_1,$$

$$(s_8) \qquad G/G^{\tau(A)} \cong A,$$

$$(s_9) \qquad G \textit{ есть редуцированная группа},$$

$$(s_{10}) \qquad G[p] = C[p] \oplus A_1[p].$$

Доказательство. 1°. Тот факт, что G является обобщенной примарной группой, следует из того, что G есть подгруппа (допустимая) обобщенной примарной группы $A \oplus P(A_1)$.

2°. Так как $A \cap P(A_1) = \{0\}$, то пересечение $G \cap A$ состоит из всех тех элементов вида $a + b$, $a \in A$, $b \in P(A_1)$, для которых $\psi a = \varphi b$ и $b = 0$. Следовательно, пересечение $G \cap A$ содержит только элементы, принадлежащие ядру гомоморфизма ψ. Поэтому $G \cap A = C$, т.е. соотношение (s_1) верно.

3°. Пересечение $G \cap P(A_1)$ состоит из всех тех элементов вида $a + b$, $a \in A$, $b \in P(A_1)$, для которых $\varphi b = \psi a$ и $a = 0$. Следовательно, это пересечение содержит только элементы, принадлежащие ядру гомоморфизма φ. Поэтому $G \cap P(A_1) = A_1$. Таким образом, доказано соотношение (s_4).

4°. Для доказательства (s_2) достаточно показать, что $P(A_1) \subset [G,\, A]$. Пусть b – произвольный элемент группы $P(A_1)$; докажем, что $b \in [G,\, A]$. Пусть a – элемент группы A, принадлежащий классу смежности φb, $\varphi b \in A/C$. Тогда $\varphi b = \psi a$ и, значит, $a + b \in G$. Следовательно, $b \in [G,\, A]$. Этим доказано, что имеет место соотношение $P(A_1) \subset [G,\, A]$, а значит, и (s_2).

5°. Для доказательства (s_5) достаточно показать, что $A \subset [G,\, P(A_1)]$. Пусть a есть произвольный элемент группы A; докажем, что $a \in [G,\, P(A_1)]$. Так как $\psi a \in A/C$ и φ есть гомоморфизм группы $P(A_1)$ *на* A/C, то существует элемент $b \in P(A_1)$ такой, что $\varphi b = \psi a$. Следовательно, $a + b$ принадлежит группе G и, значит, $a \in [G,\, P(A_1)]$. Этим соотношение (s_5) доказано.

6°. Соотношение (s_3) следует из (s_1) и (s_2). Действительно,

$$P(A_1) \cong (A \oplus P(A_1))/A = [G,\, A]/A \cong G/(G \cap A) = G/C.$$

7°. Докажем свойство (s_6). По определению 5.1 C является изотипной подгруппой группы A. В силу предложений 3.23 и 3.17 C будет изотипной подгруппой группы $A \oplus P(A_1)$. Поэтому согласно предложению 3.19 C является изотипной подгруппой группы G.

8°. Докажем методом трансфинитной индукции, что группа G обладает следующими свойствами:

$$\begin{array}{lll} (t_1) & p^\alpha G = G \cap (p^\alpha A \oplus P(A_1)) & \big(\alpha \in W(\tau^*(A))\big), \\ (t_2) & G = [C,\, p^\alpha G] & \big(\alpha \in W(\tau^*(A))\big), \\ (t_3) & p^\alpha G / p^\alpha C \cong P(A_1) & \big(\alpha \in W(\tau^*(A))\big). \end{array}$$

Для $\alpha = 0$ соотношения (t_1), (t_2), очевидно, верны; в силу (s_3) соотношение (t_3) также имеет место при $\alpha = 0$. Предположим, что соотношения (t_1), (t_2), (t_3) верны для всякого порядкового числа $\alpha < \beta$, $0 < \beta < \tau^*(A)$, и докажем, что тогда эти соотношения верны также при $\alpha = \beta$.

Докажем, что соотношение (t_1) имеет место при $\alpha = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число. Согласно определению 5.1 C является изотипной подгруппой группы A. Следовательно, в силу предложения 3.14 $p^{\beta-1}C$ будет изотипной подгруппой группы $p^{\beta-1}A$. Поэтому исходя из предложений 3.23 и 3.17 $p^{\beta-1}C$ будет изотипной подгруппой группы $p^{\beta-1}A \oplus P(A_1)$. Кроме того, факторгруппа $p^{\beta-1}G/p^{\beta-1}C$ является полной группой, так как по индуктивному предположению соотношение (t_3) имеет место при $\alpha = \beta - 1$. Отсюда в силу предложения 3.26 $p^{\beta-1}G$ является сервантной подгруппой группы $p^{\beta-1}A \oplus P(A_1)$. Поэтому $p(p^{\beta-1}G) = p^{\beta-1}G \cap p(p^{\beta-1}A \oplus P(A_1))$. Принимая во внимание, что $pP(A_1) = P(A_1)$, так как $P(A_1)$ есть полная группа, и используя очевидное равенство $p(p^{\beta-1}A \oplus P(A_1)) = p^\beta A \oplus pP(A_1)$, получим

$$(e) \qquad p^\beta G = p^{\beta-1}G \cap (p^\beta A \oplus P(A_1)).$$

По индуктивному предположению $p^{\beta-1}G = G \cap (p^{\beta-1}A \oplus P(A_1))$. Заменяя в равенстве (e) $p^{\beta-1}G$ через $G \cap (p^{\beta-1}A \oplus P(A_1))$ и замечая, что

$$(p^{\beta-1}A \oplus P(A_1)) \cap (p^\beta A \oplus P(A_1)) = p^\beta A \oplus P(A_1),$$

получим

$$p^\beta G = G \cap (p^\beta A \oplus P(A_1)). \tag{1}$$

2-й случай: β – предельное число. По индуктивному предположению имеем $p^\alpha G = G \cap (p^\alpha A \oplus P(A_1))$ для всякого $\alpha < \beta$. Следовательно,

$$p^\alpha G \supset G \cap (p^\beta A \oplus P(A_1)) \qquad (\alpha < \beta),$$

откуда в силу равенства $p^\beta G = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha G$ следует, что

$$p^\beta G \supset G \cap (p^\beta A \oplus P(A_1)). \tag{2}$$

Из соотношения $G \subset A \oplus P(A_1)$ следует $p^\beta G \subset p^\beta A \oplus p^\beta P(A_1)$. Так как $P(A_1)$ – полная группа, то $p^\beta P(A_1) = P(A_1)$, следовательно,

$$p^\beta G \subset G \cap (p^\beta A \oplus P(A_1)). \tag{3}$$

Из (2) и (3) теперь следует, что равенство (1) имеет место также и во втором случае.

Докажем, что равенство (t_2) имеет место при $\alpha = \beta$, $\beta < \tau^*(A)$. Согласно определению 5.1 C есть плотная подгруппа группы A, т.е.

$$A = [C,\, p^\beta A] \qquad (\beta < \tau^*(A)). \tag{4}$$

Пусть $a + b$, где $a \in A$ и $b \in P(A_1)$, есть произвольный элемент группы G. Согласно (4) $a = c + d$, где $c \in C$, $d \in p^\beta A$. Так как $\psi a = \varphi b$ и $\psi c = 0$, то $\psi d = \varphi b$, следовательно, $d + b \in G$ и $d + b \in G \cap (p^\beta A \oplus P(A_1))$, откуда в силу (1) $d + b \in p^\beta G$. Поэтому $a + b = c + (d + b) \in [C,\, p^\beta G]$. Таким образом, $G \subset [C,\, p^\beta G]$. Принимая во внимание, что, согласно (s_1), $C \subset G$, получаем

$$G = [C,\, p^\beta G] \qquad (\beta < \tau^*(A)), \tag{5}$$

т.е. равенство (t_2) верно при $\alpha = \beta$.

Докажем, что соотношение (t_3) верно при $\alpha = \beta$. Из свойства (s_6) в силу определения 3.4 следует равенство

$$C \cap p^\beta G = p^\beta C. \tag{6}$$

Используя соотношения (s_3), (5), (6) и первую теорему об изоморфизме, получим

$$P(A_1) \cong G/C = [C,\, p^\beta G]/C \cong p^\beta G/(C \cap p^\beta G) = p^\beta G/p^\beta C,$$

т.е. $p^\beta G/p^\beta C \cong P(A_1)$.

Индукция проведена полностью и, значит, доказано, что группа G обладает свойствами (t_1), (t_2), (t_3).

9°. Докажем, что имеет место равенство (s_7). Легко видеть, что соотношения (2), (3) и их доказательства остаются в силе также и при $\beta = \tau^*(A)$ (отметим, что согласно определению 5.1 $\tau^*(A)$ является предельным числом). Поэтому имеет место также соотношение

$$p^{\tau^*(A)}G = G \cap (p^{\tau^*(A)}A \oplus P(A_1)).$$

Но согласно условию A есть редуцированная группа, т.е. $p^{\tau^*(A)}A = \{0\}$. Поэтому $p^{\tau^*(A)}G = G \cap P(A_1)$, откуда в силу (s_4) следует равенство

$$p^{\tau^*(A)}G = A_1. \tag{7}$$

Так как $\tau^*(A)$ есть предельное число, то $p^{\tau^*(A)}G = G^{\tau(A)}$. Поэтому равенство (s_7) следует из (7).

10°. Докажем, что имеет место соотношение (s_8). Используя соотношения (s_5), (s_4), (s_7) и первую теорему об изоморфизме, получим

$$\begin{gathered} A \cong (A \oplus P(A_1))/P(A_1) = [G,\, P(A_1)]/P(A_1) \cong \\ \cong G/(G \cap P(A_1)) = G/A_1 = G/G^{\tau(A)}, \end{gathered}$$

т.е. $G/G^{\tau(A)} \cong A$.

11°. По условию A_1 есть редуцированная группа, т.е. $A_1^{\tau(A_1)} = \{0\}$, откуда в силу (s_7) имеем

$$G^{\tau(A)+\tau(A_1)} = A_1^{\tau(A_1)} = \{0\}.$$

Таким образом, G является редуцированной группой.

12°. Докажем, что имеет место равенство (s_{10}). Из $C[p] \subset A,\ A_1[p] \subset P(A_1)$ и $A \cap P(A_1) = \{0\}$ получаем равенство

$$C[p] \cap A_1[p] = \{0\}. \tag{8}$$

Заметим, что из соотношений $G \supset C,\ G \supset A_1$ следует

$$G[p] \supset \big[C[p],\, A_1[p]\big]. \tag{9}$$

Докажем, что верно и обратное включение. Пусть $g \in G[p]$; тогда g можно представить в виде $g = a + b$, где $a \in A,\ b \in P(A_1)$ и $\psi a = \varphi b$. Покажем, что $a \in C[p]$ и $b \in A_1[p]$. Так как $pg = 0$, то $pa + pb = 0$. Поэтому

$$pa = -pb \in A \cap P(A_1) = \{0\}$$

и, значит, $pa = 0,\ pb = 0$. Следовательно, b является элементом порядка $\leqslant p$ группы $P(A_1)$. Но согласно предложению 2.28 всякий такой элемент принадлежит также группе $A_1[p]$, откуда, принимая во внимание, что ядрами гомоморфизмов φ и ψ являются соответственно группы A_1 и C, заключаем, что $\varphi b = 0$ и, значит, $a \in C$. Так как a – элемент порядка $\leqslant p$, то $a \in C[p]$. Этим доказано соотношение

$$G[p] \subset \big[C[p],\, A_1[p]\big]. \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) следует соотношение (s_{10}).

Теорема доказана.

§ 6. Оценка мощности редуцированной обобщенной примарной группы

6.1. *Пусть A – редуцированная обобщенная примарная (относительно p) группа. Тогда существует обобщенная примарная группа G (с тем же кольцом операторов, что и группа A), обладающая следующими свойствами:*

(d_1) $$G/pG \cong A/pA,$$

(d_2) $$|G| \geqslant |A|,$$

(d_3) *группа G является редуцированной и тип ее не больше 2, т.е. $G^2 = \{0\}$.*

Доказательство. Если $A^2 = \{0\}$, то, очевидно, в качестве искомой группы G можно взять группу A. Таким образом, нуждается в доказательстве только тот случай, когда $A^2 \neq \{0\}$.

1°. В силу 4.2 A обладает хотя бы одной базисной подгруппой. Пусть C – какая-либо базисная подгруппа группы A. Тогда факторгруппа A/C является полной обобщенной примарной группой. Поэтому в силу предложения 2.33 существует полная обобщенная примарная группа без кручения P (с тем же кольцом операторов, что и группа A) и операторный гомоморфизм φ группы P на A/C, ядро S которого является редуцированной допустимой подгруппой группы P. Обозначим через ψ естественный гомоморфизм группы A на факторгруппу A/C. В прямой сумме $A \oplus P$ рассмотрим множество G всех элементов вида $a + b,\ a \in A,\ b \in P$, удовлетворяющих условию $\psi a = \varphi b$. Так как φ и ψ – операторные гомоморфизмы, то легко видеть, что G является допустимой подгруппой группы $A \oplus P$. Таким образом, G является обобщенной примарной группой (с тем же кольцом операторов, что и группа A).

2°. Группа G обладает следующими свойствами:

$$G \cap A = C, \tag{s_1}$$

$$A \oplus P = [G,\, A], \tag{s_2}$$

$$G/C \cong P, \tag{s_3}$$

$$G \cap P = S, \tag{s_4}$$

$$A \oplus P = [G,\, P]. \tag{s_5}$$

Доказательство этих свойств производится так же, как и доказательство соотношений (s_1) – (s_5) в теореме 5.2 (надо только в этом доказательстве группы A_1 и $P(A_1)$ заменить соответственно группами S и P).

3°. Группа C является сервантной подгруппой группы G. Действительно, C является базисной и, следовательно, сервантной подгруппой группы A. Группа A в силу предложения 3.24 есть сервантная подгруппа группы $A \oplus P$. Поэтому на основании предложения 3.18 C является сервантной подгруппой группы $A \oplus P$. Отсюда, учитывая, что G есть подгруппа группы $A \oplus P$, и из 3.20 следует, что C является сервантной подгруппой группы G.

4°. Группа C является базисной подгруппой группы G, так как она сервантна в G, разлагается в прямую сумму циклических подгрупп (будучи базисной подгруппой группы A) и в силу (s_3) факторгруппа G/C является полной группой.

Так как C является базисной подгруппой групп A и G, то на основании предложения 4.12 имеют место соотношения

$$G/pG \cong C/pC, \qquad A/pA \cong C/pC,$$

из которых следует соотношение (d_1).

5°. Докажем, что группа G обладает свойством (d_2). Используя соотношения (s_4), (s_5) и первую теорему об изоморфизме, получим

$$A \cong (A \oplus P)/P = [G,\, P]/P \cong G/(G \cap P) = G/S,$$

т.е.

$$A \cong G/S, \tag{1}$$

откуда следует соотношение (d_2).

6°. Группа G является редуцированной. Действительно, по условию A – редуцированная группа, следовательно, в силу (1) редуцированной является и факторгруппа G/S. Кроме того, S – редуцированная группа, тогда из предложения 2.34 следует, что группа G также является редуцированной.

7°. Докажем, что G^1 является группой без кручения. Группа C, будучи базисной подгруппой группы G, не содержит элементов, имеющих в G бесконечную высоту. Следовательно, имеет место равенство

$$C \cap G^1 = \{0\}.$$

Кроме того, максимальная периодическая подгруппа группы G содержится в C, так как в силу (s_3) факторгруппа G/C является группой без кручения. Поэтому G^1 является группой без кручения.

8°. Докажем, что $G^2 = \{0\}$. Допустим, что $G^2 \neq \{0\}$. Тогда существует ненулевой элемент $c \in G^2$. Но так как $G^2 = \bigcap\limits_{n<\omega} p^n G^1$, то для всякого натурального числа n существует элемент $x_n \in G^1$, удовлетворяющий условию

$$p^n x_n = c \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{2}$$

Обозначим через Z_n (допустимую) циклическую подгруппу группы G^1, порожденную элементом x_n,

$$Z_n = [x_n] \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$Z_n \subset Z_{n+1} \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{4}$$

Действительно, элемент $x_n - px_{n+1}$ имеет конечный порядок, так как в силу условия (2)

$$p^n(x_n - px_{n+1}) = p^n x_n - p^{n+1} x_{n+1} = c - c = 0.$$

Но по доказанному в пункте 7° в группе G^1 нет элементов конечного порядка, отличных от нуля. Следовательно, $x_n - px_{n+1} = 0$ и

$$px_{n+1} = x_n. \tag{5}$$

Теперь из (5) следует соотношение (4).

Положим

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n. \tag{6}$$

На основании (4) и (6) заключаем, что Z является (допустимой) подгруппой группы G^1. Легко видеть, что Z есть полная группа. Действительно, пусть

$y \in Z$. В силу (6) существует циклическая подгруппа Z_n, содержащая y. Следовательно, учитывая (3),

$$y = kx_n, \tag{7}$$

где k – число кольца операторов группы G. Группа Z содержит элемент kx_{n+1}. В силу (5) и (7) $p(kx_{n+1}) = k(px_{n+1}) = kx_n = y$. Следовательно, $y = p(kx_{n+1})$ и $y \in pZ$. Этим доказано, что $pZ \supset Z$ и, значит, $pZ = Z$. Отсюда на основании предложения 2.3 следует, что Z является полной группой.

Таким образом, Z является ненулевой полной подгруппой группы G. Но в п. 6° было доказано, что G есть редуцированная группа. Это противоречие показывает, что предположение о том, что $G^2 \neq \{0\}$, должно быть отвергнуто. Следовательно, $G^2 = \{0\}$, т.е. группа G обладает свойством (d_3).

6.2. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной группы H, не содержащей элементов бесконечной высоты. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad |H| \leqslant |B|^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Обозначим через M множество всех последовательностей вида

$$\{b_n\}_{n=1,2,\dots} \qquad (b_n \in B), \tag{1}$$

удовлетворяющих условию

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(b_n + p^n H) \neq \varnothing, \tag{2}$$

где $\varnothing$ – пустое множество. Имеет место соотношение

$$|M| \leqslant |B|^{\aleph_0}, \tag{3}$$

где $|M|$ – мощность множества M.

Покажем, что если выполняется условие (2), то пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(b_n + p^n H)$ содержит только один элемент группы H. Действительно, если a, b – элементы, принадлежащие этому пересечению, то $a - b \in p^n H$ при любом натуральном числе n. Поэтому $a - b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n H$. Но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n H = \{0\}$, так как по условию H есть группа, не содержащая элементов бесконечной высоты. Следовательно, $a - b = 0$ и $a = b$.

Каждой последовательности $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$, принадлежащей множеству M, поставим в соответствие тот (единственный) элемент группы H, который принадлежит пересечению $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(b_n + p^n H)$. Это соответствие определяет однозначное отображение η множества M в H. Покажем, что η отображает множество M *на* группу H, т.е.

$$\eta(M) = H. \tag{4}$$

Пусть x – элемент группы H. По условию B является базисной подгруппой группы H; поэтому, учитывая предложение 4.3, получаем соотношение

$$H = [B,\, p^n H] \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{5}$$

В силу (5) элемент x можно представить в виде

$$x = a_n + p^n c_n, \quad a_n \in B, \quad c_n \in H \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{6}$$

Последовательность $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,\dots}$ принадлежит множеству M, так как в силу условия (6) $x \in a_n + p^n H$ при $n = 1,\, 2,\, \dots$ и поэтому

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n + p^n H) = \{x\}. \tag{7}$$

Соотношение (7) показывает, что образом последовательности $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,\dots}$ при отображении η является элемент x. Этим соотношение (4) доказано.

Так как η – однозначное отображение, то на основании (4) заключаем, что

$$|H| \leqslant |M|. \tag{8}$$

Теперь, сопоставляя (3) и (8), получим соотношение (a).

6.3. *Пусть B – базисная подгруппа обобщенной примарной группы H. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad |H/H^1| \leqslant |B|^{\aleph_0}.$$

Доказательство. По условию B – базисная подгруппа группы H. Следовательно, B разлагается в прямую сумму циклических подгрупп и сервантна в H. Поэтому имеет место соотношение

$$B \cap H^1 = \{0\}. \tag{1}$$

Положим

$$\overline{H} = H/H^1$$

и

$$\overline{B} = [B,\, H^1]/H^1. \tag{2}$$

Факторгруппа $\overline{H}$ не содержит элементов бесконечной высоты. Кроме того, в силу предложения 4.11 $\overline{B}$ является базисной подгруппой группы $\overline{H}$. Поэтому на основании предложения 6.2 имеет место соотношение

$$|\overline{H}| \leqslant |\overline{B}|^{\aleph_0}. \tag{3}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что

$$\overline{B} \cong B. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) следует соотношение (a).

6.4. *Пусть H – обобщенная примарная (относительно p) группа. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad |H/H^1| \leqslant |H/pH|^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Если H – полная группа, то $H = pH$, $H = H^1$ и поэтому имеет место соотношение (a). Предположим, что H не является полной группой. Пусть B – какая-либо базисная подгруппа группы H. В силу предложения 6.3 имеет место соотношение

$$|H/H^1| \leqslant |B|^{\aleph_0}. \tag{1}$$

Далее, в силу предложения 4.13 имеет место неравенство

$$|B| \leqslant |H/pH| \cdot \mathfrak{c}. \tag{2}$$

Но H – неполная группа, а тогда $H \neq pH$. Следовательно, $|H/pH| \geqslant 2$; поэтому из (2) следует соотношение

$$|B|^{\aleph_0} \leqslant |H/pH|^{\aleph_0}. \tag{3}$$

Сопоставляя (1) и (3), получим соотношение (a).

6.5. *Пусть G – обобщенная примарная* (*относительно p*) *группа. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad |G^1/pG^1| \leqslant |(G/G^1)[p]\,|.$$

Доказательство. Обозначим через H множество всех элементов $x \in G$, удовлетворяющих условию $px \in G^1$.

Легко видеть, что H – подгруппа группы G, для которой имеют место соотношения

$$pH = G^1, \tag{1}$$

$$H/G^1 = (G/G^1)[p]. \tag{2}$$

Обозначим через φ гомоморфизм группы H на подгруппу G^1, определяемый равенством

$$\varphi x = px \qquad (x \in H). \tag{3}$$

Ядром гомоморфизма φ является, очевидно, подгруппа $G[p]$ группы H. На основании (1) и (3) заключаем, что полным прообразом подгруппы pG^1 при гомоморфизме φ является подгруппа $\big[G^1,\, G[p]\big]$ группы H. Поэтому согласно теореме о гомоморфизме имеет место соотношение

$$H/\big[G^1,\, G[p]\big] \cong G^1/pG^1. \tag{4}$$

На основании (2) заключаем, что

$$\big|H/\big[G^1,\, G[p]\big]\,\big| \leqslant |H/G^1| = |(G/G^1)[p]\,|. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует соотношение (a).

6.6. *Пусть G – обобщенная примарная* (*относительно p*) *группа, удовлетворяющая условию*

$$(a) \qquad G^2 = \{0\}.$$

Тогда имеет место соотношение

$$(b) \qquad |G| \leqslant |G/pG|^{\aleph_0}.$$

Доказательство. В силу предложения 6.4 имеют место соотношения

$$|G^1/G^2| \leqslant |G^1/pG^1|^{\aleph_0}, \tag{1}$$
$$|G/G^1| \leqslant |G/pG|^{\aleph_0}. \tag{2}$$

Принимая во внимание условие (a), соотношение (1) можно записать в виде

$$|G^1| \leqslant |G^1/pG^1|^{\aleph_0}. \tag{3}$$

В силу предложения 6.5 имеет место неравенство

$$|G^1/pG^1| \leqslant |G/G^1|. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует соотношение

$$|G^1| \leqslant |G/G^1|^{\aleph_0}. \tag{5}$$

На основании (2) и (5) заключаем, что

$$|G^1| \leqslant |G/pG|^{\aleph_0}. \tag{6}$$

Кроме того, очевидно, имеет место соотношение

$$|G| = |G/G^1| \cdot |G^1|. \tag{7}$$

На основании (2), (6) и (7) заключаем, что имеет место соотношение (b).

6.7. Теорема. *Пусть A – редуцированная обобщенная примарная (относительно p) группа. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad |A| \leqslant |A/pA|^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Эта теорема легко следует из предложений 6.1 и 6.6. Действительно, согласно предложению 6.1 существует обобщенная примарная (относительно p) группа G, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(d_1) \qquad G/pG \cong A/pA,$$

$$(d_2) \qquad |G| \geqslant |A|,$$

$$(d_3) \qquad G^2 = \{0\}.$$

Так как G удовлетворяет условию (d_3), то в силу предложения 6.6 имеет место соотношение

$$|G| \leqslant |G/pG|^{\aleph_0}. \tag{1}$$

На основании соотношений (1), (d_1) и (d_2) заключаем, что имеет место соотношение (a). Теорема доказана.

6.8. *Если A – редуцированная обобщенная примарная группа, то имеет место соотношение*

$$|A| \leqslant |A/A^1|^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Так как $A^1 \subset pA$, то

$$|A/pA| \leqslant |A/A^1|.$$

Поэтому предложение 6.8 непосредственно следует из теоремы 6.7.

6.9. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа, β – какое-либо порядковое число и $\overline{G} = G/p^\beta G$. Тогда полным прообразом подгруппы $p^\alpha \overline{G}$ группы $\overline{G}$, $\alpha \leqslant \beta$, при естественном гомоморфизме группы G на факторгруппу $\overline{G}$ является подгруппа $p^\alpha G$ группы G.*

Доказательство. При $\alpha = 0$ предложение 6.9, очевидно, верно. Предположим, что это предложение верно всякий раз, когда $\alpha < \gamma$, где γ – порядковое число, меньшее или равное β, и докажем, что тогда оно верно и при $\alpha = \gamma$.

1-й случай: γ – изолированное число. Обозначим через ψ естественный гомоморфизм группы G на факторгруппу $\overline{G}$. Докажем, что

$$\psi(p^\gamma G) \subset p^\gamma \overline{G}. \tag{1}$$

Пусть $a \in p^\gamma G$. Тогда существует элемент b, удовлетворяющий условиям

$$b \in p^{\gamma-1} G, \tag{2}$$

$$pb = a. \tag{3}$$

Из (2) согласно индуктивному предположению следует, что

$$\psi b \in p^{\gamma-1} \overline{G}. \tag{4}$$

Кроме того, в силу (3)

$$p \cdot \psi b = \psi a. \tag{5}$$

На основании (4) и (5) заключаем, что $\psi a \in p^\gamma \overline{G}$. Этим доказано, что имеет место соотношение (1).

Докажем, что

$$\psi^{-1}(p^\gamma \overline{G}) \subset p^\gamma G, \tag{6}$$

где $\psi^{-1}(p^\gamma \overline{G})$ – полный прообраз группы $p^\gamma \overline{G}$ при гомоморфизме ψ.

Пусть $\bar{x} \in p^\gamma \overline{G}$. Существует элемент $\bar{y}$, удовлетворяющий условиям

$$\bar{y} \in p^{\gamma-1} \overline{G}, \tag{7}$$

$$p\bar{y} = \bar{x}. \tag{8}$$

Пусть y – элемент группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{y}$. Тогда из (7) по индуктивному предположению следует, что $y \in p^{\gamma-1}G$. Следовательно,

$$py \in p^{\gamma}G. \tag{9}$$

В силу (8)

$$\bar{x} = py + p^{\beta}G. \tag{10}$$

Кроме того,

$$p^{\beta}G \subset p^{\gamma}G \qquad (\gamma \leqslant \beta). \tag{11}$$

На основании (9), (10) и (11) заключаем, что $\bar{x} = py + p^{\beta}G \subset p^{\gamma}G$, т.е. любой элемент группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$, содержится в $p^{\gamma}G$. Этим доказано, что имеет место соотношение (6).

На основании соотношений (1) и (6) заключаем, что полным прообразом подгруппы $p^{\gamma}\overline{G}$ группы $\overline{G}$ при гомоморфизме ψ является подгруппа $p^{\gamma}G$ группы G.

2-й случай: γ – предельное число. Докажем, что

$$\psi(p^{\gamma}G) \subset p^{\gamma}\overline{G}. \tag{12}$$

Пусть $a \in p^{\gamma}G$. Тогда

$$a \in p^{\alpha}G \qquad (\alpha < \gamma).$$

Отсюда согласно индуктивному предположению следует, что

$$\psi a \in p^{\alpha}\overline{G} \qquad (\alpha < \gamma)$$

и поэтому

$$\psi a \in \bigcap_{\alpha<\gamma} p^{\alpha}\overline{G} = p^{\gamma}\overline{G},$$

т.е. $\psi a \in p^{\gamma}\overline{G}$. Этим доказано, что имеет место соотношение (12).

Докажем, что

$$\psi^{-1}(p^{\gamma}\overline{G}) \subset p^{\gamma}G. \tag{13}$$

Пусть $\bar{x} \in p^{\gamma}\overline{G}$. Надо доказать, что любой элемент x группы G, принадлежащий классу смежности $\bar{x}$, содержится в $p^{\gamma}G$. Так как $\bar{x} \in p^{\gamma}\overline{G}$, то $\bar{x} \in p^{\delta}\overline{G}$ при всяком $\delta < \gamma$. Отсюда согласно индуктивному предположению следует, что $x \in p^{\delta}G$ при $\delta < \gamma$. Кроме того,

$$p^{\gamma}G = \bigcap_{\delta<\gamma} p^{\delta}G,$$

поскольку γ – предельное число. Следовательно, $x \in p^{\gamma}G$. Этим доказано, что имеет место соотношение (13).

На основании (12) и (13) заключаем, что полным прообразом подгруппы $p^{\gamma}\overline{G}$ группы $\overline{G}$ при гомоморфизме ψ является подгруппа $p^{\gamma}G$ группы G.

Предложение 6.9 доказано.

6.10. *Пусть G – обобщенная примарная группа, β – какое-либо порядковое число и $\overline{G} = G/G^\beta$. Тогда полным прообразом подгруппы $\overline{G}^\alpha$ группы $\overline{G}$, $\alpha \leqslant \beta$, при естественном гомоморфизме группы G на факторгруппу $\overline{G}$ является подгруппа G^α группы G.*

Если принять во внимание определения групп G^α, G^β и $\overline{G}^\alpha$, то легко видеть, что предложение 6.10 непосредственно следует из предложения 6.9.

6.11. *Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha\in W(\tau)}$ есть последовательность ульмовских факторов обобщенной примарной группы G, т.е. $\tau = \tau(G)$ и*

$$(a) \qquad G^\alpha/G^{\alpha+1} \cong A_\alpha \qquad (\alpha \in W(\tau)).$$

Тогда $\{A_\alpha\}_{\alpha\in W(\beta)}$, где $\beta \leqslant \tau$, является последовательностью ульмовских факторов факторгруппы G/G^β, и G/G^β является редуцированной группой.

Доказательство. Положим $\overline{G} = G/G^\beta$. В силу 6.10 полными прообразами групп $\overline{G}^\alpha$ и $\overline{G}^{\alpha+1}$, $\alpha < \beta$, при естественном гомоморфизме G на $\overline{G}$ являются соответственно подгруппы G^α и $G^{\alpha+1}$ группы G. Поэтому согласно теореме о гомоморфизме имеют место соотношения

$$\overline{G}^\alpha/\overline{G}^{\alpha+1} \cong G^\alpha/G^{\alpha+1} \qquad (\alpha \in W(\beta)). \tag{1}$$

Сопоставляя (1) и (a), получим

$$\overline{G}^\alpha/\overline{G}^{\alpha+1} \cong A_\alpha \qquad (\alpha \in W(\beta)). \tag{2}$$

В силу предложения 6.10 полным прообразом группы $\overline{G}^\beta$ при естественном гомоморфизме G на $\overline{G}$ является G^β. Следовательно,

$$\overline{G}^\beta = \{\bar{0}\}, \tag{3}$$

где $\bar{0}$ – нулевой элемент группы $\overline{G}$.

На основании (2) и (3) заключаем, что $\overline{G}$ есть редуцированная группа типа β и последовательность $\{A_\alpha\}_{\alpha\in W(\beta)}$ служит для нее последовательностью ульмовских факторов.

6.12. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа, β – какое-либо порядковое число и $\overline{G} = G/p^\beta G$. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad p^\alpha\overline{G} \cong p^\alpha G/p^\beta G \qquad (\alpha < \beta).$$

Доказательство. В силу предложения 6.9 полным прообразом подгруппы $p^\alpha\overline{G}$ группы $\overline{G}$ при естественном гомоморфизме группы G на факторгруппу $\overline{G}$ является подгруппа $p^\alpha G$ группы G. Отсюда по теореме о гомоморфизме следует соотношение (a).

6.13. *Пусть G – обобщенная примарная (относительно p) группа и*

$$(a) \qquad A_\alpha = G^\alpha/G^{\alpha+1} \qquad (\alpha < \tau(G)).$$

Тогда для любого натурального числа n имеет место соотношение

$$(b) \qquad |(p^n A_\alpha)[p]\,| \geqslant |A_{\alpha+1}/pA_{\alpha+1}| \qquad (\alpha+1 < \tau(G)).$$

Доказательство. В силу предложения 6.9 полным прообразом подгруппы $pA_{\alpha+1}$ группы $A_{\alpha+1}$ при естественном гомоморфизме группы $G^{\alpha+1}$ на $A_{\alpha+1}$ является подгруппа $pG^{\alpha+1}$ группы $G^{\alpha+1}$. Отсюда по теореме о гомоморфизме следует, что

$$G^{\alpha+1}/pG^{\alpha+1} \cong A_{\alpha+1}/pA_{\alpha+1}. \tag{1}$$

Далее, в силу предложения 6.12 для любого натурального n имеет место соотношение

$$p^n A_\alpha \cong p^n G^\alpha / G^{\alpha+1}. \tag{2}$$

Применяя предложение 6.5 к группе $p^n G^\alpha$, получим

$$|(p^n G^\alpha/G^{\alpha+1})[p]\,| \geqslant |G^{\alpha+1}/pG^{\alpha+1}|.$$

Теперь, заменяя на основании (2) левую часть последнего неравенства через $|(p^n A_\alpha)[p]\,|$ и на основании (1) правую часть через $|A_{\alpha+1}/pA_{\alpha+1}|$, получим соотношение (b).

6.14. *Пусть N – натуральное число и $\{A_i\}_{0\leqslant i<N}$ – последовательность ульмовских факторов редуцированной обобщенной примарной группы H. Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad |H| = \prod_{i=0}^{N-1} |A_i|.$$

Доказательство. Предложение 6.14 имеет место при $N = 1$, так как в этом случае $H \cong A_0$. Предположим, что это предложение верно всякий раз, когда $N < k$, где k – натуральное число, и докажем, что тогда оно верно также при $N = k$.

В самом деле, пусть $N = k$ и $\{A_i\}_{0\leqslant i<k}$ – последовательность ульмовских факторов редуцированной группы H. Тогда

$$H^{k-1} \cong A_{k-1}. \tag{1}$$

В силу предложения 6.11 факторгруппа H/H^{k-1} является редуцированной группой и последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<k-1}$ служит для нее последовательностью ульмовских факторов. Поэтому согласно индуктивному предположению имеет место соотношение

$$|H/H^{k-1}| = \prod_{i=0}^{k-2} |A_i|. \tag{2}$$

Кроме того, очевидно, имеет место равенство

$$|H| = |H/H^{k-1}| \cdot |H^{k-1}|. \tag{3}$$

На основании соотношений (1), (2) и (3) заключаем, что соотношение (a) имеет место при $N = k$.

Предложение 6.14 доказано.

6.15. *Пусть* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in W(\tau)}$ *– последовательность ульмовских факторов редуцированной обобщенной примарной группы* G. *Тогда имеет место соотношение*

$$(a) \qquad \sum_{\lambda<\tau} |A_\lambda| \leqslant |G| \leqslant \prod_{\substack{\lambda<\omega \\ \lambda<\tau}} |A_\lambda|,$$

где ω *– первое бесконечное порядковое число.*

Доказательство. 1°. Пусть A_N – группа, принадлежащая множеству $\{A_\lambda\}_{\lambda<\omega,\, \lambda<\tau}$ и имеющая среди элементов этого множества наименьшую мощность. Тогда имеют место соотношения

$$|A_N| \leqslant |A_\lambda| \qquad (N \leqslant \lambda < \omega,\, \lambda < \tau). \tag{1}$$

Очевидно, имеет место равенство

$$|G| = |G/G^N| \cdot |G^N|. \tag{2}$$

В силу предложения 6.11 факторгруппа G/G^N является редуцированной группой и последовательность $\{A_\lambda\}_{0 \leqslant \lambda < N}$ служит для нее последовательностью ульмовских факторов. Поэтому в силу предложения 6.14 имеет место равенство

$$|G/G^N| = \prod_{\lambda=0}^{N-1} |A_\lambda|. \tag{3}$$

Так как по условию G – редуцированная группа, то G^N также является редуцированной группой. Отсюда согласно предложению 6.8 следует соотношение

$$|G^N| \leqslant |G^N/G^{N+1}|^{\aleph_0}. \tag{4}$$

Так как по условию $G^N/G^{N+1} \cong A_N$, то из (4) следует неравенство

$$|G^N| \leqslant |A_N|^{\aleph_0}. \tag{5}$$

На основании (1) и (5) заключаем, что

$$|G^N| \leqslant \prod_{\substack{N \leqslant \lambda<\omega \\ \lambda<\tau}} |A_\lambda|. \tag{6}$$

Из соотношений (2), (3) и (6) следует соотношение

$$|G| \leqslant \prod_{\substack{\lambda<\omega \\ \lambda<\tau}} |A_\lambda|. \tag{7}$$

2°. Обозначим через $\mathfrak{A}_\lambda$ множество элементов группы G, определяемое соотношением

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{cases} G^\lambda \setminus G^{\lambda+1}, & \text{если } \lambda+1 \neq \tau; \\ G^\lambda, & \text{если } \tau \text{ – изолированное число и } \lambda+1=\tau. \end{cases} \tag{8}$$

Так как по условию G – редуцированная группа, то легко видеть, что имеет место соотношение

$$G = \Big(\bigcup_{\lambda<\tau} \mathfrak{A}_\lambda\Big) \cup \{0\}. \tag{9}$$

Далее, поскольку $A_\lambda \cong G^\lambda/G^{\lambda+1}$, имеет место неравенство

$$|A_\lambda| \leqslant |\mathfrak{A}_\lambda| \qquad (\lambda < \tau). \tag{10}$$

Множества $\mathfrak{A}_\lambda$ в правой части соотношения (9) не пересекаются. Поэтому на основании (8) и (9) заключаем, что

$$|G| = \sum_{\lambda<\tau} |\mathfrak{A}_\lambda|,$$

откуда в силу (10) получим

$$|G| \geqslant \sum_{\lambda<\tau} |A_\lambda|. \tag{11}$$

Из (7) и (11) следует соотношение (a).

6.16. *Пусть* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in W(\tau)}$ *– последовательность ульмовских факторов редуцированной обобщенной примарной группы* G, *т.е.*

$$G^\lambda/G^{\lambda+1} \cong A_\lambda \qquad (\lambda \in W(\tau))$$

и τ *– наименьшее порядковое число, для которого*

$$G^\tau = \{0\}.$$

Тогда имеют место соотношения

$$(a) \qquad |A_\lambda|^{\aleph_0} \geqslant \sum_{\lambda\leqslant\mu<\tau} |A_\mu| \qquad (\lambda \in W(\tau)).$$

Доказательство. Применяя предложение 6.8 к группе G^λ, получим неравенство

$$|A_\lambda|^{\aleph_0} \geqslant |G^\lambda| \qquad (\lambda \in W(\tau)). \tag{1}$$

Легко видеть, что $\{A_\mu\}_{\lambda\leqslant\mu<\tau}$ является последовательностью ульмовских факторов для группы G^λ. Поэтому на основании предложения 6.15 заключаем, что имеет место соотношение

$$|G^\lambda| \geqslant \sum_{\lambda\leqslant\mu<\tau} |A_\mu| \qquad (\lambda \in W(\tau)). \tag{2}$$

Теперь, сопоставляя (1) и (2), получим соотношение (a).

§ 7. Полное расширение редуцированной обобщенной примарной группы

Пусть G есть редуцированная обобщенная примарная группа, для которой $\tau^*(G)$ является предельным числом. Обозначим через G_α факторгруппу группы G по подгрупе $p^\alpha G$,

$$G_\alpha = G/p^\alpha G \qquad \bigl(\alpha \in W(\tau^*(G))\bigr).$$

Рассмотрим последовательность

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in W(\tau^*(G))} \qquad (x_\alpha \in G_\alpha) \tag{1}$$

классов смежности группы G по подгруппам $p^\alpha G$, вложенных друг в друга, т.е. удовлетворяющих условию

$$x_\alpha \supset x_\beta \qquad \bigl(\alpha,\, \beta \in W(\tau^*(G)),\ \alpha < \beta\bigr). \tag{2}$$

Отметим, что пересечение всех классов смежности последовательности (1) или пусто, или содержит только один элемент группы G. Действительно, предположим, что пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha$ есть непустое множество и a, b – два элемента, принадлежащие этому пересечению. Тогда $x_\alpha = a + p^\alpha G = b + p^\alpha G$ при любом $\alpha < \tau^*(G)$, следовательно, $a - b \in p^\alpha G$ и

$$a - b \in \bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} p^\alpha G.$$

Но G есть редуцированная группа и, значит, $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} p^\alpha G = \{0\}$. Поэтому $a-b=0$ и $a = b$.

Исходя из группы G, построим абелеву группу G^*. Элементом группы G^* будем считать всякую последовательность вида (1), т.е. последовательность вложенных друг в друга классов смежности группы G по подгруппам $p^\alpha G$. Сумма двух элементов x и y группы G^*, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$, $y = \{y_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$, определяется при помощи равенства

$$x + y = \{x_\alpha + y_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)},$$

где $x_\alpha + y_\alpha$ есть сумма элементов x_α и y_α в группе G_α.

Рассмотрим множество всех тех элементов x, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$, группы G^*, для которых пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha$ есть непустое множество. Это множество образует подгруппу $\overline{G}$ группы G^*, изоморфную группе G. Мы получим изоморфное отображение группы G на $\overline{G}$, если сопоставим каждому элементу $a \in G$ тот элемент $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ из $\overline{G}$, для которого $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha = \{a\}$, т.е.

$$x_\alpha = a + p^\alpha G \quad \text{при любом } \alpha < \tau^*(G).$$

Это изоморфное отображение группы G на группу $\overline{G}$ обозначим через φ.

Построим группу G', которую мы будем называть *полным расширением группы* G. Элементом группы G' будем считать всякий элемент множества $(G^* \setminus \overline{G}\,) \cup G$. Операцию сложения в группе G' определяем следующим образом: во всяком равенстве $a + b = c$ в группе G^*, $a, b, c \in G^*$, те из элементов a, b, c, которые принадлежат $\overline{G}$, мы заменим соответствующими им при изоморфизме φ элементами из G и оставим без изменения те из элементов a, b, c, которые принадлежат множеству $G^* \setminus \overline{G}$. Полученные таким образом равенства определяют операцию сложения в группе G'. Таким образом, если x, y – элементы множества $G^* \setminus \overline{G}$ и $z = \{z_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ – их сумма в группе G^*, то сумма $x + y$ этих элементов в группе G' определяется при помощи соотношения

$$x + y = \begin{cases} z, & \text{если } z \in G^* \setminus \overline{G}; \\ \varphi^{-1}z, & \text{если } z \in \overline{G}. \end{cases}$$

Если же $x \in G^* \setminus \overline{G}$ и $y \in G$, то полагаем

$$x + y = x + \varphi y,$$

где $x + \varphi y$ есть сумма элементов x и φy в группе G^*. Наконец, если x, y – элементы группы G, то, по определению, их сумма в G' совпадает с суммой этих элементов в группе G.

Таким образом, группа G является подгруппой группы G' и, очевидно, группа G' изоморфна группе G^*.

Согласно предложению 1.9 для всякого порядкового числа α группа $p^\alpha G$ является допустимой подгруппой группы G. Поэтому факторгруппу $G_\alpha = G/p^\alpha G$ рассматриваем как группу с тем же кольцом операторов, что и группа G; при этом произведение числа k, принадлежащего кольцу операторов группы G, на элемент $a + p^\alpha G$ факторгруппы G_α определяем посредством равенства

$$k(a + p^\alpha G) = ka + p^\alpha G.$$

Всюду ниже группу G' будем рассматривать как группу с тем же кольцом операторов, что и группа G, причем произведение любого числа k, принадлежащего кольцу операторов группы G, на любой элемент $x \in G'$ определяем следующим образом: если $x \in G$, то произведение kx уже определено (поскольку G – обобщенная примарная группа); если же $x \in G^* \setminus \overline{G}$, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$, то полагаем

$$kx = \{kx_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)} \qquad (x_\alpha \in G_\alpha),$$

если пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} kx_\alpha$ есть пустое множество, и полагаем kx равным единственному элементу пересечения $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} kx_\alpha$, если оно является непустым множеством. Легко видеть, что при этом выполняются следующие условия:

$$k(x+y) = kx + ky,$$
$$(k+k_1)x = kx + k_1x,$$
$$(kk_1)x = k(k_1x),$$
$$1 \cdot x = x,$$

где x, $y \in G'$ и k, k_1 – любые два числа из кольца операторов группы G. Таким образом, при введенном выше определении умножения элементов из G' на числа, принадлежащие кольцу операторов группы G, группа G' действительно превращается в группу с тем же кольцом операторов, что и группа G, причем, очевидно, G будет допустимой подгруппой этой операторной группы.

7.1. *Пусть G – редуцированная обобщенная примарная (относительно p) группа, удовлетворяющая условию*

(s) *существует счетная возрастающая последовательность порядковых чисел, сходящаяся к $\tau^*(G)$.*

Обозначим через G' полное расширение группы G. Для того чтобы элемент x группы G' принадлежал подгруппе $p^\gamma G'$, где $\gamma < \tau^*(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) *$x \in p^\gamma G$, если $x \in G$;*

(b) *$x_\gamma = p^\gamma G$, если $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ является элементом множества $G' \setminus G$.*

Доказательство. 1°. Докажем достаточность условия. Если $x \in G$ и выполняется условие (a), т.е. $x \in p^\gamma G$, то, очевидно, $x \in p^\gamma G'$, поскольку G – подгруппа группы G'. Поэтому необходимо рассмотреть только тот случай, когда $x \in G' \setminus G$, т.е. надо доказать следующее предложение: *если элемент $x \in G' \setminus G$ удовлетворяет условию (b), т.е. $x_\gamma = p^\gamma G$, то $x \in p^\gamma G'$.* Для $\gamma = 0$ это утверждение, очевидно, верно. Предположим, что оно верно всякий раз, когда $\gamma < \beta$, где β – порядковое число, меньшее, чем $\tau^*(G)$, и докажем, что тогда оно верно также при $\gamma = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число, $0 < \beta < \tau^*(G)$. Предположим, что x, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$, есть элемент множества $G' \setminus G$, удовлетворяющий условию

$$x_\beta = p^\beta G, \tag{1}$$

и докажем, что $x \in p^\beta G'$. Согласно условию (s) существует счетная возрастающая последовательность $\{\alpha_i\}_{0\leqslant i<\omega}$ порядковых чисел, сходящаяся к $\tau^*(G)$, причем мы будем предполагать, что

$$\alpha_0 = \beta - 1, \qquad \alpha_1 = \beta. \tag{2}$$

Определим последовательность $\{g_i\}_{0<i<\omega}$ элементов группы G следующим образом: через g_i обозначим какой-либо фиксированный элемент группы G, принадлежащий классу смежности x_{α_i}, причем положим

$$g_1 = 0. \tag{3}$$

Это можно сделать, так как в силу (1) и (2) $x_{\alpha_1} = p^\beta G$. Тогда имеют место равенства

$$x_{\alpha_i} = g_i + p^{\alpha_i} G \qquad (0 < i < \omega). \tag{4}$$

Определим последовательность $\{a_i\}_{0<i<\omega}$ элементов группы G следующим образом: a_i – элемент группы G, удовлетворяющий условиям

$$a_i \in p^{\alpha_{i-1}} G \qquad (0 < i < \omega), \tag{5}$$

$$pa_i = g_{i+1} - g_i \qquad (0 < i < \omega). \tag{6}$$

Такой элемент существует, так как $x_{\alpha_i} \supset x_{\alpha_{i+1}}$ и, значит, в силу (4)

$$g_{i+1} - g_i \in p^{\alpha_i} G.$$

Определим индуктивно последовательность $\{h_i\}_{0<i<\omega}$ элементов группы G при помощи равенств

$$h_1 = a_1, \qquad h_i = h_{i-1} + a_i \qquad (1 < i < \omega). \tag{7}$$

Легко видеть, что имеют место равенства

$$ph_i = g_{i+1} \qquad (0 < i < \omega). \tag{8}$$

Действительно, в силу (3), (6) и (7)

$$ph_1 = pa_1 = g_2 - g_1 = g_2,$$

т.е. равенство (8) имеет место при $i = 1$. Предположим, что оно имеет место всякий раз, когда $i < n$, где n – натуральное число, большее, чем 1, и докажем, что тогда оно имеет место также при $i = n$. В силу (7)

$$ph_n = p(h_{n-1} + a_n) = ph_{n-1} + pa_n.$$

Далее, по индуктивному предположению $ph_{n-1} = g_n$. Кроме того, в силу (6) $pa_n = g_{n+1} - g_n$. Следовательно,

$$ph_n = g_n + (g_{n+1} - g_n) = g_{n+1}.$$

Таким образом, равенство (8) имеет место для любого натурального числа i.

На основании (5) и (7) заключаем, что

$$h_k - h_i \in p^{\alpha_i} G \quad \text{при } i < k. \tag{9}$$

Определим последовательность $y = \{y_\alpha\}_{0 \leqslant \alpha < \tau^*(G)}$, полагая

$$y_\alpha = \begin{cases} h_1 + p^\alpha G, & \text{если } \alpha \leqslant \alpha_1 = \beta; \\ h_i + p^\alpha G, & \text{если } \alpha_{i-1} < \alpha \leqslant \alpha_i \end{cases} \qquad (0 \leqslant \alpha < \tau^*(G)). \tag{10}$$

В частности, $y_{\beta-1} = h_1 + p^{\beta-1}G$. Отсюда, учитывая, что в силу (2), (5) и (7) $h_1 = a_1 \in p^{\beta-1}G$, получим равенство

$$y_{\beta-1} = p^{\beta-1}G. \tag{11}$$

Далее, согласно (8) $ph_i = g_{i+1}$ и в силу (4) $g_{i+1} \in x_{\alpha_{i+1}} \subset x_{\alpha_i}$, следовательно,

$$ph_i \in x_{\alpha_i} \qquad (0 < i < \omega).$$

Отсюда, принимая во внимание (10), заключаем, что

$$py_{\alpha_i} = x_{\alpha_i} \qquad (0 < i < \omega). \tag{12}$$

Из соотношений (9) и (10) следует, что классы смежности, принадлежащие последовательности $\{y_\alpha\}_{0 \leqslant \alpha < \tau^*(G)}$, вложены друг в друга, т.е.

$$y_\alpha \supset y_\delta \qquad (0 \leqslant \alpha < \delta < \tau^*(G)). \tag{13}$$

Кроме того, последовательность $\{\alpha_i\}_{0<i<\omega}$ сходится к $\tau^*(G)$. Поэтому на основании (12) заключаем, что

$$py_\alpha = x_\alpha \quad \text{при любом } \alpha < \tau^*(G). \tag{14}$$

Легко убедиться в том, что

$$\bigcap_{\alpha < \tau^*(G)} y_\alpha = \varnothing, \tag{15}$$

где $\varnothing$ – пустое множество. Действительно, если существует элемент $a \in G$, принадлежащий каждому классу смежности y_α, т.е. $y_\alpha = a + p^\alpha G$ при $\alpha < \tau^*(G)$, то $py_\alpha = pa + p^\alpha G$, откуда в силу (14) получим $pa \in \bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha$, что невозможно, так как последовательность $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ есть элемент множества $G' \setminus G$ и поэтому пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha$ является пустым множеством. Таким образом, имеет место соотношение (15).

На основании (10), (13) и (15) заключаем, что последовательность

$$y = \{y_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$$

является элементом группы G', принадлежащим множеству $G' \setminus G$,

$$y \in G' \setminus G. \tag{16}$$

Из соотношений (11) и (16) согласно индуктивному предположению следует

$$y \in p^{\beta-1}G'. \tag{17}$$

Далее, в силу (14) имеет место равенство

$$py = x. \tag{18}$$

На основании (17) и (18) заключаем, что

$$x \in p^{\beta} G'.$$

2-й случай: β – предельное число, меньшее, чем $\tau^*(G)$. Предположим, что элемент $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ множества $G' \setminus G$ удовлетворяет условию

$$x_\beta = p^\beta G, \tag{19}$$

и покажем, что $x \in p^\beta G'$. Пусть α – порядковое число, меньшее, чем β. Так как $x_\alpha \supset x_\beta$ и имеет место равенство (19), то класс смежности x_α содержит нулевой элемент группы G и поэтому $x_\alpha = p^\alpha G$. Кроме того, $x \in G' \setminus G$. Следовательно, по индуктивному предположению

$$x \in p^\alpha G'. \tag{20}$$

Но соотношение (20) имеет место для всякого $\alpha < \beta$ и β – предельное число, следовательно, $x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha G'$ и, значит, $x \in p^\beta G'$.

Таким образом, доказана достаточность условий (a), (b).

2°. Докажем необходимость условий (a), (b), т.е. докажем следующее предложение: *если $x \in p^\gamma G'$, $\gamma < \tau^*(G)$, то либо $x \in p^\gamma G$, либо $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)} \in G' \setminus G$ и $x_\gamma = p^\gamma G$.* Для $\gamma = 0$ это утверждение, очевидно, верно. Предположим, что оно верно всякий раз, когда $\gamma < \beta$, где β – порядковое число, меньшее, чем $\tau^*(G)$, и докажем, что тогда оно верно при $\gamma = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число, меньшее, чем $\tau^*(G)$. Допустим, что

$$x \in p^\beta G'. \tag{21}$$

Тогда существует элемент $z \in G'$, удовлетворяющий условиям

$$z \in p^{\beta-1} G', \tag{22}$$

$$pz = x. \tag{23}$$

Из соотношения (22) согласно индуктивному предположению следует, что

$$z \in p^{\beta-1} G, \qquad \text{если } z \in G; \tag{24}$$

$$z_{\beta-1} = p^{\beta-1} G, \qquad \text{если } z = \{z_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)} \in G' \setminus G. \tag{25}$$

Легко видеть, что

$$pz_\beta = p^\beta G, \qquad \text{если } z = \{z_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)} \in G' \setminus G. \tag{26}$$

Действительно, пусть c – элемент группы G, принадлежащий классу смежности z_β, $z_\beta = c + p^\beta G$. Тогда

$$pz_\beta = pc + p^\beta G. \tag{27}$$

Далее, так как $c \in z_\beta \subset z_{\beta-1}$ и в силу (25) $z_{\beta-1} = p^{\beta-1}G$, то $c \in p^{\beta-1}G$ и поэтому

$$pc \in p^\beta G. \tag{28}$$

Теперь в силу (27) и (28) заключаем, что имеет место соотношение (26).

Рассмотрим следующие три подслучая.

1-й подслучай: $z \in G$. На основании (23) и (24) заключаем, что $x \in p^\beta G$.

2-й подслучай: $z \in G' \setminus G$ и $x \in G$. На основании (23) заключаем, что

$$\{x\} = \bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} pz_\alpha$$

и, значит, $x \in pz_\beta$, откуда согласно (26) следует, что $x \in p^\beta G$.

3-й подслучай: z, $x \in G' \setminus G$. В силу (23) и (26) заключаем, что $x_\beta = p^\beta G$.

2-й случай: β – предельное число, меньшее, чем $\tau^*(G)$. Предположим, что $x \in p^\beta G'$. Тогда

$$x \in p^\alpha G' \qquad (\alpha < \beta). \tag{29}$$

Если $x \in G$, то из соотношения (29) согласно индуктивному предположению следует, что $x \in p^\alpha G$ при $\alpha < \beta$, откуда $x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha G$, т.е. $x \in p^\beta G$. Поэтому мы будем предполагать, что

$$x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)} \in G' \setminus G. \tag{30}$$

Из соотношений (29) и (30) согласно индуктивному предположению следует

$$x_\alpha = p^\alpha G \qquad (\alpha < \beta).$$

Отсюда, так как $x_\beta \subset x_\alpha$ при $\alpha < \beta$, делаем вывод, что $x_\beta \subset \bigcap\limits_{\alpha<\beta} p^\alpha G = p^\beta G$ и

$$x_\beta \subset p^\beta G. \tag{31}$$

Так как x_β является классом смежности группы G по подгруппе $p^\beta G$, то из соотношения (31) следует равенство $x_\beta = p^\beta G$. Этим доказана необходимость условий (a) и (b).

Предложение 7.1 доказано.

7.2. Теорема. *Пусть G – редуцированная обобщенная примарная группа, удовлетворяющая условию*

(s) *существует счетная возрастающая последовательность порядковых чисел, сходящаяся к $\tau^*(G)$.*

Тогда группа G', являющаяся полным расширением группы G, обладает следующими свойствами:

(*a*) *G' является редуцированной группой;*

(*b*) *$\tau^*(G') = \tau^*(G)$ и $\tau(G') = \tau(G)$;*

(*c*) *G является изотипной и плотной подгруппой группы G';*

(*d*) *$G'^{\alpha}/G'^{\beta} \cong G^{\alpha}/G^{\beta} \qquad (\alpha < \beta < \tau(G'))$;*

(*e*) *ульмовские факторы групп G и G' изоморфны, т.е.*

$$G'^{\alpha}/G'^{\alpha+1} \cong G^{\alpha}/G^{\alpha+1} \qquad (\alpha + 1 < \tau(G) = \tau(G')).$$

Доказательство. 1°. По условию G – редуцированная обобщенная примарная (относительно p) группа. Следовательно,

$$p^{\tau^*(G)}G = \{0\}. \tag{1}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$p^{\tau^*(G)}G' = \{0\}. \tag{2}$$

Пусть $x \in p^{\tau^*(G)}G'$. Тогда

$$x \in p^{\alpha}G' \qquad (\alpha < \tau^*(G)). \tag{3}$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай: $x \in G' \setminus G$. В этом случае x является последовательностью, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$, удовлетворяющей условию

$$\bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha = \varnothing, \tag{4}$$

где $\varnothing$ – пустое множество. Из соотношения (3) согласно предложению 7.1 следует, что

$$x_\alpha = p^{\alpha}G \qquad (\alpha < \tau^*(G)),$$

откуда получим

$$0 \in \bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha,$$

что противоречит соотношению (4). Таким образом, этот случай невозможен.

2-й случай: $x \in G$. В этом случае из соотношения (3) согласно предложению 7.1 следует соотношение

$$x \in p^{\alpha}G \qquad (\alpha < \tau^*(G)). \tag{5}$$

Согласно условию (s) существует счетная возрастающая последовательность порядковых чисел, сходящаяся к $\tau^*(G)$. Следовательно, $\tau^*(G)$ является предельным числом и поэтому

$$\bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} p^\alpha G = p^{\tau^*(G)}G. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$x \in p^{\tau^*(G)}G. \tag{7}$$

На основании (1) и (7) заключаем, что $x = 0$. Этим доказано, что имеет место равенство (2).

Равенство (2) показывает, что G' является редуцированной группой, т.е. группа G' обладает свойством (a).

2°. На основании (2) заключаем, что

$$\tau^*(G') \leqslant \tau^*(G). \tag{8}$$

С другой стороны, так как G – подгруппа редуцированной группы G', то нетрудно видеть, что

$$\tau^*(G) \leqslant \tau^*(G'). \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), получим равенство

$$\tau^*(G') = \tau^*(G), \tag{10}$$

из которого, очевидно, следует равенство

$$\tau(G') = \tau(G).$$

Таким образом, группа G' обладает свойством (b).

3°. Группа G является изотипной подгруппой группы G'. Действительно, если $x \in G \cap p^\alpha G'$, где α – порядковое число, меньшее, чем $\tau^*(G)$, то в силу предложения 7.1 $x \in p^\alpha G$. Следовательно, имеет место соотношение

$$p^\alpha G \supset G \cap p^\alpha G' \qquad (\alpha < \tau^*(G)). \tag{11}$$

Так как $\tau^*(G)$ – предельное порядковое число, то из соотношения (11) в силу предложения 3.6 следует, что группа G является изотипной подгруппой группы G'.

4°. Докажем, что G является плотной подгруппой группы G'. Для этого, поскольку в силу (10) $\tau^*(G') = \tau^*(G)$, достаточно показать, что имеет место соотношение

$$G' = [G, p^\beta G'] \qquad (\beta < \tau^*(G)). \tag{12}$$

Пусть β – какое-либо порядковое число, меньшее, чем $\tau^*(G)$, и $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ – элемент множества $G' \setminus G$. Обозначим через c_α какой-либо элемент группы G, принадлежащий классу смежности x_α. Тогда

$$x_\alpha = c_\alpha + p^\alpha G \qquad (\alpha < \tau^*(G)). \tag{13}$$

Элемент x можно представить в виде суммы

$$x = c_\beta + (x - c_\beta). \tag{14}$$

Так как $x \in G' \setminus G$ и $c_\beta \in G$, то, принимая во внимание определение операции сложения в группе G' и соотношение (13), получим

$$x - c_\beta = \{(c_\alpha - c_\beta) + p^\alpha G\}_{\alpha<\tau^*(G)} \qquad (\beta < \tau^*(G)).$$

Далее, поскольку $(x - c_\beta)_\beta = (c_\beta - c_\beta) + p^\beta G = p^\beta G$, мы на основании предложения 7.1 заключаем, что

$$x - c_\beta \in p^\beta G' \qquad (\beta < \tau^*(G)). \tag{15}$$

Но $c_\beta \in G$, поэтому из (14) и (15) следует, что $x \in [G, p^\beta G']$. Этим доказано, что $G' \subset [G, p^\beta G']$, откуда следует соотношение (12).

Таким образом, G является плотной подгруппой группы G'. Кроме того, в п. 3° было доказано, что G – изотипная подгруппа группы G'. Следовательно, группа G' обладает свойством (c).

5°. Так как группа G' обладает свойствами (a) и (c), то на основании предложения 3.47 заключаем, что она обладает также свойством (d).

6°. Наконец, свойство (e) непосредственно следует из свойств (b) и (d).

Теорема 7.2 доказана.

7.3. Теорема. *Пусть G – редуцированная обобщенная примарная группа, удовлетворяющая условию (s) теоремы* 7.2, *и G' – полное расширение группы G. Тогда любая базисная подгруппа группы G является также базисной подгруппой группы G'.*

Доказательство. Пусть C – базисная подгруппа группы G. Покажем, что C является базисной подгруппой также и группы G'.

Подгруппа C разлагается в прямую сумму (допустимых) циклических подгрупп, поскольку она является базисной подгруппой группы G.

Далее, C является сервантной подгруппой группы G'. Действительно, в силу свойства (c) теоремы 7.2 G является изотипной подгруппой группы G'. Следовательно, согласно предложению 3.7 G является сервантной подгруппой группы G'. Кроме того, C есть сервантная подгруппа группы G, поскольку она является базисной подгруппой группы G. Отсюда согласно предложению 3.18 следует, что C является сервантной подгруппой группы G'.

Наконец, факторгруппа G'/C является полной группой. Действительно, факторгруппа G/C является полной группой, так как C – базисная подгруппа группы G. Кроме того, согласно свойству (c) теоремы 7.2 G является изотипной и плотной подгруппой группы G' и поэтому согласно предложению 3.39 факторгруппа G'/G является полной группой. Отсюда в силу предложения 2.7 следует, что факторгруппа G'/C является полной группой.

Таким образом, C является базисной подгруппой группы G'. Теорема доказана.

Единственной целью оставшейся части этого параграфа является доказательство предложения 7.8, которое будет использовано в § 9 при доказательстве предложения 9.2.

7.4. Определение. Пусть $\{P_i\}_{i\in W(\omega)}$ есть счетная последовательность абелевых групп. Рассмотрим множество H всех последовательностей вида

$$\{b_i\}_{i\in W(\omega)},$$

где $b_i \in P_i,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ Множество H по отношению к операции сложения, определяемой формулой

$$\{b_i\}_{i<\omega} + \{b_i'\}_{i<\omega} = \{b_i + b_i'\}_{i<\omega},$$

образует группу, которая называется *бесконечной прямой суммой* групп, входящих в множество $\{P_i\}_{i\in W(\omega)}$.

Бесконечную прямую сумму групп, входящих в множество $\{P_i\}_{i\in W(\omega)}$, будем обозначать символом $\prod\limits_{i<\omega} P_i$, причем обычную прямую сумму $\bigoplus\limits_{i<\omega} P_i$ тех же групп будем считать подгруппой группы $\prod\limits_{i<\omega} P_i$.

Отметим, что из этого определения легко следует равенство

$$\Big|\prod_{i<\omega} P_i\Big| = \prod_{i<\omega} |P_i|.$$

7.5. *Пусть G есть редуцированная обобщенная примарная группа, удовлетворяющая следующим условиям*:

(*a*) *Существует счетная возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}_{n<\omega}$ порядковых чисел, сходящаяся к $\tau(G)$, причем $\sigma_0 = 0$;*

(*b*) *Существует множество $\{P_i\}_{i\in W(\omega)}$ такое, что $G[p] = \bigoplus\limits_{i<\omega} P_i$;*

(*c*) $$G^{\sigma_n}[p] = \bigoplus_{i=n}^{\infty} P_i \qquad (n < \omega).$$

Обозначим через Q полное расширение группы G $(Q = G')$. Тогда имеет место соотношение

(*d*) $$(Q/G)[p] \cong \Big(\prod_{i<\omega} P_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\Big),$$

где $\prod\limits_{i<\omega} P_i$ – бесконечная прямая сумма групп, входящих в множество $\{P_i\}_{i<\omega}$.

Доказательство. 1°. Докажем, что группа $Q[p]$ может быть представлена в виде прямой суммы

$$Q[p] = P_0 \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_k \oplus Q^{\sigma_{k+1}}[p] \qquad (k \in W(\omega)). \tag{1}$$

Легко видеть, что группа G удовлетворяет условиям теоремы 7.2, в частности, тот факт, что G удовлетворяет условию (s) этой теоремы, следует из вышеприведенного условия (a). Согласно теореме 7.2 G является изотипной и плотной подгруппой группы Q. Отсюда в силу предложений 3.48 и 3.13 имеем

$$Q^{\sigma_n}[p] = \big[G^{\sigma_n}[p],\, Q^{\sigma_{n+1}}[p]\big] \qquad (n < \omega), \tag{2}$$

$$G^{\sigma_n}[p] \cap Q^{\sigma_{n+1}}[p] = G^{\sigma_{n+1}}[p] \qquad (n < \omega). \tag{3}$$

Далее, так как G – подгруппа группы Q, $G^{\sigma_{n+1}} \subset Q^{\sigma_{n+1}}$ и, следовательно,

$$G^{\sigma_{n+1}}[p] \subset Q^{\sigma_{n+1}}[p]. \tag{4}$$

На основании (c) заключаем, что имеют место следующие соотношения:

$$G^{\sigma_n}[p] = P_n \oplus G^{\sigma_{n+1}}[p] \qquad (n < \omega), \tag{5}$$

$$P_n \cap G^{\sigma_{n+1}}[p] = \{0\} \qquad (n < \omega). \tag{6}$$

Отметим еще, что

$$P_n = P_n \cap G^{\sigma_n}[p] \qquad (n < \omega), \tag{7}$$

так как согласно условию (c) $P_n \subset G^{\sigma_n}[p]$.

Принимая во внимание равенства (7), (3) и (6), имеем

$$\begin{aligned} P_n \cap Q^{\sigma_{n+1}}[p] &= \big(P_n \cap G^{\sigma_n}[p]\big) \cap Q^{\sigma_{n+1}}[p] = \\ &= P_n \cap \big(G^{\sigma_n}[p] \cap Q^{\sigma_{n+1}}[p]\big) = P_n \cap G^{\sigma_{n+1}}[p] = \{0\}, \end{aligned}$$

т.е.

$$P_n \cap Q^{\sigma_{n+1}}[p] = \{0\} \qquad (n < \omega). \tag{8}$$

Далее, на основании соотношений (2), (4) и (5) заключаем, что

$$Q^{\sigma_n}[p] = \big[P_n,\, Q^{\sigma_{n+1}}[p]\big] \qquad (n < \omega). \tag{9}$$

Теперь из равенств (8) и (9) следует, что группа $Q^{\sigma_n}[p]$ разлагается в прямую сумму:

$$Q^{\sigma_n}[p] = P_n \oplus Q^{\sigma_{n+1}}[p] \qquad (n < \omega). \tag{10}$$

Применяя несколько раз равенство (10), получим прямое разложение (1) группы $Q[p]$.

Отметим еще, что прямое слагаемое $Q^{\sigma_{k+1}}[p]$ в разложении (1) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$Q^{\sigma_{k+1}}[p] \supset Q^{\sigma_{m+1}}[p] \quad \text{при } k < m, \tag{11}$$

так как, очевидно, $Q^{\sigma_{k+1}} \supset Q^{\sigma_{m+1}}$ при $k < m$.

2°. Докажем, что имеет место соотношение (d). Пусть g есть произвольный элемент группы $Q[p]$. Обозначим через g_i компоненту элемента g в прямом слагаемом P_i разложения (1), $i < \omega$. На основании соотношений (11) заключаем, что компонента g_i не зависит от выбора k, т.е. будет одной и той же при любом $k \geqslant i$. Поставим в соответствие элементу g последовательность $\{g_i\}_{i \in W(\omega)}$ и будем рассматривать последовательность $\{g_i\}_{i \in W(\omega)}$ как элемент группы $\prod\limits_{i<\omega} P_i$. Тогда отображение ψ, определяемое равенством

$$\psi g = \{g_i\}_{i<\omega} \qquad (g \in Q[p]),$$

является гомоморфизмом группы $Q[p]$ в группу $\prod\limits_{i<\omega} P_i$, так как легко видеть, что из равенств $\psi g = \{g_i\}_{i<\omega}$, $\psi h = \{h_i\}_{i<\omega}$, где g, $h \in Q[p]$, следует равенство $\psi(g+h) = \{g_i + h_i\}_{i<\omega}$, т.е.

$$\psi(g+h) = \psi g + \psi h.$$

Докажем, что ψ является изоморфным отображением группы $Q[p]$ в группу $\prod\limits_{i<\omega} P_i$. Пусть g – элемент группы $Q[p]$, который при гомоморфизме ψ отображается в нулевой элемент группы $\prod\limits_{i<\omega} P_i$. Тогда компонента элемента g в каждом прямом слагаемом P_i разложения (1) будет равна нулю и, значит, $g \in Q^{\sigma_{k+1}}[p]$, $k < \omega$, откуда следует, что

$$g \in Q^{\sigma_{k+1}} \qquad (k < \omega). \tag{12}$$

Далее, так как соотношение (12) имеет место при любом $k < \omega$, то

$$g \in \bigcap_{n<\omega} Q^{\sigma_n}. \tag{13}$$

Но по условию (a) последовательность $\{\sigma_i\}_{i<\omega}$ имеет своим пределом $\tau(G)$. Кроме того, согласно теореме 7.2 $\tau(G) = \tau(Q)$ и Q является редуцированной группой. Поэтому $\bigcap\limits_{n<\omega} Q^{\sigma_n} = \{0\}$. Отсюда, принимая во внимание (13), заключаем, что

$$g = 0.$$

Таким образом, доказано, что ψ является изоморфным отображением группы $Q[p]$ в группу $\prod\limits_{i<\omega} P_i$.

Убедимся, что ψ является отображением группы $Q[p]$ *на* группу $\prod\limits_{i<\omega} P_i$. Из условия (b) и определения отображения ψ легко следует, что ψ отображает группу $G[p]$ на подгруппу $\bigoplus\limits_{i<\omega} P_i$ группы $\prod\limits_{i<\omega} P_i$, т.е.

$$\psi G[p] = \bigoplus_{i<\omega} P_i. \tag{14}$$

Поэтому достаточно показать, что при отображении ψ любой элемент множества $\big(\prod\limits_{i<\omega} P_i\big) \setminus \big(\bigoplus\limits_{i<\omega} P_i\big)$ имеет хотя бы один прообраз. Пусть $\{b_i\}_{i=0,1,2,\dots}$, $b_i \in P_i$, есть элемент множества $\big(\prod\limits_{i<\omega} P_i\big) \setminus \big(\bigoplus\limits_{i<\omega} P_i\big)$,

$$\{b_i\}_{i=0,1,2,\dots} \in \Big(\prod_{i<\omega} P_i\Big) \Big\backslash \Big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\Big). \tag{15}$$

Исходя из последовательности $\{b_i\}_{i=0,1,2,\dots}$, мы для каждого $\alpha < \tau^*(G)$ следующим образом определяем класс смежности x_α:

$$\begin{cases} x_0 = G, \\ x_\alpha = (b_0 + b_1 + \ldots + b_k) + p^\alpha G \qquad (\omega\sigma_k < \alpha \leqslant \omega\sigma_{k+1}). \end{cases} \tag{16}$$

На основании условия (a) заключаем, что для всякого порядкового числа α, меньшего, чем $\tau^*(G)$, и отличного от нуля, число k, удовлетворяющее условию

$$\omega\sigma_k < \alpha \leqslant \omega\sigma_{k+1}, \tag{17}$$

существует, и притом только одно. Докажем, что последовательность

$$x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$$

есть элемент группы $Q[p]$, являющийся прообразом для последовательности $\{b_i\}_{i=0,1,2,\dots}$, т.е.

$$x \in Q[p] \tag{18}$$

и

$$\psi x = \{b_i\}_{i=0,1,2,\dots}. \tag{19}$$

Докажем, что имеет место соотношение

$$x_\alpha \supset x_\beta \qquad (\alpha < \beta < \tau^*(G)). \tag{20}$$

Если $\alpha < \beta$, то

$$x_\beta = (b_0 + \ldots + b_m) + p^\beta G \qquad (\omega\sigma_m < \beta \leqslant \omega\sigma_{m+1}), \tag{21}$$

причем, очевидно, $k \leqslant m$. Если $k = m$, то, сопоставляя (16) и (21) и принимая во внимание, что $p^\beta G \subset p^\alpha G$, заключаем, что имеет место соотношение (20). Рассмотрим случай, когда $k < m$. Согласно условию (c) $b_i \in G^{\sigma_n}[p]$ при $i \geqslant n$ и поэтому

$$b_{k+1}, \ldots, b_m \in G^{\sigma_{k+1}}.$$

Далее, в силу (17) $G^{\sigma_{k+1}} = p^{\omega\sigma_{k+1}} G \subset p^\alpha G$. Следовательно,

$$b_{k+1}, \ldots, b_m \in p^\alpha G,$$

откуда, поскольку $p^\beta G \subset p^\alpha G$ при $\alpha < \beta$, получим

$$b_{k+1} + \ldots + b_m + p^\beta G \subset p^\alpha G \qquad (\alpha < \beta). \tag{22}$$

Теперь на основании (16), (21) и (22) заключаем, что соотношение (20) имеет место также и в том случае, когда $k < m$.

Докажем, что имеет место соотношение

$$\bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha = \varnothing, \tag{23}$$

где $\varnothing$ – пустое множество. Предположим, что пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\tau^*(G)} x_\alpha$ является непустым множеством и a – элемент этого множества. Тогда

$$a \in x_\alpha \qquad (\alpha < \tau^*(G)) \tag{24}$$

и нетрудно видеть, что

$$a \in G[p]. \tag{25}$$

Действительно, так как $b_i \in G[p],\ i = 0, 1, 2, \ldots$, то на основании (16) заключаем, что

$$px_\alpha = p^\alpha G \qquad (\alpha < \tau^*(G)). \tag{26}$$

Далее, в силу (24) $pa \in px_\alpha$, откуда согласно (26) получим

$$pa \in \bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} p^\alpha G. \tag{27}$$

По условию G – редуцированная группа и поэтому

$$\bigcap_{\alpha<\tau^*(G)} p^\alpha G = \{0\}. \tag{28}$$

Сопоставляя (27) и (28), получим $pa = 0$, т.е. имеет место соотношение (25).

Из соотношений (16) и (24) следует, что

$$a \in (b_0 + \ldots + b_k) + p^{\omega\sigma_{k+1}} G \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда, поскольку $p^{\omega\sigma_{k+1}} G = G^{\sigma_{k+1}}$,

$$a \in (b_0 + \ldots + b_k) + G^{\sigma_{k+1}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

На основании соотношения (29) заключаем, что компонента элемента a в прямом слагаемом P_i разложения (1) равна $b_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда согласно определению отображения ψ следует, что

$$\psi a = \{b_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$$

и в силу (15)

$$\psi a \in \Big(\prod_{i<\omega} P_i\Big)\Big\backslash\Big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\Big). \tag{15}$$

что невозможно, так как $a \in G[p]$ и поэтому согласно (14) $\psi a \in \bigoplus\limits_{i<\omega} P_i$. Этим доказано, что имеет место соотношение (23).

На основании соотношений (16), (20) и (23) заключаем, что последовательность $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\tau^*(G)}$ является элементом множества $Q \setminus G$. Далее, на основании соотношения (26) заключаем, что $px = 0$, т.е.

$$x \in Q[p]. \tag{30}$$

Докажем, что имеет место соотношение

$$x - (b_0 + b_1 + \ldots + b_k) \in Q^{\sigma_{k+1}}[p] \qquad (k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{31}$$

Положим

$$z^{(k)} = x - (b_0 + b_1 + \ldots + b_k) \qquad (k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{32}$$

Так как $b_0 + \ldots + b_k \in G[p] \subset Q[p]$ и в силу (30) $x \in Q[p]$, то

$$z^{(k)} \in Q[p] \qquad (k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{33}$$

Далее, поскольку $x \in Q\setminus G$ и $b_0+\ldots+b_k \in G$, то $z^{(k)} \in Q\setminus G$. Следовательно, $z^{(k)}$ является последовательностью вложенных друг в друга классов смежности $z_\alpha^{(k)}$ группы G по подгруппам $p^\alpha G$, $z^{(k)} = \{z_\alpha^{(k)}\}_{\alpha<\tau^*(G)}$. Полагая в соотношении (16) $\alpha = \omega\sigma_{k+1}$, получим

$$x_{\omega\sigma_{k+1}} = (b_0 + b_1 + \ldots + b_k) + p^{\omega\sigma_{k+1}}G. \tag{34}$$

На основании (32) и (34) заключаем, что

$$z^{(k)}_{\omega\sigma_{k+1}} = p^{\omega\sigma_{k+1}}G.$$

Отсюда в силу 7.1 следует, что

$$z^{(k)} \in p^{\omega\sigma_{k+1}}Q,$$

или, что то же,

$$z^{(k)} \in Q^{\sigma_{k+1}},$$

откуда в силу (33)

$$z^{(k)} \in Q^{\sigma_{k+1}}[p] \qquad (k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots). \tag{35}$$

Сопоставляя (32) и (35), получим соотношение (31).

Так как $b_i \in P_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и в силу (30) $x \in Q[p]$, то на основании соотношения (31) заключаем, что b_i является компонентой элемента x в прямом слагаемом P_i разложения (1), $i = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому согласно определению отображения ψ образом элемента x при отображении ψ является элемент $\{b_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$ группы $\prod\limits_{i<\omega} P_i$, т.е.

$$\psi x = \{b_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$$

Этим доказано, что ψ отображает $Q[p]$ *на* $\prod\limits_{i<\omega} P_i$. Таким образом, ψ является изоморфным отображением группы $Q[p]$ на группу $\prod\limits_{i<\omega} P_i$. Отсюда, принимая во внимание (14), заключаем, что

$$Q[p]/G[p] \cong \Big(\prod_{i<\omega} P_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\Big). \tag{36}$$

По условию Q является полным расширением группы G. Поэтому согласно теореме 7.2 G является изотипной подгруппой группы Q. Следовательно, согласно предложению 3.7 G является сервантной подгруппой группы Q. Отсюда на основании предложения 3.33 заключаем, что

$$(Q/G)[p] \cong Q[p]/G[p]. \tag{37}$$

Сопоставляя (36) и (37), получим соотношение

$$(Q/G)[p] \cong \Big(\prod_{i<\omega} P_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\Big).$$

Предложение 7.5 доказано.

7.6. *Пусть $\{P_n\}_{n\in W(\omega)}$ есть счетная последовательность групп, разлагающихся в прямую сумму циклических подгрупп порядка p, где p – простое число. Тогда имеет место неравенство*

$$\Big|\Big(\prod_{n<\omega} P_n\Big)/\Big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\Big)\Big| \geqslant \min_{N<\omega}\Big\{\,\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\,\Big\}. \tag{δ}$$

Предварительно докажем предложения 7.6а и 7.6б, которые будут использованы при доказательстве предложения 7.6.

7.6а. *Пусть $\{P_n\}_{n\in W(\omega)}$ есть счетная последовательность групп, удовлетворяющих следующим условиям:*

(a_1) *Каждая группа P_n, входящая в последовательность $\{P_n\}_{n<\omega}$, разлагается в прямую сумму бесконечного множества циклических подгрупп порядка p;*

(a_2) *Мощность каждой группы, входящей в последовательность $\{P_n\}_{n<\omega}$, равна $\mathfrak{m}$.*

Тогда имеет место неравенство

$$(\varepsilon)\qquad \Big|\big(\prod_{n<\omega} P_n\big)/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)\Big| \geqslant \mathfrak{m}.$$

Доказательство. Из условий (a_1) и (a_2) следует, что любые две группы из множества $\{P_n\}_{n<\omega}$ изоморфны. Отсюда следует, что существует множество $\{\varphi_m^n\}_{n<m<\omega}$ изоморфизмов со следующими свойствами:

(c_1) φ_m^n, $n<m$, есть изоморфное отображение группы P_n на P_m,

$$(c_2)\qquad \varphi_m^k\cdot\varphi_k^n=\varphi_m^n \qquad (n<k<m).$$

Обозначим через P подгруппу группы $\prod\limits_{n<\omega} P_n$, образованную множеством тех элементов x, $x=\{x_n\}_{n<\omega}$, $x_n\in P_n$, для которых выполняются следующие условия:

$$\varphi_k^i(x_i)=x_k \qquad (i<k<\omega).$$

На основании (c_1) и (c_2) мы заключаем, что имеют место равенства

$$P\cap\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)=\{0\}, \tag{1}$$

$$|P|=\mathfrak{m}. \tag{2}$$

В силу (1)

$$\big[P,\bigoplus_{n<\omega} P_n\big]/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)\cong P. \tag{3}$$

Так как $\prod\limits_{n<\omega} P_n\supset\big[P,\bigoplus\limits_{n<\omega} P_n\big]$, то в силу (3) имеем

$$\Big|\big(\prod_{n<\omega} P_n\big)/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)\Big|\geqslant\Big|\big[P,\bigoplus_{n<\omega} P_n\big]/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)\Big|=|P|=\mathfrak{m},$$

т.е.

$$\Big|\big(\prod_{n<\omega} P_n\big)/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)\Big|\geqslant\mathfrak{m}.$$

Отсюда заключаем, что имеет место неравенство (ε). Таким образом, предложение 7.6а доказано.

7.6б. *Пусть* $\{P_n\}_{n<\omega}$ *есть последовательность групп, удовлетворяющих условию* (a_1) *предложения* 7.6а *и следующему условию*:

$$(a_3)\qquad \min_{N<\omega}\Big\{\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\}=\min_{N<\omega}\Big\{\Big|\bigoplus_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\}.$$

Тогда имеет место неравенство (δ) (см. предложение 7.6).

Доказательство. В силу условия (a_3) для некоторого фиксированного числа N_1 имеет место равенство

$$\Big|\prod_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big|=\Big|\bigoplus_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big|=\mathfrak{m},\quad \text{где } \mathfrak{m}=\min_{N<\omega}\Big\{\Big|\bigoplus_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\}. \tag{4}$$

Докажем, что для бесконечного множества индексов n имеет место равенство

$$|P_n| = \mathfrak{m}. \tag{5}$$

Если равенство (5) имеет место только для конечного множества индексов, то возможны два случая.

1-й случай: Существует кардинальное число $\mathfrak{m}_1$ такое, что

$$\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m} \quad \text{и} \quad |P_n| \leqslant \mathfrak{m}_1 \quad \text{при } n \geqslant N,$$

где N – достаточно большое натуральное число. В этом случае $\mathfrak{m}_1 \geqslant \aleph_0$, так как $\mathfrak{m}_1 \geqslant |P_n|$ при $n \geqslant N$ и согласно условию (a_1) $|P_n| \geqslant \aleph_0$. Следовательно, $\Big|\bigoplus\limits_{n=N}^{\infty} P_n\Big| \leqslant \mathfrak{m}_1 \cdot \aleph_0 = \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}$, что невозможно ввиду условия (4).

2-й случай: Для любого заданного кардинального числа $\mathfrak{m}^*$, меньшего $\mathfrak{m}$, существует группа P_n такая, что

$$\mathfrak{m}^* < |P_n| < \mathfrak{m}.$$

Легко видеть, что в этом случае существует бесконечное подмножество $\{P_{n_k}\}_{k<\omega}$ заданного множества $\{P_n\}_{n<\omega}$ такое, что

$$\sum_{k<\omega} |P_{n_k}| = \mathfrak{m} \quad \text{и} \quad |P_{n_k}| < |P_{n_{k+1}}| \quad (k < \omega). \tag{6}$$

Согласно теореме Кенига в этом случае

$$\prod_{\substack{k<\omega \\ N_1 \leqslant n_k}} |P_{n_k}| > \mathfrak{m},$$

но это противоречит равенству (4), так как $\Big|\prod\limits_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big| = \prod\limits_{n=N_1}^{\infty} |P_n|$.

Таким образом, равенство (5) имеет место для бесконечного множества индексов n.

Обозначим через M множество всех чисел n, для которых имеет место равенство (5). На основании предложения 7.6а заключаем, что

$$\Big|\Big(\prod_{i\in M} P_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i\in M} P_i\Big)\Big| \geqslant \mathfrak{m}. \tag{7}$$

Обозначим через A группу $\bigoplus\limits_{i\notin M} P_i$. Тогда легко видеть, что имеют место соотношения

$$\prod_{i<\omega} P_i \supset A \oplus \Big(\prod_{i\in M} P_i\Big), \qquad \bigoplus_{i<\omega} P_i = A \oplus \Big(\bigoplus_{i\in M} P_i\Big),$$

из которых вытекает неравенство

$$\Big|\Big(\prod_{i<\omega} P_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\Big)\Big| \geqslant \Big|\Big(\prod_{i\in M} P_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i\in M} P_i\Big)\Big|. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), имеем

$$\Big|\big(\prod_{i<\omega} P_i\big)/\big(\bigoplus_{i<\omega} P_i\big)\Big| \geqslant \mathfrak{m},$$

и, таким образом, предложение 7.6б доказано.

Доказательство предложения 7.6. Возможны два случая.

1-й случай:

$$\min_{N<\omega}\Big\{\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\} > \min_{N<\omega}\Big\{\Big|\bigoplus_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\}.$$

В этом случае, очевидно, существует число N_1 такое, что

$$\Big|\prod_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big| > \Big|\bigoplus_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big| \tag{10}$$

и

$$\Big|\prod_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big| = \min_{N<\omega}\Big\{\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\}. \tag{11}$$

На основании (10) заключаем, что имеет место равенство

$$\Big|\Big(\prod_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big)\Big| = \Big|\prod_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big|. \tag{12}$$

Кроме того, очевидно, имеет место соотношение

$$\big(\prod_{n<\omega} P_n\big)/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big) \cong \Big(\prod_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{n=N_1}^{\infty} P_n\Big). \tag{13}$$

Теперь из соотношений (11), (12) и (13) следует равенство

$$\Big|\big(\prod_{n<\omega} P_n\big)/\big(\bigoplus_{n<\omega} P_n\big)\Big| = \min_{N<\omega}\Big\{\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\},$$

и, значит, в этом случае неравенство (δ) выполняется.

2-й случай:

$$\min_{N<\omega}\Big\{\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\} = \min_{N<\omega}\Big\{\Big|\bigoplus_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\}.$$

В этом случае предложение 7.6 имеет место в силу предложения 7.6б.

Итак, предложение 7.6 доказано.

7.7. *Пусть $\{P_n\}_{n\in W(\omega)}$ есть счетная последовательность абелевых групп. Тогда имеет место неравенство*

$$\min_{N<\omega}\Big\{\Big|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Big|\Big\} \geqslant \min_{n<\omega}\big\{|P_n|^{\aleph_0}\big\}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть P_{N_1} есть группа из множества $\{P_n\}_{n<\omega}$ наименьшей мощности. Тогда, очевидно, выполняются следующие соотношения:

$$|P_{N_1}| \leqslant |P_n| \qquad (n < \omega), \tag{2}$$

$$|P_{N_1}|^{\aleph_0} = \min_{n<\omega}\bigl\{|P_n|^{\aleph_0}\bigr\}. \tag{3}$$

Из определения 7.4 легко следует равенство $\Bigl|\prod\limits_{n=N}^{\infty} P_n\Bigr| = \prod\limits_{n=N}^{\infty} |P_n|$, где N – любое число. Кроме того, на основании (2) заключаем, что

$$\prod_{n=N}^{\infty} |P_n| \geqslant |P_{N_1}|^{\aleph_0}.$$

Следовательно, при любом $N < \omega$ имеет место неравенство

$$\Bigl|\prod_{n=N}^{\infty} P_n\Bigr| \geqslant |P_{N_1}|^{\aleph_0}. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) следует неравенство (1).

7.8. *Пусть G есть редуцированная обобщенная примарная группа, удовлетворяющая условиям (a), (b) и (c) предложения* 7.5. *Обозначим через G' полное расширение группы G. Тогда имеет место неравенство*

$$|(G'/G)[p]\,| \geqslant \min_{n<\omega}\bigl\{|P_n|^{\aleph_0}\bigr\}.$$

Это предложение непосредственно следует из предложений 7.5, 7.6 и 7.7.

§ 8. Общий способ построения обобщенных примарных групп

В этом и следующем параграфах будут изложены теоремы, которые являются основой для решения проблемы о существовании групп с заданной последовательностью ульмовских факторов.

Основными в этих параграфах являются теоремы 8.3 и 9.1, дающие по существу общий способ построения любой обобщенной примарной группы.

8.1. *Пусть G – обобщенная примарная группа и S – подгруппа группы G^γ такая, что факторгруппа G/S является редуцированной группой, для которой $\tau(G/S) \leqslant \gamma$. Тогда $S = G^\gamma$.*

Доказательство. Положим $\overline{G} = G/S$. Обозначим через φ естественный гомоморфизм группы G на факторгруппу $\overline{G}$. Пусть x есть произвольный элемент группы G^γ. Так как φ является гомоморфизмом, то из соотношения $x \in G^\gamma$ легко следует, что $\varphi x \in \overline{G}^{\,\gamma}$. По условию $\overline{G}$ является редуцированной группой, для которой $\tau(\overline{G}) \leqslant \gamma$. Следовательно, $\overline{G}^{\,\gamma}$ является нулевой подгруппой группы $\overline{G}$. Отсюда следует, что φx является нулевым элементом группы $\overline{G}$. Следовательно, элемент x принадлежит ядру S гомоморфизма φ. Этим доказано, что $G^\gamma \subset S$. С другой стороны, по условию S является подгруппой группы G^γ. Следовательно, $S = G^\gamma$, что и требовалось доказать.

8.2. *Пусть S – подгруппа обобщенной примарной группы G, C – подгруппа групп S и G^{γ} такая, что факторгруппа S/C является полной группой. Тогда S является подгруппой группы G^{γ}.*

Доказательство. По условию S – подгруппа G^0, $G^0 = G$. Допустим, что S является подгруппой группы G^{α} всякий раз, когда $\alpha < \beta$, где β – порядковое число $\leqslant \gamma$, и докажем, что тогда S является подгруппой группы G^{β}.

1-й случай: β – изолированное число. По индуктивному предположению

$$S \subset G^{\beta-1}. \tag{1}$$

По условию S/C является полной группой, следовательно, согласно предложению 2.9 для любого заданного натурального числа n имеет место равенство

$$S = [C, p^n S]. \tag{2}$$

Пусть x есть произвольный элемент группы S. Согласно (2) элемент x можно представить в виде

$$x = c + p^n s, \quad \text{где } c \in C,\ s \in S. \tag{3}$$

По условию $c \in G^{\beta}$, следовательно, для заданного натурального числа n существует элемент $g \in G^{\beta-1}$ такой, что

$$p^n g = c. \tag{4}$$

В силу (3) и (4) $x = p^n(g+s)$, т.е. $x \in p^n G^{\beta-1}$ при любом заданном натуральном числе n. Отсюда следует, что $x \in \bigcap\limits_{n<\omega} p^n G^{\beta-1} = G^{\beta}$, и, значит, $S \subset G^{\beta}$.

2-й случай: β – предельное число. По индуктивному предположению S является подгруппой группы G^{α} всякий раз, когда $\alpha < \beta$. Следовательно,

$$S \subset \bigcap_{\alpha<\beta} G^{\alpha} = G^{\beta},$$

т.е.

$$S \subset G^{\beta}.$$

Таким образом, доказано, что S является подгруппой группы G^{γ}.

Предложение 8.2 доказано.

Если H – обобщенная примарная группа, то всюду ниже символом $P(H)$ будем обозначать обобщенную примарную группу (с тем же кольцом операторов, что и группа H), которая является минимальной полной для H группой и содержит H в качестве допустимой подгруппы. Согласно теоремам 2.30 и 2.32 для всякой обобщенной примарной группы H группа $P(H)$ существует и определяется однозначно с точностью до операторных изоморфизмов, переводящих все элементы группы H в самих себя.

8.3. Теорема. *Пусть заданы порядковое число $N > 1$ и последовательности групп $\{H_{\lambda}\}_{\lambda \in W(N)}$ и $\{C_{\lambda}\}_{\lambda \in W(N)}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a_1) *группы* H_λ, *принадлежащие последовательности* $\{H_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$, *являются ненулевыми редуцированными обобщенными примарными группами (с одной и той же областью операторов), для которых* $\tau^*(H_\lambda)$ *будет предельным числом всякий раз, когда* $\lambda+1<N$;

(a_2) C_λ *является изотипной и плотной подгруппой группы* H_λ, $\lambda\in W(N)$, *причем* $C_{N-1}=H_{N-1}$, *если* N – *изолированное число*;

(a_3) *для всякого* λ, *удовлетворяющего неравенству* $\lambda+1<N$, *существует гомоморфизм* φ_λ *группы* $P(Z_{\lambda+1})$ *на факторгруппу* H_λ/C_λ *с ядром* $Z_{\lambda+1}$, *где* $Z_\lambda=\bigoplus\limits_{\lambda\leqslant\alpha<N} C_\alpha$ *и* $P(Z_{\lambda+1})=\bigoplus\limits_{\lambda<\alpha<N} P(C_\alpha)$ – *минимальная полная для* $Z_{\lambda+1}$ *группа, являющаяся подгруппой группы* $P_{\lambda+1}=\bigoplus\limits_{\lambda<\alpha<N} P(H_\alpha)$.

Обозначим через S_λ *подгруппу группы* $H_\lambda\oplus P(Z_{\lambda+1})$, *определяемую следующим равенством* (см. определение 5.1):

$$S_\lambda=[H_\lambda;\,C_\lambda;\,\varphi_\lambda;\,P(Z_{\lambda+1})]\qquad(\lambda+1\in W(N)).\tag{s}$$

Положим $\tau_\lambda=\tau(H_\lambda)$, $\sigma_0=0$ *и* $\sigma_\lambda=\sum\limits_{\alpha<\lambda}\tau_\alpha$, *когда* $0<\lambda\leqslant N$. *Тогда подгруппа* $G=\Big[\bigcup\limits_{\lambda+1<N} S_\lambda\Big]$ *группы* $P=\bigoplus\limits_{\lambda<N} P(H_\lambda)$ *обладает следующими свойствами*:

$$G^{\sigma_\lambda}=\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big]\qquad(\lambda+1\in W(N));\tag{e_1}$$

$$G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}}\cong H_\lambda\qquad(\lambda\in W(N));\tag{e_2}$$

$$\tau(G)=\sum_{\lambda<N}\tau(H_\lambda)=\sigma_N;\tag{e_3}$$

(e_4) *G является редуцированной группой*;

$$|G|=\sum_{\lambda<N}|H_\lambda|;\tag{e_5}$$

(e_6) *если каждая группа* H_λ, $\lambda\in W(N)$, *является примарной, то примарной будет и группа* G;

$$G/pG\cong H_0/pH_0.\tag{e_7}$$

Доказательство. Из определения группы S_λ по теореме 5.2 вытекает, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{lll}
(s_3) & S_\lambda/C_\lambda\cong P(Z_{\lambda+1}) & (\lambda+1\in W(N)),\\
(s_4) & S_\lambda\cap P(Z_{\lambda+1})=Z_{\lambda+1} & (\lambda+1\in W(N)),\\
(s_6) & C_\lambda\subset S_\lambda & (\lambda+1\in W(N)),\\
(s_7) & S_\lambda^{\tau_\lambda}=Z_{\lambda+1} & (\lambda+1\in W(N)),\\
(s_8) & S_\lambda/S_\lambda^{\tau_\lambda}\cong H_\lambda & (\lambda+1\in W(N)).
\end{array}$$

1°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_1) \qquad S_\lambda \cap \Big(\bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha)\Big) \subset Z_{\lambda+1} \qquad (\lambda+1\in W(N)).$$

Предположим, что $g \in S_\lambda \cap \big(\bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha)\big)$, и покажем, что $g \in Z_{\lambda+1}$. Так как $g\in S_\lambda$ и $S_\lambda \subset H_\lambda \oplus P(Z_{\lambda+1})$, то $g = h+b$, где $h\in H_\lambda,\ b\in P(Z_{\lambda+1})$. Но

$$P(Z_{\lambda+1}) \subset \bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha),$$

следовательно, $b \in \bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha)$. Таким образом, элементы $g,\,b,$ а следовательно, и $g-b$ принадлежат группе $\bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha)$. Кроме того, $g-b=h\in H_\lambda$. Поэтому

$$g-b \in H_\lambda \cap \Big(\bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha)\Big) = \{0\},$$

т.е. $g-b=0$. Следовательно, $g=b\in S_\lambda\cap P(Z_{\lambda+1})$. Отсюда согласно равенству (s_4) следует, что $g\in Z_{\lambda+1}$. Этим соотношение (c_1) доказано.

2°. Обозначим через D_λ подгруппу группы G, определяемую равенством

$$D_\lambda = \Big[\bigcup_{\alpha<\lambda} S_\alpha\Big] \qquad (\lambda\in W(N)). \tag{1}$$

Из (1) следует равенство

$$D_\lambda = [D_{\lambda-1},\, S_{\lambda-1}] \qquad (\lambda<N,\ \lambda \text{ – изолированное число}). \tag{2}$$

Из определения групп D_λ и S_λ легко следует соотношение

$$D_\lambda \subset \Big(\bigoplus_{\alpha<\lambda} P(H_\alpha)\Big)\oplus P(Z_\lambda) \qquad (\lambda<N,\ \lambda \text{ – изолированное}). \tag{3}$$

Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_2) \qquad D_\lambda \cap \Big(\bigoplus_{\lambda\leqslant\alpha<N} P(H_\alpha)\Big) \subset Z_\lambda \qquad (\lambda\in W(N)).$$

Для $\lambda=0$ соотношение (c_2), очевидно, имеет место. Предположим, что (c_2) верно для всякого $\lambda<\beta,\ \ 0<\beta<N$, и докажем, что тогда (c_2) верно для $\lambda=\beta$.

1-й случай: β – изолированное число. Допустим, что

$$x\in D_\beta \cap \Big(\bigoplus_{\beta\leqslant\alpha<N} P(H_\alpha)\Big),$$

и докажем, что $x \in Z_\beta$. На основании (2) x можно представить в виде

$$x = d + s, \quad \text{где } d \in D_{\beta-1},\ s \in S_{\beta-1}. \tag{4}$$

Используя (3), получим

$$D_\beta \cap \Big(\bigoplus_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big) \subset \Big(\Big(\bigoplus_{\alpha < \beta} P(H_\alpha) \Big) \oplus P(Z_\beta) \Big) \cap \Big(\bigoplus_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big) = P(Z_\beta),$$

так как $P(Z_\beta) \subset \bigoplus\limits_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha)$ и

$$\Big(\bigoplus_{\alpha < \beta} P(H_\alpha) \Big) \cap \Big(\bigoplus_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big) = \{0\}.$$

Следовательно,

$$x \in P(Z_\beta). \tag{5}$$

В силу (4) и (5)

$$d = x - s \in \bigoplus_{\beta-1 \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha), \qquad d \in D_{\beta-1};$$

следовательно, по индуктивному предположению

$$d \in Z_{\beta-1}. \tag{6}$$

Согласно (s_6) и (s_7) $Z_{\beta-1} \subset S_{\beta-1}$. Отсюда и из соотношений (4) и (6) следует

$$x \in S_{\beta-1}. \tag{7}$$

В силу (s_4)

$$S_{\beta-1} \cap P(Z_\beta) = Z_\beta. \tag{8}$$

Из (5), (7) и (8) следует, что $x \in Z_\beta$. Следовательно,

$$D_\beta \cap \Big(\bigoplus_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big) \subset Z_\beta.$$

2-й случай: β – предельное число. Допустим, что $x \in D_\beta \cap \Big(\bigoplus\limits_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big)$, и докажем, что $x \in Z_\beta$. Так как $D_\beta = \big[\bigcup\limits_{\alpha < \beta} S_\alpha \big]$, то существует такое число $\gamma < \beta$, что $x \in D_\lambda$ при $\lambda \geqslant \gamma$, $\lambda \in W(\beta)$; следовательно,

$$x \in D_\lambda \cap \Big(\bigoplus_{\lambda \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big) \qquad (\gamma \leqslant \lambda < \beta).$$

Отсюда по индуктивному предположению $x \in Z_\lambda$, $\gamma \leqslant \lambda < \beta$. Следовательно, $x \in Z_\beta$, так как $Z_\beta = \bigcap\limits_{\gamma \leqslant \lambda < \beta} Z_\lambda$. Этим доказано, что

$$D_\beta \cap \Big(\bigoplus_{\beta \leqslant \alpha < N} P(H_\alpha) \Big) \subset Z_\beta.$$

Индукция проведена полностью. Таким образом, соотношение (c_2) доказано.

3°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_3) \qquad S_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\substack{\lambda<\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Big] = Z_{\lambda+1} \qquad (\lambda+2<N).$$

Из определения S_α легко следует, что

$$\Big[\bigcup_{\substack{\lambda<\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Big] \subset \bigoplus_{\lambda<\alpha<N} P(H_\alpha) \subset \bigoplus_{\alpha\neq\lambda} P(H_\alpha). \tag{9}$$

Используя (c_1) и (9), получим

$$S_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\substack{\lambda<\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Big] \subset Z_{\lambda+1}. \tag{10}$$

С другой стороны, из равенства $Z_{\lambda+1} = C_{\lambda+1} \oplus Z_{\lambda+2}$ и соотношений (s_6) и (s_7) следует, что

$$S_\lambda \supset Z_{\lambda+1}, \qquad \Big[\bigcup_{\substack{\lambda<\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Big] \supset S_{\lambda+1} \supset Z_{\lambda+1}, \tag{11}$$

и соотношение (c_3) следует из (10) и (11).

4°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_4) \qquad D_\lambda \cap S_\lambda = Z_\lambda \qquad (\lambda+1\in W(N),\ \lambda>0).$$

Так как в силу (1), (s_6) и (s_7) $Z_\lambda \subset D_\lambda$ и $Z_\lambda \subset S_\lambda$, то достаточно показать, что $D_\lambda \cap S_\lambda \subset Z_\lambda$. Но последнее соотношение следует из (c_2), так как

$$S_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda\leqslant\alpha<N} P(H_\alpha).$$

5°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_5) \qquad D_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] = Z_\lambda \qquad (\lambda+1\in W(N),\ \lambda>0).$$

Из определения группы S_α легко следует соотношение

$$\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \subset \bigoplus_{\lambda\leqslant\alpha<N} P(H_\alpha).$$

Отсюда в силу (c_2) получим

$$D_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \subset Z_\lambda.$$

Обратное включение также имеет место, так как в силу (c_4) $Z_\lambda \subset D_\lambda$ и $Z_\lambda \subset S_\lambda$. Поэтому имеет место соотношение (c_5).

6°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_6) \qquad S_\lambda \subset D_{\lambda+1}^{\sigma_\lambda} \qquad (\lambda + 1 \in W(N)).$$

Для $\lambda = 0$ соотношение (c_6) верно, так как $S_0 = D_1$ и $\sigma_0 = 0$. Предположим, что соотношение (c_6) верно для всякого $\lambda < \beta$, и докажем, что тогда оно верно также при $\lambda = \beta,\ \beta + 1 < N$.

1-й случай: β – изолированное число. По индуктивному предположению $S_{\beta-1} \subset D_\beta^{\sigma_{\beta-1}}$. Следовательно,

$$S_{\beta-1}^{\tau_{\beta-1}} \subset (D_\beta^{\sigma_{\beta-1}})^{\tau_{\beta-1}} = D_\beta^{\sigma_\beta}. \tag{12}$$

Так как $Z_\beta = C_\beta \oplus Z_{\beta+1}$ и согласно (s_7) $S_{\beta-1}^{\tau_{\beta-1}} = Z_\beta$, то

$$C_\beta \subset S_{\beta-1}^{\tau_{\beta-1}}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$C_\beta \subset D_\beta^{\sigma_\beta}. \tag{14}$$

Согласно (s_3) факторгруппа S_β/C_β является полной группой. Кроме того, в силу (1) $S_\beta \subset D_{\beta+1}$. Поэтому из (14) и определения группы D_β в силу предложения 8.2 следует соотношение

$$S_\beta \subset D_{\beta+1}^{\sigma_\beta}.$$

2-й случай: β – предельное число. По индуктивному предположению

$$S_\alpha \subset D_{\alpha+1}^{\sigma_\alpha} \quad \text{при } \alpha < \beta.$$

В силу (s_7) $S_\alpha^{\tau_\alpha} = Z_{\alpha+1}$. Кроме того, $Z_{\alpha+1} \supset C_\beta$ при $\alpha < \beta$. Следовательно,

$$C_\beta \subset D_{\beta+1}^{\sigma_\alpha} \qquad (\alpha < \beta),$$

откуда $C_\beta \subset \bigcap\limits_{\alpha<\beta} D_{\beta+1}^{\sigma_\alpha} = D_{\beta+1}^{\sigma_\beta}$, т.е.

$$C_\beta \subset D_{\beta+1}^{\sigma_\beta}.$$

Согласно (s_3) факторгруппа S_β/C_β является полной группой. Поэтому из соотношений $C_\beta \subset D_{\beta+1}^{\sigma_\beta}$ и $S_\beta \subset D_{\beta+1}$ [см. (1)] в силу предложения 8.2 следует, что

$$S_\beta \subset D_{\beta+1}^{\sigma_\beta}.$$

Индукция проведена полностью. Таким образом, соотношение (c_6) доказано.

7°. Докажем, что имеет место равенство

$$(c_7) \qquad D_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\lambda \leqslant \alpha < \beta} S_\alpha \Big] = Z_\lambda \qquad (0 < \lambda < \beta < N).$$

Из (c_5) следует, что

$$D_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\lambda \leqslant \alpha < \beta} S_\alpha \Big] \subset Z_\lambda.$$

Обратное включение также имеет место, так как в силу (c_4) $Z_\lambda \subset D_\lambda$ и $Z_\lambda \subset S_\lambda$. Поэтому имеет место соотношение (c_7).

8°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(c_8) \qquad \bigcap_{\alpha<\beta} \Big[\bigcup_{\alpha \leqslant \lambda < \beta} S_\lambda \Big] = Z_\beta \qquad (\beta \text{ – предельное число, } 0 < \beta < N).$$

Пусть $d \in \bigcap_{\alpha<\beta} \Big[\bigcup_{\alpha \leqslant \lambda < \beta} S_\lambda \Big]$. В силу (1) $d \in D_\beta$, и так как β – предельное число, существует число λ_1, $0 < \lambda_1 < \beta$, такое, что $d \in D_{\lambda_1}$. Но тогда, очевидно,

$$d \in D_\lambda \quad \text{при } \lambda_1 \leqslant \lambda$$

и, значит, $d \in D_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\lambda \leqslant \mu < \beta} S_\mu \Big]$ при $\lambda_1 \leqslant \lambda < \beta$. Следовательно, в силу (c_7)

$$d \in Z_\lambda \qquad (\lambda_1 \leqslant \lambda < \beta).$$

Отсюда заключаем, что $d \in \bigcap_{\lambda_1 \leqslant \lambda < \beta} Z_\lambda$ и $d \in Z_\beta$, так как, очевидно, $\bigcap_{\lambda_1 \leqslant \lambda < \beta} Z_\lambda = Z_\beta$. Этим доказано, что

$$\bigcap_{\alpha<\beta} \Big[\bigcup_{\alpha \leqslant \lambda < \beta} S_\lambda \Big] \subset Z_\beta.$$

Обратное включение также имеет место, так как в силу (s_7) $S_\lambda \supset Z_\beta$ при $\lambda < \beta$. Таким образом, соотношение (c_8) доказано.

9°. Докажем, что имеет место равенство

$$(c_9) \qquad D_\lambda^{\sigma_\lambda} = Z_\lambda \qquad (0 < \lambda < N).$$

Для $\lambda = 1$ равенство (c_9) верно, так как $D_1 = S_0$, $\sigma_1 = \tau_0$ и в силу (s_7) $S_0^{\tau_0} = Z_1$. Предположим, что (c_9) верно всякий раз, когда $\lambda < \beta$, $1 < \beta < N$, и докажем, что тогда (c_9) верно при $\lambda = \beta$.

1-й случай: β – изолированное число. Используя соотношения (2), (c_4) и первую теорему об изоморфизме, получим

$$D_\beta / S_{\beta-1} = [D_{\beta-1}, S_{\beta-1}] / S_{\beta-1} \cong D_{\beta-1} / (D_{\beta-1} \cap S_{\beta-1}) = D_{\beta-1} / Z_{\beta-1}.$$

По индуктивному предположению $Z_{\beta-1} = D_{\beta-1}^{\sigma_{\beta-1}}$. Следовательно,

$$D_\beta / S_{\beta-1} \cong D_{\beta-1} / D_{\beta-1}^{\sigma_{\beta-1}}.$$

Согласно предложению 6.11 факторгруппа $D_{\beta-1}/D_{\beta-1}^{\sigma_{\beta-1}}$ является редуцированной группой и ульмовский тип ее не больше, чем $\sigma_{\beta-1}$. Следовательно, факторгруппа $D_\beta/S_{\beta-1}$ является редуцированной группой и тип ее не больше, чем $\sigma_{\beta-1}$. Кроме того, согласно (c_6) $S_{\beta-1} \subset D_\beta^{\sigma_{\beta-1}}$. Поэтому в силу предложения 8.1 имеет место равенство

$$D_\beta^{\sigma_{\beta-1}} = S_{\beta-1},$$

из которого следует равенство

$$D_\beta^{\sigma_\beta} = S_{\beta-1}^{\tau_{\beta-1}}. \tag{15}$$

Кроме того, согласно (s_7)

$$S_{\beta-1}^{\tau_{\beta-1}} = Z_\beta. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что $D_\beta^{\sigma_\beta} = Z_\beta$.

2-й случай: β – предельное число. В силу (c_6) $S_\alpha \subset D_{\alpha+1}^{\sigma_\alpha}$ для всех $\alpha < \beta$. Но $D_{\alpha+1} \subset D_\beta$ при $\alpha < \beta$ и, следовательно, $D_{\alpha+1}^{\sigma_\alpha} \subset D_\beta^{\sigma_\alpha}$. Поэтому выполняется соотношение

$$S_\alpha \subset D_\beta^{\sigma_\alpha} \qquad (\alpha < \beta). \tag{17}$$

Из (17) следует соотношение

$$\Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] \subset D_\beta^{\sigma_\alpha}. \tag{18}$$

Используя соотношения (1), (c_7) и первую теорему об изоморфизме, получим для всякого α, где $0 < \alpha < \beta$,

$$D_\beta \Big/ \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] = \Big[D_\alpha, \bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] \Big/ \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] \cong D_\alpha \Big/ \Big(D_\alpha \cap \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big]\Big) = D_\alpha/Z_\alpha.$$

По индуктивному предположению $Z_\alpha = D_\alpha^{\sigma_\alpha}$. Следовательно,

$$D_\beta \Big/ \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] \cong D_\alpha/D_\alpha^{\sigma_\alpha} \qquad (\alpha < \beta). \tag{19}$$

Из (19) в силу предложения 6.11 следует, что факторгруппа $D_\beta \Big/ \Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big]$ является редуцированной группой, ульмовский тип которой не больше, чем σ_α. Принимая еще во внимание соотношение (18), на основании предложения 8.1 заключаем, что

$$\Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] = D_\beta^{\sigma_\alpha} \qquad (\alpha < \beta). \tag{20}$$

Из (20) и (c_8) следует, что $D_\beta^{\sigma_\beta} = \bigcap_{\alpha<\beta} D_\beta^{\sigma_\alpha} = \bigcap_{\alpha<\beta}\Big[\bigcup_{\alpha\leqslant\mu<\beta} S_\mu\Big] = Z_\beta$, т.е. $D_\beta^{\sigma_\beta} = Z_\beta$.

Таким образом, индукция проведена и соотношение (c_9) этим доказано.

10°. Докажем, что имеет место равенство

$$(e_1) \qquad G^{\sigma_\lambda} = \Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \qquad (\lambda+1 \in W(N)).$$

Соотношение (e_1), очевидно, имеет место, когда $\lambda = 0$, так как $G^{\sigma_0} = G^0 = G$ и, согласно определению группы G, $G = \Big[\bigcup_{\alpha+1<N} S_\alpha\Big]$. Поэтому необходимо рассмотреть только тот случай, когда $\lambda > 0$. На основании того, что $D_{\alpha+1}^{\sigma_\alpha} \subset D_{\alpha+1}^{\sigma_\lambda}$ при $\lambda \leqslant \alpha$ и в силу (c_6) $S_\alpha \subset D_{\alpha+1}^{\sigma_\alpha}$ при $\alpha+1 < N$, имеет место соотношение

$$S_\alpha \subset D_{\alpha+1}^{\sigma_\lambda} \qquad (\alpha+1 \in W(N),\ \lambda \leqslant \alpha). \tag{21}$$

Из соотношения $D_{\alpha+1} \subset G$, очевидно, следует соотношение $D_{\alpha+1}^{\sigma_\lambda} \subset G^{\sigma_\lambda}$, откуда согласно (21)

$$S_\alpha \subset G^{\sigma_\lambda} \qquad (\alpha+1 \in W(N),\ \lambda \leqslant \alpha). \tag{22}$$

На основании (22) заключаем, что

$$G^{\sigma_\lambda} \supset \Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \qquad (\lambda+1 \in W(N)). \tag{23}$$

Используя определение группы G, соотношения (c_5), (c_9) и первую теорему об изоморфизме, для всякого $\lambda > 0$ такого, что $\lambda+1 < N$, получим

$$G\Big/\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] = \Big[D_\lambda, \bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big]\Big/\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \cong$$
$$\cong D_\lambda\Big/\Big(D_\lambda \cap \Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big]\Big) = D_\lambda/Z_\lambda = D_\lambda/D_\lambda^{\sigma_\lambda},$$

т.е.

$$G\Big/\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \cong D_\lambda/D_\lambda^{\sigma_\lambda} \qquad (\lambda+1 \in W(N)). \tag{24}$$

Из (24) в силу предложения 6.11 следует, что факторгруппа $G\Big/\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big]$ является редуцированной группой, ульмовский тип которой не больше, чем σ_λ. Принимая еще во внимание соотношение (23), на основании предложения 8.1 заключаем, что

$$G^{\sigma_\lambda} = \Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \qquad (\lambda+1 \in W(N)).$$

11°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(e_1^*) \qquad G^{\sigma_{N-1}} = H_{N-1} \qquad (N \text{ – изолированное число}).$$

Возможны два случая.

1-й случай: $N-1$ есть предельное число. В этом случае

$$G^{\sigma_{N-1}} = \bigcap_{\lambda<N-1} G^{\sigma_\lambda},$$

и в силу (e_1)

$$G^{\sigma_{N-1}} = \bigcap_{\lambda<N-1}\Big[\bigcup_{\lambda\leqslant\alpha<N-1} S_\alpha\Big].$$

Отсюда согласно (c_8) получим

$$G^{\sigma_{N-1}} = Z_{N-1}.$$

Но, согласно определению группы Z_{N-1}, $Z_{N-1} = C_{N-1}$ и на основании условия (a_2) $C_{N-1} = H_{N-1}$. Поэтому $G^{\sigma_{N-1}} = H_{N-1}$, т.е. имеет место равенство (e_1^*).

2-й случай: $N-1$ – изолированное число. В этом случае в силу (e_1)

$$G^{\sigma_{N-2}} = S_{N-2},$$

откуда $G^{\sigma_{N-1}} = (G^{\sigma_{N-2}})^{\tau_{N-2}} = S_{N-2}^{\tau_{N-2}}$. Но в силу (s_7) $S_{N-2}^{\tau_{N-2}} = Z_{N-1} = C_{N-1}$ и согласно условию (a_2) $C_{N-1} = H_{N-1}$. Поэтому $G^{\sigma_{N-1}} = H_{N-1}$, т.е. имеет место соотношение (e_1^*).

12°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(e_4^*) \qquad G^{\sigma_N} = \{0\}.$$

Если N – изолированное число, то

$$H_{N-1}^{\tau_{N-1}} = \{0\}, \tag{25}$$

так как по условию H_{N-1} – редуцированная группа. На основании соотношений (e_1^*) и (25) заключаем, что соотношение (e_4^*) имеет место, когда N – изолированное число. Если же N – предельное число, то, используя соотношение (e_1), получим

$$G^{\sigma_N} = \bigcap_{\lambda<N} G^{\sigma_\lambda} = \bigcap_{\lambda<N}\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N} S_\alpha\Big] \subset \bigcap_{\lambda<N}\Big(\bigoplus_{\lambda<\alpha+1<N} P(H_\alpha)\Big).$$

Следовательно, $G^{\sigma_N} = \{0\}$. Таким образом, равенство (e_4^*) имеет место также и в том случае, когда N – предельное число.

На основании соотношения (e_4^*) заключаем, что группа G является редуцированной, т.е. обладает свойством (e_4).

13°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(e_2) \qquad G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}} \cong H_\lambda \qquad (\lambda \in W(N)).$$

Используя соотношения (e_1), (c_3) и первую теорему об изоморфизме, получим

$$G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}} = \Bigg[\bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Bigg]\bigg/\Bigg[\bigcup_{\substack{\lambda<\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Bigg] \cong$$

$$\cong S_\lambda\bigg/\Bigg(S_\lambda \cap \Bigg[\bigcup_{\substack{\lambda<\alpha\\ \alpha+1<N}} S_\alpha\Bigg]\Bigg) = S_\lambda/Z_{\lambda+1} \qquad (\lambda+2<N).$$

Отсюда, так как в силу (s_7) и (s_8) $S_\lambda/Z_{\lambda+1} \cong H_\lambda$, получим

$$G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}} \cong H_\lambda \qquad (\lambda+2<N). \tag{26}$$

Если N – изолированное число, то на основании соотношений (e_1^*) и (e_4^*) заключаем, что

$$G^{\sigma_{N-1}}/G^{\sigma_N} \cong H_{N-1}. \tag{27}$$

Далее, если $N-1$ есть изолированное число, то согласно (e_1) $G^{\sigma_{N-2}} = S_{N-2}$, откуда в силу (s_8) следует, что

$$G^{\sigma_{N-2}}/G^{\sigma_{N-1}} \cong H_{N-2}. \tag{28}$$

Теперь соотношение (e_2) следует из (26), когда N – предельное число. Если же N – изолированное число, то соотношение (e_2) следует из соотношений (26), (27) и (28).

14°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(e_3) \qquad \tau(G) = \sum_{\lambda<N} \tau_\lambda \qquad (\tau_\lambda = \tau(H_\lambda)).$$

1-й случай: N – изолированное число. Из (e_1^*) следует, что

$$\tau(G^{\sigma_{N-1}}) = \tau(H_{N-1}) = \tau_{N-1},$$

т.е.

$$\tau(G^{\sigma_{N-1}}) = \tau_{N-1}. \tag{29}$$

Из (29) легко следует, что

$$\tau(G) = \sigma_{N-1} + \tau_{N-1} = \sigma_N.$$

2-й случай: N – предельное число. Из (e_1) следует неравенство

$$\tau(G) > \sigma_\lambda \qquad (\lambda+1 \in W(N)). \tag{30}$$

На основании (30) заключаем, что

$$\tau(G) \geqslant \lim_{\lambda\to N} \sigma_\lambda = \sigma_N.$$

Отсюда $\tau(G) \geqslant \sigma_N$. С другой стороны, в силу (e_4^*) $\tau(G) \leqslant \sigma_N$. Следовательно, $\tau(G) = \sigma_N$.

Таким образом, (e_3) доказано.

15°. Докажем, что имеет место равенство

$$(e_5) \qquad |G| = \sum_{\lambda<N} |H_\lambda|.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_\lambda$ множество элементов группы G, определяемое равенством

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{cases} G^{\sigma_\lambda} \setminus G^{\sigma_{\lambda+1}}, & \text{если } \lambda+1<N; \\ G^{\sigma_\lambda}, & \text{если } N \text{ – изолированное число и } \lambda+1=N. \end{cases} \tag{31}$$

Согласно (e_4^*) $G^{\sigma_N} = \{0\}$, и легко видеть, что имеет место равенство

$$G = \Big(\bigcup_{\lambda<N} \mathfrak{A}_\lambda\Big) \cup \{0\}. \tag{32}$$

Из (31) следует соотношение

$$|G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}}| \leqslant |\mathfrak{A}_\lambda| \qquad (\lambda \in W(N)),$$

откуда в силу (e_2)

$$|H_\lambda| \leqslant |\mathfrak{A}_\lambda| \qquad (\lambda \in W(N)). \tag{33}$$

Множества $\mathfrak{A}_\lambda$ в правой части соотношения (32) не пересекаются. Поэтому на основании (32) и (33) заключаем, что имеет место соотношение

$$|G| \geqslant \sum_{\lambda<N} |\mathfrak{A}_\lambda| \geqslant \sum_{\lambda<N} |H_\lambda|,$$

т.е.

$$|G| \geqslant \sum_{\lambda<N} |H_\lambda|. \tag{34}$$

С другой стороны, так как $P = \bigoplus_{\lambda<N} P(H_\lambda)$ и G является подгруппой группы P,

$$|G| \leqslant |P| = \sum_{\lambda<N} |P(H_\lambda)|. \tag{35}$$

В силу свойства (f) предложения 2.28 $|P(H_\lambda)| = |H_\lambda|$, если H_λ является бесконечной группой. Но из условия (a_1) следует, что любая группа H_λ бесконечна, за исключением, быть может, случая, когда N является изолированным числом и $\lambda = N-1$. Поэтому

$$|P| = \sum_{\lambda<N} |H_\lambda|. \tag{36}$$

Сравнивая (35) и (36), получаем

$$|G| \leqslant \sum_{\lambda<N} |H_\lambda|. \tag{37}$$

Равенство (e_5) следует из (34) и (37).

16°. Группа G является подгруппой группы P, $P = \bigoplus\limits_{\lambda<N} P(H_\lambda)$. Если все группы последовательности $\{H_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$ являются примарными, то в силу свойства (e) предложения 2.28 примарными группами будут $P(H_\lambda)$ и, значит, примарной будет группа P. Следовательно, группа G как подгруппа примарной группы также будет примарной.

Таким образом, свойство (e_6) доказано.

17°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(e_7) \qquad G/pG \cong H_0/pH_0.$$

Положим $\overline{G} = G/G^{\tau_0}$. В силу предложения 6.9 полным прообразом группы $p\overline{G}$ при естественном гомоморфизме группы G на факторгруппу $\overline{G}$ является подгруппа pG группы G. Отсюда следует, что

$$G/pG \cong \overline{G}/p\overline{G}. \tag{38}$$

Кроме того, согласно (e_2) $G/G^{\tau_0} = G^{\sigma_0}/G^{\sigma_1} \cong H_0$, т.е.

$$\overline{G} \cong H_0. \tag{39}$$

Теперь, сопоставляя соотношения (38) и (39), получим соотношение (e_7).

Теорема 8.3 доказана.

8.4. *Пусть C – изотипная и плотная подгруппа редуцированной обобщенной примарной* (*относительно p*) *группы H и H/pH является конечной группой, причем $\tau^*(H) \geqslant \omega$. Тогда факторгруппа H/C есть группа без кручения.*

Доказательство. 1°. Пусть B – какая-либо базисная подгруппа группы H (см. теорему 4.2). Так как по условию факторгруппа H/pH есть конечная группа и в силу предложения 4.12

$$B/pB \cong H/pH,$$

то факторгруппа B/pB также является конечной группой. Отсюда, так как B разложима в прямую сумму циклических подгрупп (см. определение 4.1), следует, что B является прямой суммой конечного числа циклических подгрупп. Поэтому существует натуральное число m такое, что подгруппа p^mB группы H не содержит элементов конечного порядка, отличных от нулевого.

2°. Так как B – базисная подгруппа группы H, то в силу предложения 4.14 p^mB является базисной подгруппой группы p^mH. Выше было показано, что p^mB не содержит элементов конечного порядка, отличных от нулевого. Кроме того, по условию H – редуцированная группа и, следовательно, редуцированной является также группа p^mH. Поэтому на основании предложения 4.9 заключаем, что p^mH является группой без кручения. Отсюда следует, что

$$(p^mH)[p] = (p^mC)[p] = \{0\}. \tag{1}$$

3°. Так как по условию C – изотипная и плотная подгруппа группы H, то в силу предложения 3.49 имеет место соотношение

$$H/C \cong p^m H/p^m C. \tag{2}$$

Но так как C – изотипная подгруппа группы H, то согласно предложению 3.16 $p^m C$ является сервантной подгруппой группы $p^m H$ и поэтому согласно предложению 3.33 имеет место соотношение

$$(p^m H/p^m C)[p] \cong (p^m H)[p]\big/(p^m C)[p]. \tag{3}$$

На основании соотношений (1) и (3) заключаем, что группа $(p^m H/p^m C)[p]$ является нулевой. Отсюда в силу (2) следует, что $(H/C)[p]$ есть нулевая группа. Поэтому, принимая во внимание предложение 1.3, заключаем, что факторгруппа H/C не содержит элементов конечного порядка, отличных от нулевого, что и требовалось доказать.

8.5. Теорема. *Пусть заданы порядковое число $N > 1$ и последовательности групп $\{H_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$ и $\{C_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$, удовлетворяющие условиям (a_1), (a_2) теоремы 8.3 и условию*

(a_3^*) *факторгруппа H_λ/C_λ является полной примарной группой, удовлетворяющей соотношению*

$$|(H_\lambda/C_\lambda)[p]\,| = \sum_{\lambda<\alpha<N} |H_\alpha/pH_\alpha| \qquad (\lambda+1 \in W(N)).$$

Тогда существует обобщенная примарная группа G (с той же областью операторов, что и группы H_λ), обладающая свойствами (e_2), (e_3), (e_4), (e_5), (e_6), (e_7), перечисленными в теореме 8.3.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы 8.5 выполнены, и докажем, что тогда выполняется условие (a_3) теоремы 8.3. Этим, очевидно, теорема будет доказана.

Докажем, что для всякого λ, удовлетворяющего условию $\lambda+1<N$, факторгруппа H_λ/pH_λ является бесконечной группой, т.е.

$$|H_\lambda/pH_\lambda| \geqslant \aleph_0 \qquad (\lambda+1<N). \tag{1}$$

Допустим, что H_λ/pH_λ есть конечная группа. Тогда согласно предложению 8.4 H_λ/C_λ будет группой без кручения, так как по условию (a_1) H_λ – редуцированная группа $(\tau^*(H_\lambda) \geqslant \omega)$ и согласно условию (a_2) C_λ является изотипной и плотной подгруппой группы H_λ. Поскольку H_λ/C_λ есть группа без кручения, $(H_\lambda/C_\lambda)[p]$ является нулевой группой. Но это противоречит условию (a_3^*), так как согласно условию (a_1) H_α является ненулевой редуцированной группой и, значит, H_α/pH_α есть ненулевая группа при всяком $\alpha<N$. Этим доказано, что имеет место соотношение (1).

Поскольку $Z_{\lambda+1} = \bigoplus\limits_{\lambda<\alpha<N} C_\alpha$ [см. условие (a_3)], то $pZ_{\lambda+1} = \bigoplus\limits_{\lambda<\alpha<N} pC_\alpha$. Легко видеть, что

$$\Big(\bigoplus_{\lambda<\alpha<N} C_\alpha\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{\lambda<\alpha<N} pC_\alpha\Big) \cong \bigoplus_{\lambda<\alpha<N} C_\alpha/pC_\alpha,$$

откуда

$$Z_{\lambda+1}/pZ_{\lambda+1} \cong \bigoplus_{\lambda<\alpha<N} C_\alpha/pC_\alpha \qquad (\lambda+1<N). \tag{2}$$

Так как согласно условиям (a_1) и (a_2) C_α является изотипной и плотной подгруппой редуцированной группы H_α, то в силу предложения 3.47 имеет место соотношение

$$C_\alpha/pC_\alpha \cong H_\alpha/pH_\alpha \qquad (\alpha<N). \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3), получим

$$Z_{\lambda+1}/pZ_{\lambda+1} \cong \bigoplus_{\lambda<\alpha<N} H_\alpha/pH_\alpha \qquad (\lambda+1<N).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (1), заключаем, что

$$|Z_{\lambda+1}/pZ_{\lambda+1}| = \sum_{\lambda<\alpha<N} |H_\alpha/pH_\alpha| \qquad (\lambda+1<N). \tag{4}$$

Из условия (a_3^*) и соотношения (4) следует соотношение

$$|(H_\lambda/C_\lambda)[p]\,| = |Z_{\lambda+1}/pZ_{\lambda+1}| \qquad (\lambda+1<N). \tag{5}$$

С другой стороны, согласно свойству (d) предложения 2.28

$$\big(P(Z_{\lambda+1})/Z_{\lambda+1}\big)[p] \cong Z_{\lambda+1}/pZ_{\lambda+1}. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), получим соотношение

$$|(H_\lambda/C_\lambda)[p]\,| = \big|\big(P(Z_{\lambda+1})/Z_{\lambda+1}\big)[p]\,\big| \qquad (\lambda+1<N). \tag{7}$$

В силу свойства (b) предложения 2.28 факторгруппа $P(Z_{\lambda+1})/Z_{\lambda+1}$ является полной примарной группой. Кроме того, согласно условию (a_3^*) факторгруппа H_λ/C_λ также является полной примарной группой. Поэтому из равенства (7) в силу предложения 2.22 следует, что факторгруппы H_λ/C_λ и $P(Z_{\lambda+1})/Z_{\lambda+1}$ изоморфны, $\lambda+1<N$. Следовательно, если $\lambda+1<N$, существует гомоморфизм φ_λ группы $P(Z_{\lambda+1})$ на факторгруппу H_λ/C_λ с ядром $Z_{\lambda+1}$.

Теорема доказана.

§ 9. Общий способ построения обобщенных примарных групп (продолжение)

9.1. Теорема. *Пусть заданы порядковое число N, удовлетворяющее неравенствам $1<N\leqslant\omega$, и последовательности групп $\{H_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$ и $\{C_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a_1) *группы* H_λ, *принадлежащие последовательности* $\{H_\lambda\}_{\lambda\in W(N)}$, *являются ненулевыми редуцированными обобщенными примарными группами* (*с одним и тем же кольцом операторов*), *для которых* $\tau^*(H_\lambda)$ *будет предельным числом всякий раз, когда* $\lambda+1<N$;

(a_2) C_λ *является изотипной и плотной подгруппой группы* H_λ, $\lambda\in W(N)$, *причем* $C_{N-1}=H_{N-1}$, *если* $N<\omega$;

(a_3) *для всякого* λ, *удовлетворяющего условию* $\lambda+1<N$, *существует гомоморфизм* φ_λ *группы* $P(C_{\lambda+1})$ *на факторгруппу* H_λ/C_λ *с ядром* $C_{\lambda+1}$, *где* $P(C_{\lambda+1})$ – *минимальная полная для* $C_{\lambda+1}$ *группа, являющаяся подгруппой группы* $P(H_{\lambda+1})$.

Обозначим через S_λ *подгруппу группы* $H_\lambda\oplus P(C_{\lambda+1})$, *определяемую следующим равенством* (см. определение 5.1):

$$(s)\qquad S_\lambda=[H_\lambda;\, C_\lambda;\, \varphi_\lambda;\, P(C_{\lambda+1})]\qquad (\lambda+1\in W(N)).$$

Положим $\tau_\lambda=\tau(H_\lambda)$, $\sigma_0=0$ *и* $\sigma_\lambda=\sum\limits_{\alpha<\lambda}\tau_\alpha$, *когда* $0<\lambda\leqslant N$. *Тогда подгруппа* $G=\Big[\bigcup\limits_{\lambda+1<N}S_\lambda\Big]$ *группы* $P=\bigoplus\limits_{\lambda<N}P(H_\lambda)$ *обладает следующими свойствами*:

$$(e_1)\qquad G^{\sigma_\lambda}=\Big[\bigcup_{\lambda<\alpha+1<N}S_\alpha\Big]\qquad (\lambda+1\in W(N));$$

$$(e_2)\qquad G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}}\cong H_\lambda\qquad (\lambda\in W(N));$$

$$(e_3)\qquad \tau(G)=\sum_{\lambda<N}\tau(H_\lambda)=\sigma_N;$$

(e_4) G *является редуцированной группой*;

$$(e_5)\qquad |G|=\sum_{\lambda<N}|H_\lambda|;$$

(e_6) *если каждая группа* H_λ, $\lambda\in W(N)$, *является примарной, то примарной будет и группа* G;

$$(e_7)\qquad G/pG\cong H_0/pH_0;$$

$$(e_8)\qquad G[p]=\bigoplus_{\lambda<N}C_\lambda[p]\qquad \text{и}\qquad G^{\sigma_n}[p]=\bigoplus_{n\leqslant i<N}C_i[p]\quad (n+1<N).$$

Доказательство. Если в доказательстве теоремы 8.3 всякий раз, когда встречается Z_λ, $\lambda\in W(N)$, заменять группу Z_λ через C_λ, то это доказательство автоматически превращается в доказательство свойств (e_1), (e_2), (e_3), (e_4), (e_5), (e_6) и (e_7) группы G, перечисленных в теореме 9.1.

Таким образом, нам остается только доказать, что группа G обладает свойством (e_8).

Отметим, что при доказательстве теоремы 8.3 было показано, что имеет место соотношение

$$(c_4) \qquad D_\lambda \cap S_\lambda = Z_\lambda \qquad (1 < \lambda + 1 < N),$$

где D_λ – подгруппа группы G, определяемая равенством

$$D_\lambda = \Big[\bigcup_{i<\lambda} S_i\Big] \qquad (\lambda < N). \tag{1}$$

Заменяя в (c_4) Z_λ через C_λ, получим равенство

$$D_\lambda \cap S_\lambda = C_\lambda \qquad (1 < \lambda + 1 < N). \tag{2}$$

Из равенства (1) следует соотношение

$$\Big[\bigcup_{n\leqslant i<\lambda} S_i\Big] \subset D_\lambda \qquad (n < \lambda),$$

из которого в силу (2) вытекает соотношение

$$\Big[\bigcup_{n\leqslant i<\lambda} S_i\Big] \cap S_\lambda \subset C_\lambda \qquad (n + 1 < \lambda + 1 < N). \tag{3}$$

Но имеет место и обратное включение, ибо из определения S_λ и $S_{\lambda-1}$ следует, что $C_\lambda \subset S_\lambda$ и $C_\lambda \subset S_{\lambda-1} \subset \Big[\bigcup_{n\leqslant i<\lambda} S_i\Big]$. Таким образом, имеет место равенство

$$\Big[\bigcup_{n\leqslant i<\lambda} S_i\Big] \cap S_\lambda = C_\lambda \qquad (n + 1 < \lambda + 1 < N). \tag{4}$$

Из равенства (s), определяющего группу S_λ, по теореме 5.2 следует, что группа C_λ обладает следующими свойствами:

(s_6^*) C_λ является сервантной подгруппой группы S_λ,

(s_{10}^*) $S_\lambda[p] = C_\lambda[p] \oplus C_{\lambda+1}[p] \qquad (\lambda + 1 < N)$.

Далее, согласно свойству (e_1) группы G имеет место равенство

$$G^{\sigma_n} = \Big[\bigcup_{n<i+1<N} S_i\Big] \qquad (n + 1 < N). \tag{5}$$

Из равенств (5), (4) и свойства (s_6^*) группы C_λ вытекает, что группа G^{σ_n} и последовательность $\{S_i\}_{n<i+1<N}$ ее подгрупп удовлетворяют условиям предложения 3.36. На основании этого предложения мы заключаем, что

$$G^{\sigma_n}[p] = \Big[\bigcup_{n<i+1<N} S_i[p]\Big] \qquad (n + 1 < N). \tag{6}$$

Теперь на основании равенств (s_{10}^*) и (6) делаем вывод, что имеет место равенство

$$G^{\sigma_n}[p] = \bigoplus_{n\leqslant i<N} C_i[p] \qquad (n + 1 < N),$$

в частности, при $n = 0$ получаем равенство

$$G[p] = \bigoplus_{i<N} C_i[p],$$

так как $\sigma_0 = 0$ и $G^{\sigma_0} = G^0 = G$.

Таким образом, доказано, что группа G обладает свойством (e_8).

Теорема 9.1 доказана.

9.2. *Пусть заданы последовательности обобщенных примарных (относительно p) групп*

$$\{H_n\}_{n\in W(\omega)}, \tag{1}$$

$$\{C_n\}_{n\in W(\omega)}, \tag{2}$$

удовлетворяющие условиям (a_1), (a_2) и (a_3) теоремы 9.1. Обозначим через $\mathfrak{m}_1$ кардинальное число, определяемое равенством

$$\mathfrak{m}_1 = \min_{n<\omega}\bigl\{|C_n[p]\,|^{\aleph_0}\bigr\}.$$

Пусть, далее, заданы кардинальные числа $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}^*$, удовлетворяющие следующим условиям:

(f_1^*) $$\sum_{n<\omega}|H_n| \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \Bigl(\sum_{n<\omega}|H_n|\Bigr) + \mathfrak{m}_1;$$

(f_2^*) $\mathfrak{m}^* \leqslant \mathfrak{m}_1$, *причем если $\mathfrak{m}^*$ является конечным числом, то оно является степенью числа p.*

Тогда существуют обобщенные примарные группы H и C (с той же областью операторов, что и группы H_n) со следующими свойствами:

(r_1) *H есть редуцированная группа;*

(r_2) *C есть изотипная и плотная подгруппа группы H;*

(r_3) *факторгруппа H/C есть полная примарная группа, удовлетворяющая условию $|(H/C)[p]\,| = \mathfrak{m}^*$;*

(r_4) $H/pH \cong H_0/pH_0$;

(r_5) $\tau(H) = \sum\limits_{n<\omega} \tau(H_n)$;

(r_6) $|H| = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^*$;

(r_7) $H^{\sigma_n}/H^{\sigma_{n+1}} \cong H_n$, *где* $\sigma_n = \sum\limits_{i<n}\tau(H_i) \qquad (n \in W(\omega))$;

(r_8) *если все группы, принадлежащие последовательности (1), являются примарными, то и H является примарной группой.*

Доказательство. Так как последовательности (1) и (2) удовлетворяют условиям теоремы 9.1, то существует соответствующая этим последовательностям группа G, обладающая свойствами (e_1), (e_2), (e_3), (e_4), (e_5), (e_6), (e_7), (e_8), перечисленными в этой теореме.

Обозначим через G' полное расширение группы G (см. § 7). На основании теоремы 9.1 и предложения 7.8 заключаем, что имеет место следующее неравенство:

$$|(G'/G)[p]\,| \geqslant \mathfrak{m}_1. \tag{3}$$

Из условия (f_1^*) и свойства (e_5) группы G следует, что

$$|G| \leqslant \mathfrak{n} \leqslant |G| + \mathfrak{m}_1. \tag{4}$$

Так как по теореме 7.2 G является изотипной и плотной подгруппой группы G', то согласно предложению 3.39 факторгруппа G'/G является полной группой. Поэтому, принимая во внимание соотношения (3), (4) и условие (f_2^*), мы в силу предложения 2.37 можем утверждать, что существуют в группе G' подгруппы H и C со следующими свойствами:

(u_1) G является подгруппой группы C и факторгруппа C/G является полной примарной группой;

(u_2) факторгруппа H/C есть полная примарная группа, удовлетворяющая условию $|(H/C)[p]\,| = \mathfrak{m}^*$;

(u_3) $|C| = \mathfrak{n}$;

(u_4) факторгруппа H/G является полной примарной группой.

Докажем, что группы G, C, H и G' обладают следующими свойствами:

(u_5) G является изотипной и плотной подгруппой группы G';

(u_6) G является изотипной и плотной подгруппой группы H;

(u_7) C является изотипной и плотной подгруппой группы H.

Мы уже упоминали выше, что по теореме 7.2 G является изотипной и плотной подгруппой группы G', т.е. имеет место свойство (u_5). В силу предложения 3.45 из (u_4) и (u_5) следует свойство (u_6), а из (u_1) и (u_6) следует свойство (u_7). Отметим при этом, что G' является в силу теоремы 7.2 редуцированной группой, так как согласно (e_4) G является редуцированной группой. Следовательно, H, будучи подгруппой группы G', также будет редуцированной. Таким образом, свойство (r_1) доказано.

Свойство (r_2) совпадает с (u_7). Согласно (u_2) имеет место свойство (r_3).

Из (u_6) в силу предложения 3.47 следует, что

$$G/pG \cong H/pH. \tag{5}$$

С другой стороны, согласно свойству (e_7) группы G

$$G/pG \cong H_0/pH_0. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), получим соотношение (r_4).

Из (u_6) в силу предложения 3.42 следует, что $\tau(H) = \tau(G)$. С другой стороны, согласно (e_3) $\tau(G) = \sum\limits_{n<\omega} \tau(H_n)$. Следовательно, $\tau(H) = \sum\limits_{n<\omega} \tau(H_n)$, т.е. имеет место равенство (r_5).

Докажем, что имеет место равенство (r_6). В силу условия (f_1^*) $\mathfrak{n}$ является бесконечным кардинальным числом. Если $\mathfrak{m}^* = 1$, то в силу (u_2) $C = H$ и из (u_3) получаем

$$|H| = |C| = \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^*.$$

Если же $\mathfrak{m}^* > 1$, то из (u_2) в силу предложения 2.21 следует, что факторгруппа H/C имеет мощность, равную $\mathfrak{m}^* \cdot \aleph_0$. Если $\mathfrak{m}^*$ является конечным числом, то справедливо равенство

$$\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^* = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^* \cdot \aleph_0. \tag{7}$$

Равенство (7) верно и в том случае, когда $\mathfrak{m}^*$ является бесконечным кардинальным числом, так как тогда $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}^* \cdot \aleph_0$. Так как согласно (u_3) группа C имеет мощность $\mathfrak{n}$ и факторгруппа H/C имеет мощность $\mathfrak{m}^* \cdot \aleph_0$, то, очевидно, группа H имеет мощность, равную $\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^* \cdot \aleph_0$. Принимая во внимание (7), мы заключаем, что

$$|H| = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^*,$$

т.е. имеет место равенство (r_6).

Из (u_6) в силу 3.47 следует, что имеют место соотношения

$$H^{\sigma_n}/H^{\sigma_{n+1}} \cong G^{\sigma_n}/G^{\sigma_{n+1}} \qquad (n \in W(\omega)). \tag{8}$$

С другой стороны, согласно свойству (e_2) группы G имеют место соотношения

$$G^{\sigma_n}/G^{\sigma_{n+1}} \cong H_n \qquad (n \in W(\omega)). \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), получаем соотношение (r_7).

Предположим, что все группы, принадлежащие последовательности (1), являются примарными группами. Тогда по свойству (e_6) группа G будет примарной группой. Кроме того, согласно (u_4) факторгруппа H/G является примарной группой. Отсюда легко следует, что группа H также будет примарной группой. Таким образом, имеет место свойство (r_8).

Предложение 9.2 доказано.

9.3. *Пусть заданы ненулевое порядковое число N, меньшее или равное ω, и последовательность*

$$\{A_n\}_{n \in W(N)} \tag{1}$$

ненулевых обобщенных примарных (*относительно p*) *групп, удовлетворяющих следующим условиям*:

(b_1) *A_n является группой без элементов бесконечной высоты, $n \in W(N)$;*

(b_2) $$|(p^k A_n)[p]\,| \geqslant |A_{n+1}/pA_{n+1}| \qquad (n+1 \in W(N),\ k \in W(\omega)).$$

Пусть, далее, заданы кардинальные числа $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}^*$, удовлетворяющие условиям

(f_1) $$\sum_{n<N} |A_n| \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \prod_{n<N} |A_n|;$$

(f_2) $$\mathfrak{m}^* \leqslant |A_n|^{\aleph_0} \qquad (n < N),$$

причем если $\mathfrak{m}^*$ – конечное число, то оно является степенью p, и $\mathfrak{m}^* = 1$, если $N < \omega$.

Тогда существуют обобщенные примарные группы H и C (с тем же кольцом операторов, что и группы A_n) со следующими свойствами:

(r_1) *H есть редуцированная группа;*

(r_2) *C является изотипной и плотной подгруппой группы H, причем $C = H$, если $N < \omega$;*

(r_3) *факторгруппа H/C есть полная примарная группа, удовлетворяющая условию $|(H/C)[p]\,| = \mathfrak{m}^*$;*

(r_4) $H/pH \cong A_0/pA_0$;

(r_5) $\tau(H) = N$;

(r_6) $|H| = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^*$, *если* $N > 1$, *и* $|H| = \mathfrak{n}$, *если* $N = 1$;

(r_7) $H^n/H^{n+1} \cong A_n \qquad (n \in W(N))$;

(r_8) *если все группы, принадлежащие последовательности* (1), *являются примарными, то и H является примарной группой.*

Доказательство. Поскольку группы, принадлежащие последовательности (1), удовлетворяют условиям (b_1) и (b_2), мы на основании теоремы 4.27 заключаем, что в каждой группе A_n, $n < N$, существует подгруппа C_n со следующими свойствами:

(δ_1) $$|C_n[p]\,| = |A_n[p]\,| \qquad (n < N);$$

(δ_2) C_n является изотипной и плотной подгруппой группы A_n и факторгруппа A_n/C_n является полной примарной (относительно p) группой, $0 \leqslant n < N$; если $N < \omega$, то $C_{N-1} = A_{N-1}$;

(δ_3) $$|(A_n/C_n)[p]\,| = |A_{n+1}/pA_{n+1}| \qquad (n+1 < N).$$

Таким образом, мы ставим в соответствие последовательности (1) последовательность
$$\{C_n\}_{n\in W(N)}. \tag{2}$$

Обозначим через $P(C_i)$, $i < N$, обобщенную примарную группу (с тем же кольцом операторов, что и группа A_i), являющуюся минимальной полной для

C_i группой и содержащей C_i в качестве допустимой подгруппы (см. теорему 2.30). В силу свойства (d) предложения 2.28 имеет место соотношение

$$\big(P(C_{n+1})/C_{n+1}\big)[p] \cong C_{n+1}/pC_{n+1} \qquad (n+1<N). \tag{3}$$

Далее, на основании свойства (δ_3) и предложения 3.47 заключаем, что

$$(A_n/C_n)[p] \cong A_{n+1}/pA_{n+1} \cong C_{n+1}/pC_{n+1} \qquad (n+1<N). \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получим

$$(A_n/C_n)[p] \cong \big(P(C_{n+1})/C_{n+1}\big)[p] \qquad (n+1<N). \tag{5}$$

В силу свойства (b) предложения 2.28 факторгруппа $P(C_{n+1})/C_{n+1}$ является полной примарной (относительно p) группой. Кроме того, согласно свойству (δ_2) факторгруппа A_n/C_n также является полной примарной (относительно p) группой. Отсюда и из соотношения (5) в силу предложения 2.22 следует, что факторгруппы A_n/C_n и $P(C_{n+1})/C_{n+1}$ изоморфны,

$$A_n/C_n \cong P(C_{n+1})/C_{n+1} \qquad (n+1<N). \tag{6}$$

Легко видеть, что группы, принадлежащие последовательностям (1) и (2), обладают следующими свойствами:

(a_1) A_n является редуцированной группой без элементов бесконечной высоты, $n<N$, причем $\tau^*(A_n)=\omega$, когда $n+1<N$;

(a_2) C_n является изотипной и плотной подгруппой группы A_n, $n<N$, причем если $N<\omega$, то $C_{N-1}=A_{N-1}$;

(a_3) существует гомоморфизм φ_n группы $P(C_{n+1})$ на факторгруппу A_n/C_n с ядром C_{n+1}, $n+1\in W(N)$.

В самом деле, свойство (a_1) вытекает из условий (b_1) и (b_2); свойство (a_2) – из свойства (δ_2). Наконец, свойство (a_3) имеет место в силу соотношения (6).

Таким образом, последовательности (1) и (2) удовлетворяют условиям теоремы 9.1. Предполагая, что $N<\omega$, применим теорему 9.1 (заменяя при этом H_n через A_n и G через H). Согласно этой теореме существует соответствующая последовательностям (1) и (2) группа H, обладающая свойствами $(e_1), \ldots, (e_8)$. Положим $C=H$. Легко видеть, что группы H и C обладают свойствами (r_1), $(r_2), \ldots, (r_8)$, перечисленными в предложении 9.3. Действительно, свойства (r_2) и (r_3) имеют место, поскольку $C=H$. Свойства (r_1) и (r_4) следуют соответственно из свойств (e_4) и (e_7). Свойство (r_5) следует из свойства (e_3), так как согласно условию (b_1) $\tau(A_i)=1$, когда $i<N$, и, следовательно, $\sigma_n=\sum\limits_{i<n}\tau(A_i)=n$. Свойство (r_7) следует из свойства (e_2), поскольку $\sigma_n=n$. Свойство (r_8) следует из свойства (e_6). Покажем, наконец, что группа H обладает свойством (r_6). Согласно свойству (e_5)

$$|H| = \sum_{n<N}|A_n|. \tag{7}$$

Принимая во внимание, что A_n – ненулевая группа и выполняется условие (b_2), нетрудно видеть, что группа A_n является бесконечной при $n+1 < N$,

$$|A_n| \geqslant \aleph_0 \qquad (n+1 \in W(N)). \tag{8}$$

На основании условия (f_1) и соотношения (8) заключаем, что

$$\mathfrak{n} = \sum_{n<N} |A_n|. \tag{9}$$

Далее, согласно условию (f_2)

$$\mathfrak{m}^* = 1 \qquad (N < \omega). \tag{10}$$

Теперь на основании соотношений (7), (8), (9) и (10) заключаем, что группа H обладает свойством (r_6).

Таким образом, предложение 9.3 имеет место в том случае, когда $N < \omega$ (если $N = 1$, то достаточно положить $C = H = A_0$).

Рассмотрим случай, когда $N = \omega$.

Покажем, что заданные кардинальные числа $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}^*$, удовлетворяющие условиям (f_1) и (f_2), удовлетворяют также условиям (f_1^*) и (f_2^*) предложения 9.2. Кардинальное число $\mathfrak{m}_1$ определяется следующим равенством:

$$\mathfrak{m}_1 = \min_{n<\omega} \bigl\{ |C_n[p]\,|^{\aleph_0} \bigr\}. \tag{11}$$

В силу (δ_1) имеет место равенство

$$\mathfrak{m}_1 = \min_{n<\omega} \bigl\{ |A_n[p]\,|^{\aleph_0} \bigr\}. \tag{12}$$

Полагая в условии (b_2) $k = 0$, получим

$$|A_n[p]\,| \geqslant |A_{n+1}/pA_{n+1}| \qquad (n+1 \in W(N)). \tag{13}$$

Так как в силу условия (b_1) группа A_{n+1} является редуцированной, то согласно теореме 6.7 имеет место соотношение

$$|A_{n+1}/pA_{n+1}|^{\aleph_0} \geqslant |A_{n+1}|. \tag{14}$$

Из (13) и (14) легко следует, что

$$|A_n[p]\,|^{\aleph_0} \geqslant |A_{n+1}|^{\aleph_0} \qquad (n < \omega). \tag{15}$$

Сравнивая (12) и (15), получим равенство

$$\mathfrak{m}_1 = \min_{n<\omega} \bigl\{ |A_n|^{\aleph_0} \bigr\}. \tag{16}$$

Из (16) в силу условия (f_2) следует неравенство

$$\mathfrak{m}^* \leqslant \mathfrak{m}_1.$$

Таким образом, кардинальное число $\mathfrak{m}^*$ удовлетворяет условию (f_2^*) предложения 9.2.

Докажем, что имеет место неравенство

$$\prod_{n<\omega} |A_n| \leqslant \Big(\sum_{n<\omega} |A_n|\Big) + \mathfrak{m}_1. \tag{17}$$

Обозначим через k какое-либо число, для которого имеет место равенство

$$|A_k| = \min_{n<\omega}\{|A_n|\}. \tag{18}$$

Тогда, очевидно, имеют место соотношения

$$|A_k| \leqslant |A_n| \qquad (k \leqslant n < \omega). \tag{19}$$

Из (16) и (18) следует равенство

$$|A_k|^{\aleph_0} = \mathfrak{m}_1. \tag{20}$$

Далее, из (15) следует соотношение

$$|A_n|^{\aleph_0} \geqslant |A_{n+1}|^{\aleph_0} \qquad (n < \omega). \tag{21}$$

Из (19), (20) и (21) легко следует соотношение

$$\prod_{n\geqslant k} |A_n| = \mathfrak{m}_1. \tag{22}$$

Так как по условию группы A_n являются ненулевыми, то из условия (b_2) следует, что группы, принадлежащие последовательности (1), являются бесконечными группами. Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\prod_{n<\omega} |A_n| = \Big(\prod_{n<k} |A_n|\Big) + \Big(\prod_{n\geqslant k} |A_n|\Big), \tag{23}$$

$$\prod_{n<k} |A_n| \leqslant \sum_{n<\omega} |A_n|. \tag{24}$$

Сравнивая соотношения (22), (23) и (24), получим соотношение

$$\prod_{n<\omega} |A_n| \leqslant \Big(\sum_{n<\omega} |A_n|\Big) + \mathfrak{m}_1. \tag{25}$$

Из неравенства (25) и условия (f_1) следует, что

$$\sum_{n<\omega} |A_n| \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \Big(\sum_{n<\omega} |A_n|\Big) + \mathfrak{m}_1,$$

т.е. кардинальное число $\mathfrak{n}$ удовлетворяет условию (f_1^*) предложения 9.2. Таким образом, последовательности (1) и (2) и кардинальные числа $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}^*$ удовлетворяют всем условиям предложения 9.2.

Предполагая, что $N = \omega$, применим предложение 9.2 (заменяя при этом H_n через A_n). Согласно предложению 9.2 существуют обобщенные примарные группы H и C, обладающие свойствами (r_1), (r_1), ..., (r_8). Следует при этом отметить, что свойства (r_5) и (r_7) теперь можно записать в следующем виде:

$$(r_5) \qquad \tau(H) = N;$$

$$(r_7) \qquad H^n/H^{n+1} \cong A_n \qquad (n \in W(N)),$$

так как согласно условию (b_1) $\tau(A_n) = 1,\ n \in W(N)$, и $\sigma_n = n$.

Предложение 9.3 доказано.

§ 10. Решение проблемы о существовании групп с заданными ульмовскими факторами

10.1. Основная теорема. *Пусть заданы кардинальное число $\mathfrak{m}$, порядковое число $\tau > 0$ и последовательность*

$$\{A_\nu\}_{\nu \in W(\tau)} \tag{1}$$

ненулевых обобщенных примарных (относительно p) групп (с одним и тем же кольцом операторов), не содержащих элементов бесконечной высоты. Для того чтобы существовала редуцированная обобщенная примарная группа (с тем же кольцом операторов, что и группы A_ν), имеющая мощность $\mathfrak{m}$, тип τ и последовательность (1) в качестве последовательности ульмовских факторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$(s_1) \qquad \sum_{\nu<\tau} |A_\nu| \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \prod_{\substack{\nu<\omega \\ \nu<\tau}} |A_\nu|;$$

$$(s_2) \qquad |(p^n A_\nu)[p]\,| \geqslant |A_{\nu+1}/pA_{\nu+1}| \qquad (\nu+1 \in W(\tau),\ n \in W(\omega));$$

$$(s_3) \qquad |A_\nu|^{\aleph_0} \geqslant \sum_{\nu \leqslant \mu < \tau} |A_\mu| \qquad (\nu \in W(\tau)).$$

Доказательство. Необходимость условий была доказана в § 6, а именно, необходимость условий (s_1), (s_2), (s_3) следует соответственно из предложений 6.15, 6.13 и 6.16.

Докажем достаточность условий (s_1), (s_2) и (s_3). Обозначим через γ наименьшее порядковое число, удовлетворяющее условию

$$\omega\gamma \geqslant \tau. \tag{2}$$

Легко видеть, что $\omega\gamma$ равно τ тогда и только тогда, когда τ является предельным числом. Если τ – изолированное число, то γ также будет изолированным числом и существует только одно конечное порядковое число l, удовлетворяющее равенству

$$\tau = \omega(\gamma - 1) + l. \tag{3}$$

Каждому порядковому числу $\lambda,\ \lambda \in W(\gamma)$, поставим в соответствие

во-первых, кардинальное число $\mathfrak{m}_\lambda$, определяемое следующим образом:

$$\mathfrak{m}_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ – изолированное число и } \lambda + 1 = \gamma, \\ \displaystyle\sum_{\lambda<\alpha<\gamma} |A_{\omega\alpha}/pA_{\omega\alpha}|, & \text{если } \lambda + 1 \in W(\gamma); \end{cases} \tag{4}$$

во-вторых, последовательность

$$\{A_\nu\}_{\omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1),\,\nu<\tau} \qquad (\lambda\in W(\gamma)), \tag{5}$$

которая является частью последовательности (1);

в-третьих, кардинальное число $\mathfrak{n}_\lambda$, определяемое следующим образом:

$$\mathfrak{n}_\lambda = \begin{cases} \mathfrak{m}, & \text{если } \lambda = 0, \\ \sum\limits_{\substack{\omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1)\\ \nu<\tau}} |A_\nu|, & \text{если } 0<\lambda<\gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Легко видеть, что группы, принадлежащие последовательности (5), удовлетворяют условиям

(b_1) A_ν является обобщенной примарной группой без элементов бесконечной высоты, $\omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1)$, $\nu<\tau$;

(b_2) $|(p^nA_\nu)[p]\,|\geqslant|A_{\nu+1}/pA_{\nu+1}| \qquad (n\in W(\omega),\ \omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1),\ \nu+1<\tau)$

и кардинальные числа $\mathfrak{m}_\lambda$ и $\mathfrak{n}_\lambda$ удовлетворяют условиям

(f_1) $$\sum_{\substack{\omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1)\\ \nu<\tau}} |A_\nu| \ \leqslant\ \mathfrak{n}_\lambda\ \leqslant \prod_{\substack{\omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1)\\ \nu<\tau}} |A_\nu| \qquad (\lambda\in W(\gamma));$$

(f_2) $$\mathfrak{m}_\lambda\leqslant|A_\nu|^{\aleph_0} \qquad (\lambda\in W(\gamma),\ \omega\lambda\leqslant\nu<\omega(\lambda+1),\ \nu<\tau),$$

причем если $\mathfrak{m}_\lambda$ – конечное число, то оно является степенью простого числа p *, и $\mathfrak{m}_\lambda=1$, когда последовательность (5) является конечной.

Отметим, что последовательность (5) может быть конечной только в том случае, когда τ есть изолированное число и $\lambda=\gamma-1$.

Условие (b_1) выполняется согласно условию теоремы, (b_2) следует из условия (s_2), (f_1) – из (6) и условия (s_1). Докажем, что (f_2) следует из (4) и условия (s_3). В силу (4)

$$\mathfrak{m}_\lambda\leqslant\sum_{\lambda<\alpha<\gamma}|A_{\omega\alpha}|\leqslant\sum_{\omega(\lambda+1)\leqslant\mu<\tau}|A_\mu| \qquad (\lambda+1<\gamma).$$

Отсюда согласно (s_3) следует, что

$$\mathfrak{m}_\lambda\leqslant|A_{\omega(\lambda+1)}|^{\aleph_0} \qquad (\lambda+1<\gamma). \tag{7}$$

Но из (s_3) легко следует, что $|A_\nu|^{\aleph_0}\geqslant|A_\mu|^{\aleph_0}$ при $\nu\leqslant\mu$, следовательно,

$$|A_{\omega(\lambda+1)}|^{\aleph_0}\leqslant|A_\nu|^{\aleph_0} \quad \text{при } \nu<\omega(\lambda+1). \tag{8}$$

* Повторяя рассуждения из доказательства предложения 8.4, можно показать, что группа $A_{\omega\alpha}/pA_{\omega\alpha}$ бесконечна, когда $\omega\alpha+1<\tau$. – *Прим. ред.*

Сопоставляя (7) и (8), получим

$$\mathfrak{m}_\lambda \leqslant |A_\nu|^{\aleph_0} \qquad (\nu < \omega(\lambda+1),\ \nu < \tau),$$

т.е. условие (f_2) выполняется.

Таким образом, последовательность (5) и кардинальные числа $\mathfrak{m}_\lambda$, $\mathfrak{n}_\lambda$ удовлетворяют всем условиям предложения 9.3. Поэтому в силу предложения 9.3 существуют обобщенные примарные группы H_λ и C_λ (с тем же кольцом операторов, что и группы A_ν), соответствующие последовательности (5), со следующими свойствами:

(r_1) H_λ есть редуцированная группа;

(r_2) C_λ – изотипная и плотная подгруппа группы H_λ, причем $C_\lambda = H_\lambda$, если γ – изолированное число и $\lambda = \gamma - 1$;

(r_3) факторгруппа H_λ/C_λ есть полная примарная группа, удовлетворяющая условию $|(H_\lambda/C_\lambda)[p]\,| = \mathfrak{m}_\lambda$;

(r_4) $H_\lambda/pH_\lambda \cong A_{\omega\lambda}/pA_{\omega\lambda}$;

(r_5) $\tau(H_\lambda) = \begin{cases} l, & \text{если } \tau \text{ – изолированное число и } \lambda+1=\gamma, \\ \omega & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$

где l – число, определяемое равенством (3);

(r_6) $|H_\lambda| = \begin{cases} \mathfrak{n}_\lambda, & \text{если } \tau \text{ – изолированное число, } \lambda+1=\gamma \text{ и } l=1, \\ \mathfrak{n}_\lambda + \mathfrak{m}_\lambda & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$

(r_7) $H_\lambda^n/H_\lambda^{n+1} \cong A_{\omega\lambda+n} \qquad (\omega\lambda+n \in W(\tau),\ n \in W(\omega))$;

(r_8) если все группы, принадлежащие последовательности (5), являются примарными, то и H_λ является примарной группой.

Сопоставив таким образом каждому λ из $W(\gamma)$ группы H_λ и C_λ, мы получим последовательности

$$\{H_\lambda\}_{\lambda\in W(\gamma)}, \tag{9}$$

$$\{C_\lambda\}_{\lambda\in W(\gamma)} \tag{10}$$

обобщенных примарных групп (с тем же кольцом операторов, что и группы A_ν). При этом группы H_λ можно выбрать так, чтобы они не пересекались. Легко видеть, что группы H_λ и C_λ, принадлежащие последовательностям (9) и (10), обладают следующими свойствами:

(a_1) H_λ есть редуцированная группа, $\lambda \in W(\gamma)$, причем $\tau^*(H_\lambda)$ является предельным числом, когда $\lambda + 1 < \gamma$;

(a_2) C_λ – изотипная и плотная подгруппа группы H_λ, причем $C_\lambda = H_\lambda$, если γ – изолированное число и $\lambda = \gamma - 1$;

(a_3^*) H_λ/C_λ является полной примарной группой, удовлетворяющей условию

$$|(H_\lambda/C_\lambda)[p]\,| = \sum_{\lambda<\alpha<\gamma} |H_\alpha/pH_\alpha| \qquad (\lambda+1 \in W(\gamma)).$$

В самом деле, (a_1) имеет место в силу (r_1) и (r_5); (a_2) имеет место в силу (r_2). Покажем, что (a_3^*) следует из соотношений (4), (r_3) и (r_4). Из (4) и (r_4) следует, что

$$\mathfrak{m}_\lambda = \sum_{\lambda<\alpha<\gamma} |H_\alpha/pH_\alpha| \qquad (\lambda+1 \in W(\gamma)); \tag{11}$$

теперь (a_3^*) является следствием (r_3) и равенства (11).

Таким образом, последовательности (9) и (10) удовлетворяют всем условиям теоремы 8.5 **. Согласно этой теореме существует соответствующая последовательностям (9) и (10) обобщенная примарная группа G (с тем же кольцом операторов, что и группы A_ν), обладающая следующими свойствами:

(e_2) $G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}} \cong H_\lambda \qquad (\lambda \in W(\gamma),\ \sigma_0 = 0$ и $\sigma_\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} \tau(H_\alpha)$ при $\lambda > 0)$;

(e_3) $\tau(G) = \sum_{\lambda<\gamma} \tau(H_\lambda)$;

(e_4) G является редуцированной обобщенной примарной группой;

(e_5) $|G| = \sum_{\lambda<\gamma} |H_\lambda|$;

(e_6) если все группы, принадлежащие последовательности (9), являются примарными, то и G является примарной группой.

Докажем, что G является искомой группой. Согласно (e_4) G является редуцированной обобщенной примарной группой. Кроме того, из (e_3) и (r_5) легко следует равенство

$$\tau(G) = \tau,$$

т.е. G имеет тип τ.

Покажем, что $|G| = \mathfrak{m}$. Если $\tau = 1$, то $\gamma = 1$ и $|G| = |H_0| = \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{m}$; поэтому далее считаем, что $\tau > 1$ (тогда $|G| \geqslant |H_0| \geqslant \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{m} \geqslant |A_0| \geqslant \aleph_0$). Из ($e_5$) и ($r_6$) следует, что

$$|G| = \Big(\sum_{\lambda<\gamma} \mathfrak{n}_\lambda\Big) + \Big(\sum_{\lambda<\gamma} \mathfrak{m}_\lambda\Big). \tag{12}$$

Далее, из условия (s_1) следует, что мощность множества $W(\tau)$, а значит, и множества $W(\gamma)$ не больше, чем $\mathfrak{m}$. Из (4) и условия (s_1) следует, что

$$\mathfrak{m}_\lambda \leqslant \sum_{\nu<\tau} |A_\nu| \leqslant \mathfrak{m},$$

** Заметим, что теорема 8.5 справедлива и в ситуации $N = 1$: в этом случае достаточно положить $G = H_0$. – *Прим. ред.*

т.е.

$$\mathfrak{m}_\lambda \leqslant \mathfrak{m} \qquad (\lambda \in W(\gamma)). \tag{13}$$

Кроме того, из (6) и условия (s_1) следует, что

$$\mathfrak{n}_\lambda \leqslant \mathfrak{m} \qquad (\lambda \in W(\gamma)). \tag{14}$$

Но согласно (6) $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{m}$ и мощность множества $W(\gamma)$ не больше, чем $\mathfrak{m}$, а тогда из соотношений (12), (13) и (14) следует, что мощность группы G равна $\mathfrak{m}$.

Докажем, что последовательность (1) служит для группы G последовательностью ульмовских факторов, т.е. имеют место соотношения

$$G^\nu / G^{\nu+1} \cong A_\nu \qquad (\nu \in W(\tau)). \tag{15}$$

Заданному числу ν, $\nu \in W(\tau)$, соответствуют числа λ и n, удовлетворяющие равенству

$$\nu = \omega\lambda + n \qquad (\lambda < \gamma,\, n < \omega). \tag{16}$$

Так как $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_\lambda = \sum\limits_{\alpha<\lambda} \tau(H_\alpha)$, когда $0 < \lambda \leqslant \gamma$, то в силу (r_5)

$$\sigma_\lambda = \omega\lambda \qquad (\lambda \in W(\gamma)). \tag{17}$$

Сравнивая (16) и (17), получим

$$\nu = \sigma_\lambda + n. \tag{18}$$

В силу (e_2)

$$G^{\sigma_\lambda} / G^{\sigma_{\lambda+1}} \cong H_\lambda. \tag{19}$$

Обозначим через $\overline{G}$ группу $G^{\sigma_\lambda}/G^{\sigma_{\lambda+1}}$. В силу предложения 6.10 прообразами групп $\overline{G}^n$ и $\overline{G}^{n+1}$ при естественном гомоморфизме G^{σ_λ} на факторгруппу $\overline{G}$ являются соответственно группы $G^{\sigma_\lambda+n}$ и $G^{\sigma_\lambda+n+1}$; следовательно, по теореме о гомоморфизме $G^{\sigma_\lambda+n}/G^{\sigma_\lambda+n+1} \cong \overline{G}^n/\overline{G}^{n+1}$, или согласно (18)

$$G^\nu / G^{\nu+1} \cong \overline{G}^n / \overline{G}^{n+1}. \tag{20}$$

Но $\overline{G} \cong H_\lambda$, поэтому из (20) следует

$$G^\nu / G^{\nu+1} \cong H_\lambda^n / H_\lambda^{n+1}. \tag{21}$$

Согласно свойству (r_7) $H_\lambda^n / H_\lambda^{n+1} \cong A_{\omega\lambda+n}$, откуда в силу (16)

$$H_\lambda^n / H_\lambda^{n+1} \cong A_\nu. \tag{22}$$

Сравнивая (21) и (22), получаем соотношение (15). Таким образом, последовательность (1) служит для группы G последовательностью ульмовских факторов. Теорема доказана.

Если каждая группа, принадлежащая последовательности (1), является примарной, то в силу (r_8) и (e_6) группа G также будет примарной. Таким образом, доказана также следующая теорема:

10.2. Теорема. *Пусть заданы кардинальное число* $\mathfrak{m}$, *порядковое число* $\tau > 0$ *и последовательность*

$$\{A_\nu\}_{\nu \in W(\tau)} \tag{1}$$

ненулевых примарных (*относительно* p) *групп, не содержащих элементов бесконечной высоты. Для того чтобы существовала редуцированная примарная группа, имеющая мощность* $\mathfrak{m}$, *тип* τ *и последовательность* (1) *в качестве последовательности ульмовских факторов, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (s_1), (s_2) *и* (s_3), *перечисленные в теореме* 10.1.

Эта теорема содержит как частный случай теорему Ципина [19] о существовании счетной примарной группы с заданной «сигнатурой».

§ 11. Мощность множества всех неизоморфных дискретных абелевых групп данной бесконечной мощности. Мощность множества всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп данной бесконечной мощности

11.1. Теорема. *Мощность множества всех неизоморфных дискретных абелевых групп, имеющих заданную бесконечную мощность* $\mathfrak{m}$, *равна* $2^{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Пусть S есть прямая сумма $\mathfrak{m}$ бесконечных циклических групп. Известно, что всякая абелева группа мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ может быть получена как факторгруппа группы S. Но множество всех подгрупп группы S имеет мощность, не бóльшую, чем $2^{\mathfrak{m}}$. Следовательно, мощность множества всех неизоморфных дискретных абелевых групп, имеющих мощность $\leqslant \mathfrak{m}$, не больше, чем $2^{\mathfrak{m}}$.

Поэтому достаточно доказать, что множество всех неизоморфных абелевых групп, имеющих мощность $\mathfrak{m}$, имеет мощность, не меньшую, чем $2^{\mathfrak{m}}$.

Обозначим через τ наименьшее порядковое число, имеющее мощность $\mathfrak{m}$. Пусть B_i (i – любое натуральное число) есть группа мощности $\mathfrak{m}$, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп порядка p^i (p – какое-либо фиксированное простое число). Группы C и D определяем следующим образом:

$$C = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_{2i+1},$$

$$D = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_{2i}.$$

Таким образом, группа C разлагается в прямую сумму циклических подгрупп порядка p^{2i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, а группа D – в прямую сумму циклических подгрупп порядка p^{2i}, $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, группы C и D неизоморфны и каждая из них имеет мощность $\mathfrak{m}$.

Обозначим через M множество всех последовательностей вида

$$\{A_\lambda\}_{\lambda \in W(\tau)}, \tag{1}$$

где A_λ для всякого $\lambda \in W(\tau)$ есть группа, совпадающая либо с группой C, либо с группой D. Так как каждая такая последовательность согласно определению числа τ содержит $\mathfrak{m}$ групп и каждая из этих групп A_λ может принимать любое из двух возможных значений, то множество M имеет мощность $2^{\mathfrak{m}}$.

Легко видеть, что последовательность (1) удовлетворяет условиям теоремы 10.2. На основании теоремы 10.2 каждой последовательности вида (1), принадлежащей множеству M, поставим в соответствие редуцированную примарную группу, имеющую мощность $\mathfrak{m}$, тип τ и последовательность (1) в качестве последовательности ее ульмовских факторов. При этом различным последовательностям, принадлежащим множеству M, будут соответствовать неизоморфные примарные группы, так как у изоморфных групп должны совпадать последовательности ульмовских факторов. Следовательно, мощность множества всех неизоморфных примарных групп, имеющих заданную мощность $\mathfrak{m}$, не меньше, чем $2^{\mathfrak{m}}$. Этим теорема 11.1 доказана.

Теперь можно решить вопрос о мощности множества всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп, имеющих заданную мощность $\mathfrak{m}$.

При этом мы используем результат, принадлежащий Какутани [4]:

Если G есть бесконечная дискретная абелева группа и G^* – ее группа характеров, то $|G^*| = 2^{|G|}$.

Отсюда следует, что множество всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп, имеющих заданную бесконечную мощность $\mathfrak{m}$, будет непустым тогда и только тогда, когда найдется кардинальное число $\mathfrak{n}$ такое, что $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$.

11.2. Теорема. *Мощность множества всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп, имеющих мощность $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ – произвольное заданное бесконечное кардинальное число, равна $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Обозначим через M множество всех таких абелевых групп, для которых двойственные им группы имеют мощность $\mathfrak{m}$. Докажем, что мощность множества M равна $\mathfrak{m}$. Обозначим через $M(\mathfrak{q})$ множество всех неизоморфных дискретных абелевых групп, имеющих мощность, равную бесконечному кардинальному числу $\mathfrak{q}$. Согласно теореме 11.1 мощность этого множества равна $2^{\mathfrak{q}}$.

Из приведенной выше теоремы Какутани, очевидно, следует соотношение

$$M = \bigcup_{2^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}} M(\mathfrak{q}).$$

Легко видеть, что мощность множества $\bigcup\limits_{2^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}} M(\mathfrak{q})$ не больше, чем

$$\sum_{2^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}} 2^{\mathfrak{q}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Поэтому мощность множества M не больше, чем $\mathfrak{m}$. С другой стороны, мощность множества M не меньше, чем $\mathfrak{m}$, так как $M \supset M(\mathfrak{n})$ и мощность множества $M(\mathfrak{n})$ равна $2^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}$. Таким образом, мощность множества M равна $\mathfrak{m}$.

Обозначим через M^* множество всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп, имеющих заданную мощность $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$.

Согласно основной теореме теории характеров существует взаимно однозначное соответствие между группами из множества M и группами из множества M^*. Отсюда следует, что множества M и M^* имеют одинаковую мощность. Следовательно, мощность множества M^* равна $\mathfrak{m}$.

Теорема доказана.

§ 12. Полное описание одного класса обобщенных примарных групп

Основной целью этого параграфа является доказательство теоремы 12.12, дающей, подобно теореме Ульма, полное описание одного класса обобщенных примарных групп. Теорема Ульма является частным случаем этой теоремы.

Теорема Ульма утверждает, что последовательность ульмовских факторов счетной редуцированной примарной группы образует полную систему инвариантов этой группы.

Естественно возникает вопрос о справедливости аналогичной теоремы для несчетных примарных групп. В работе автора [7] было доказано, что этот вопрос имеет отрицательное решение. Именно, было доказано, что среди редуцированных примарных групп континуальной мощности существуют неизоморфные группы, у которых соответствующие ульмовские факторы изоморфны и разложимы в прямую сумму циклических подгрупп.

Решение этого вопроса непосредственно следует также из теоремы 10.2. Действительно, пусть A – счетная примарная группа, разлагающаяся в прямую сумму циклических подгрупп, порядки которых в совокупности не ограничены. Рассмотрим последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<\omega}$ примарных групп A_i, каждая из которых изоморфна группе A. Положим в теореме 10.2 $\tau = \omega$ и $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$. Легко видеть, что последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<\omega}$, порядковое число $\tau = \omega$ и кардинальное число $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ удовлетворяют условиям (s_1), (s_2), (s_3) этой теоремы. Поэтому согласно теореме 10.2 существует редуцированная примарная группа H, имеющая континуальную мощность, тип ω, $\tau(H) = \omega$, и последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<\omega}$ в качестве последовательности ульмовских факторов.

Далее, легко видеть, что последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<\omega}$, порядковое число $\tau = \omega$ и кардинальное число $\mathfrak{m}$, равное $\aleph_0$, также удовлетворяют условиям (s_1), (s_2), (s_3) теоремы 10.2. Поэтому согласно этой теореме существует счетная редуцированная примарная группа G, имеющая тип ω, $\tau(G) = \omega$, и последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<\omega}$ в качестве последовательности ульмовских факторов.

Таким образом, редуцированные примарные группы H и G имеют один и тот же тип, равный ω, и для каждой из них последовательность $\{A_i\}_{0\leqslant i<\omega}$ служит последовательностью ульмовских факторов. Следовательно, все ульмовские факторы групп H и G изоморфны группе A и потому разложимы в прямую сумму циклических подгрупп. И все же группы G и H неизоморфны, так как мощности их различны.

Пусть H – обобщенная примарная группа и x – ненулевой элемент группы. Будем говорить, что элемент x имеет в группе H *тип* $\tau(H)$, если $x \in H^{\tau(H)}$. Если же $x \notin H^{\tau(H)}$, то существует единственное порядковое число α такое, что $x \in H^{\alpha} \setminus H^{\alpha+1}$; в этом случае будем говорить, что элемент x имеет в группе H *тип* α.

Пусть E – некоторое подмножество обобщенной примарной группы H. Символом $M(E, H)$ будем обозначать множество порядковых чисел i, для которых имеет место соотношение

$$E \cap H^{i} \neq E \cap H^{i+1}.$$

Множество $M(E, H)$ может содержать только числа, меньшие, чем $\tau(H)$, так как $H^{i} = H^{i+1}$ при $i \geqslant \tau(H)$. Легко видеть, что порядковое число i, $i < \tau(H)$, тогда и только тогда принадлежит множеству $M(E, H)$, когда множество E содержит хотя бы один элемент, имеющий тип i в группе H.

12.1. Определение. Обобщенную примарную группу H будем называть *нормальной*, если для всякой ее (допустимой) подгруппы E, имеющей конечное число образующих относительно кольца операторов группы, множество $M(E, H)$ является конечным.

Так, например, любая примарная группа является нормальной, поскольку всякая ее подгруппа с конечным числом образующих будет конечной. Любая обобщенная примарная группа, имеющая конечный тип, также, очевидно, есть нормальная группа.

Выше было доказано, что существуют (редуцированные) примарные группы, для которых последовательность ульмовских факторов не является полной системой инвариантов. Поэтому естественно возникает задача об отыскании тех классов обобщенных примарных (редуцированных) групп, для которых последовательность ульмовских факторов образует полную систему инвариантов. Целью этого параграфа является доказательство теоремы 12.12, показывающей, что одним из таких классов является класс нормальных редуцированных обобщенных примарных групп, имеющих счетные системы образующих относительно кольца операторов группы и ульмовские факторы, разложимые в прямую сумму циклических подгрупп. Таким образом, достигается полное описание указанного класса обобщенных примарных групп. Этот класс содержит все счетные (редуцированные) примарные группы.

При этом следует отметить, что обобщенная примарная группа со счетным числом образующих будет счетной, если она является либо примарной, либо группой с кольцом операторов K_p. Если же обобщенная примарная группа со счетным числом образующих является группой с кольцом операторов Z_p (кольцо целых p-адических чисел) и содержит хотя бы один элемент бесконечного порядка, то она имеет мощность континуума.

Ниже даны доказательства вспомогательных предложений (12.4 – 12.10), необходимых для доказательства основной теоремы 12.12.

12.2. Определение. Пусть A – обобщенная примарная (относительно p) группа и x – ненулевой элемент этой группы. Будем говорить, что элемент x имеет *высоту* n в группе A, $n \geqslant 0$, если $x \in p^n A \setminus p^{n+1} A$.

Высоту элемента x в группе A будем обозначать символом $h(x,\, A)$.

12.3. Определение. Элемент z обобщенной примарной (относительно p) группы H будем называть *правильным* элементом этой группы, если выполняются следующие два условия:

(a) z является ненулевым элементом и имеет конечную высоту в H;

(b) если элемент $y \in H$ удовлетворяет равенству $p^n y = z$, где $n = h(z,\, H)$, то (допустимая) подгруппа $[y]$, порожденная элементом y, является прямым слагаемым группы H.

12.4. *Пусть H – обобщенная примарная (относительно p) группа, разложимая в прямую сумму циклических подгрупп, и c – ненулевой элемент этой группы. Тогда существует целое неотрицательное число m такое, что $p^m c$ является правильным элементом группы H.*

Доказательство. Пусть

$$H = \bigoplus_{i \in M} A_i \tag{1}$$

– какое-либо разложение группы H в прямую сумму циклических подгрупп; по условию такое разложение существует.

Обозначим через c_i компоненту элемента c в прямом слагаемом A_i разложения (1). Пусть $\{c_i\}_{i \in N}$ – множество компонент элемента c, имеющих тот же порядок, что и элемент c, и $\{c_i\}_{i \in L}$ – множество ненулевых компонент c_i, порядки которых меньше, чем порядок элемента c. Тогда, очевидно, элементы множества $\{c_i\}_{i \in L}$ имеют конечный порядок. В силу 1.3 каждый элемент конечного порядка обобщенной примарной по отношению к p группы имеет порядком степень простого числа p. Обозначим через p^m наибольший порядок элементов, принадлежащих множеству $\{c_i\}_{i \in L}$. Тогда, поскольку $c = \sum\limits_{i \in N \cup L} c_i$ и $p^m c_i = 0$ при $i \in L$, имеет место равенство

$$p^m c = \sum_{i \in N} p^m c_i. \tag{2}$$

Порядок элемента c больше, чем p^m. Поэтому $p^m c$ – ненулевой элемент. Так как элементы множества $\{c_i\}_{i \in N}$ имеют один и тот же порядок и принадлежат различным прямым слагаемым разложения (1), то элементы множества $\{p^m c_i\}_{i \in N}$ и элемент $p^m c$ имеют один и тот же порядок.

Положим

$$z = p^m c, \qquad z_i = p^m c_i \quad (i \in N).$$

Тогда элемент z и элементы z_i – ненулевые элементы, имеющие один и тот же порядок. При этом в силу (2)

$$z = \sum_{i \in N} z_i \qquad (z_i \in A_i).$$

Любой ненулевой элемент группы H имеет конечную высоту в H, так как по условию группа H разложима в прямую сумму циклических подгрупп. Обозначим через n высоту элемента z в H,

$$h(z,\, H) = n. \tag{3}$$

Поскольку $z = \sum\limits_{i \in N} z_i$ и элементы z_i принадлежат различным прямым слагаемым разложения (1), высота в H любого элемента множества $\{z_i\}_{i \in N}$ не меньше, чем n, причем существует в этом множестве хотя бы один элемент, например z_k, имеющий высоту, равную n,

$$h(z_k,\, H) = n. \tag{4}$$

Пусть y – элемент группы H, удовлетворяющий равенству

$$p^n y = z; \tag{5}$$

в силу (3) такой элемент существует. Докажем, что подгруппа $[y]$ является прямым слагаемым группы H. Этим будет доказано, что z является правильным элементом группы H.

Обозначим через y_k и z_k компоненты соответственно элементов y и z в прямом слагаемом A_k разложения (1). Тогда в силу (5)

$$p^n y_k = z_k. \tag{6}$$

Покажем, что (допустимая) подгруппа группы H, порожденная элементом y_k, совпадает с A_k, т.е.

$$A_k = [y_k]. \tag{7}$$

Действительно, если подгруппа $[y_k]$ отлична от A_k, то

$$[y_k] \subset pA_k,$$

поскольку $y_k \in A_k$ и pA_k – наибольшая подгруппа группы A_k, отличная от A_k. Следовательно, существует элемент $t \in A_k$ такой, что $pt = y_k$, откуда в силу (6) $p^{n+1}t = z_k$. Поэтому $h(z_k,\, H) > n$, что невозможно ввиду (4). Этим доказано, что имеет место соотношение (7).

Теперь, поскольку компонента элемента y в прямом слагаемом A_k разложения (1) равна y_k, мы на основании (1) и (8) заключаем, что

$$H = \Big[y,\, \bigoplus_{i \in M \setminus \{k\}} A_i \Big]. \tag{8}$$

Выше было показано, что элементы z и z_k имеют один и тот же порядок. Отсюда, принимая во внимание (5) и (6), заключаем, что y и y_k имеют один и тот же порядок.

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$[y] \cap \Bigg(\bigoplus_{i \in M \setminus \{k\}} A_i \Bigg) = \{0\}. \tag{9}$$

Действительно, компонента элемента y в прямом слагаемом A_k разложения (1) равна y_k. Следовательно, компонента любого элемента sy группы $[y]$, где s – элемент кольца операторов, равна sy_k. Отсюда, поскольку элементы y и y_k имеют один и тот же порядок, заключаем, что каждый ненулевой элемент группы $[y]$ имеет ненулевую компоненту в прямом слагаемом A_k разложения (1). Поэтому группы $[y]$ и $\bigoplus\limits_{i \in M \setminus \{k\}} A_i$ не имеют общих элементов, отличных от нулевого, т.е. имеет место равенство (9).

Теперь на основании (8) и (9) заключаем, что имеет место разложение

$$H = [y] \oplus \Bigg(\bigoplus_{i \in M \setminus \{k\}} A_i \Bigg),$$

т.е. подгруппа $[y]$ является прямым слагаемым группы H. Этим доказано, что элемент $z = p^m c$ есть правильный элемент группы H.

Итак, предложение 12.4 доказано.

12.5. Определение. Подгруппу (допустимую) A обобщенной примарной группы H будем называть *совершенной* подгруппой группы H, если для всякого порядкового числа $i < \tau(H)$ факторгруппа A_i, $A_i = [A \cap H^i,\, H^{i+1}]/H^{i+1}$, является прямым слагаемым факторгруппы H_i, $H_i = H^i/H^{i+1}$.

12.6. *Пусть H – нормальная редуцированная обобщенная примарная (относительно p) группа, ульмовские факторы которой разлагаются в прямые суммы (допустимых) циклических подгрупп. Пусть, далее, заданы совершенная подгруппа A группы H, имеющая конечное число образующих*[3], *и элемент $x \in H \setminus A$. Тогда существует элемент y со следующими свойствами:*

(г) *$y \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}$, где α – наибольшее порядковое число, входящее в множество $M([A,\, x] \setminus A,\ H)$;*

(д) $$A \cap [y] \subset H^{\alpha+1};$$

(е) $$[A,\, y] \cap H^{\alpha+1} = A \cap H^{\alpha+1};$$

(ж) $[A,\, y]$ *является совершенной подгруппой группы H;*

(з) $$[x] \cap A \subsetneqq [x] \cap [A,\, y].$$

[3] Относительно кольца операторов группы H.

Доказательство. 1°. Через α мы обозначили наибольшее порядковое число из множества $M([A,\, x] \setminus A,\ H)$. Такое число существует, поскольку согласно условию H – нормальная редуцированная обобщенная примарная группа и $[A,\, x]$ – ее подгруппа с конечным числом образующих. Из определения порядкового числа α следует, что множество $[A,\, x] \setminus A$ содержит хотя бы один элемент, имеющий в H тип α, и не содержит элементов, тип которых в H больше α, $\alpha < \tau(H)$. Таким образом, существует элемент u, удовлетворяющий соотношениям

$$u \in [A,\, x] \setminus A, \tag{1}$$
$$u \in H^{\alpha} \setminus H^{\alpha+1}. \tag{2}$$

Далее, поскольку множество $[A,\, x]\setminus A$ не содержит элементов, тип которых в H больше α, множество $([A,\, x] \cap H^{\alpha+1}) \setminus (A \cap H^{\alpha+1})$ является пустым. Следовательно, имеет место равенство

$$[A,\, x] \cap H^{\alpha+1} = A \cap H^{\alpha+1}. \tag{3}$$

2°. Положим

$$H_i = H^i/H^{i+1},$$
$$A_i = [A \cap H^i,\ H^{i+1}]/H^{i+1}.$$

По условию A является совершенной (см. определение 12.5) подгруппой группы H, следовательно, A_i является прямым слагаемым группы H_i. В частности, A_α является прямым слагаемым группы H_α,

$$H_\alpha = A_\alpha \oplus B. \tag{4}$$

3°. На основании равенства (4) заключаем, что найдется элемент $a \in A \cap H^\alpha$ такой, что

$$(u - a) + H^{\alpha+1} \in B.$$

Полагая

$$v = u - a, \qquad \bar{v} = v + H^{\alpha+1} \tag{5}$$

и принимая во внимание соотношения (1), (3), легко видеть, что $\bar{v}$ является ненулевым элементом группы B.

4°. Согласно условию группа H_α разложима в прямую сумму циклических подгрупп. Кроме того, $\bar{v}$ – ненулевой элемент группы H_α. Поэтому согласно предложению 12.4 существует целое неотрицательное число m такое, что $p^m\bar{v}$ является (ненулевым) правильным (см. определение 12.3) элементом группы H_α. Положим

$$w = p^m v, \qquad \overline{w} = p^m \bar{v}. \tag{6}$$

Поскольку $p^m\bar{v}$ – ненулевой элемент группы H_α и $w = p^m v$,

$$w \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}.$$

Отсюда, поскольку $\overline{w} = w + H^{\alpha+1}$, легко следует соотношение

$$h(\overline{w},\, H_\alpha) = h(w,\, H^\alpha). \tag{7}$$

5°. Элемент $\overline{w}$ имеет конечную высоту в H_α, поскольку он является правильным элементом группы H_α. Предположим, что

$$h(\overline{w},\, H_\alpha) = n. \tag{8}$$

Тогда в силу (7) $h(w,\, H^\alpha) = n$, и, значит, существует элемент s такой, что

$$p^n s = w, \qquad s \in H^\alpha. \tag{9}$$

На основании (4) заключаем, что существует элемент $a_1 \in A \cap H^\alpha$ такой, что

$$(s - a_1) + H^{\alpha+1} \in B. \tag{10}$$

Положим

$$y = s - a_1, \qquad \bar{y} = y + H^{\alpha+1}. \tag{11}$$

Тогда в силу (10)

$$\bar{y} \in B. \tag{12}$$

6°. В силу (9) и (11) $p^n y = w - p^n a_1$. Кроме того, $p^n a_1 \in A \cap H^\alpha$. Следовательно,

$$p^n \bar{y} - \overline{w} \in A_\alpha. \tag{13}$$

С другой стороны, $\overline{w} = p^m \bar{v} \in B$ и согласно (12) $\bar{y} \in B$. Поэтому

$$p^n \bar{y} - \overline{w} \in B. \tag{14}$$

На основании соотношений (4), (13), (14) заключаем, что $p^n \bar{y} - \overline{w}$ есть нулевой элемент группы H_α и, следовательно,

$$p^n \bar{y} = \overline{w}. \tag{15}$$

Элемент $\overline{w}$ является правильным и, следовательно, ненулевым элементом группы H_α. Кроме того, в силу (12) и (4) имеем $\bar{y} \in H_\alpha$. Отсюда, принимая во внимание (15), заключаем, что $\bar{y}$ является ненулевым элементом группы H_α, $H_\alpha = H^\alpha / H^{\alpha+1}$. Следовательно, имеет место соотношение

$$y \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}, \tag{16}$$

т.е. имеет место свойство (*г*).

7°. Элемент $\overline{w}$ является правильным в H_α и согласно (8) имеет в H_α высоту n. Кроме того, в силу (15) $p^n \bar{y} = \overline{w}$. Поэтому на основании определения 12.3 заключаем, что группа C,

$$C = [\bar{y}], \tag{17}$$

является прямым слагаемым группы H_α. Отсюда следует, что C является прямым слагаемым группы B,
$$B = C \oplus D, \tag{18}$$
поскольку в силу (12) $C \subset B$ и согласно (4) B – прямое слагаемое группы H_α. Соотношения (4) и (18) показывают, что имеет место прямое разложение
$$H_\alpha = A_\alpha \oplus C \oplus D. \tag{19}$$

8°. Положим
$$S = [A,\, y], \tag{20}$$
$$S_\alpha = [S \cap H^\alpha,\, H^{\alpha+1}]/H^{\alpha+1} \tag{21}$$
и покажем, что
$$S_\alpha = A_\alpha \oplus C, \tag{22}$$
где $A_\alpha = [A \cap H^\alpha,\, H^{\alpha+1}]/H^{\alpha+1}$. Из $y \in H^\alpha$ следует $[A,\, y] \cap H^\alpha = [A \cap H^\alpha,\, y]$, т.е.
$$S \cap H^\alpha = [A \cap H^\alpha,\, y]. \tag{23}$$
На основании (21) и (23) заключаем, что $S_\alpha \subset [A_\alpha,\, \bar{y}]$, откуда в силу (20) следует равенство
$$S_\alpha = [A_\alpha,\, \bar{y}]. \tag{24}$$
Но в силу (17) и (19)
$$[A_\alpha,\, \bar{y}] = A_\alpha \oplus C. \tag{25}$$
Теперь, сопоставляя (24) и (25), получим (22). Наконец, из (19) и (22) получим прямое разложение
$$H_\alpha = S_\alpha \oplus D. \tag{26}$$

9°. На основании (17) и (19) заключаем, что
$$[A_\alpha,\, \bar{y}] = A_\alpha \oplus [\bar{y}], \tag{27}$$
откуда, поскольку $A_\alpha = [A \cap H^\alpha,\, H^{\alpha+1}]/H^{\alpha+1}$, следует соотношение
$$(A \cap H^\alpha) \cap [y] \subset H^{\alpha+1}. \tag{28}$$
Но в силу (16) $[y] \subset H^\alpha$. Поэтому из (28) следует соотношение
$$A \cap [y] \subset H^{\alpha+1}, \tag{29}$$
т.е. имеет место свойство (∂).

10°. Докажем, что группа S есть совершенная подгруппа группы H, т.е. покажем, что группа S_i,
$$S_i = [S \cap H^i,\, H^{i+1}]/H^{i+1}, \tag{30}$$

является прямым слагаемым группы H_i для всякого $i < \tau(H)$. Имеет место соотношение

$$[S \cap H^i,\, H^{i+1}] = [A \cap H^i,\, H^{i+1}] \qquad (i \neq \alpha,\, i < \tau(H)). \tag{31}$$

Действительно, в случае $i < \alpha$ это соотношение следует из (16) и (20); если же $i > \alpha$, то соотношение (31) следует из свойства (*е*), доказательство которого приведено ниже в п. 12°. На основании (30) и (31) заключаем, что

$$S_i = A_i \qquad (i \neq \alpha,\, i < \tau(H)). \tag{32}$$

По условию A – совершенная подгруппа группы H, следовательно, A_i является прямым слагаемым группы H_i при всяком $i < \tau(H)$. Поэтому, принимая во внимание (26) и (32), заключаем, что S_i является прямым слагаемым группы H_i при всяком $i < \tau(H)$. Этим доказано, что S есть совершенная подгруппа группы H, т.е. имеет место свойство (*ж*).

11°. Докажем, что имеют место соотношения

$$p^n y \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}, \tag{33}$$

$$p^n y \in [A,\, x] \setminus A. \tag{34}$$

В силу (15) $p^n\bar{y} = \overline{w}$. Кроме того, $\overline{w}$ есть правильный и, значит, ненулевой элемент группы H_α, $H_\alpha = H^\alpha/H^{\alpha+1}$. Следовательно, $p^n\bar{y}$ является ненулевым элементом группы H_α и поэтому $p^n y \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}$, т.е. имеет место соотношение (33).

На основании соотношений (1), (5) и (6) заключаем, что

$$w \in [A,\, x]. \tag{35}$$

Далее, в силу (9) и (11)

$$p^n y = w - p^n a_1, \quad \text{где } a_1 \in A. \tag{36}$$

Из (35) и (36), очевидно, следует соотношение

$$p^n y \in [A,\, x]. \tag{37}$$

Легко убедиться в том, что $p^n y \notin A$. Действительно, в силу (33) $p^n y \in H^\alpha$. Кроме того, в силу (29) $A \cap [y] \subset H^{\alpha+1}$. Поэтому, если $p^n y \in A$, то

$$p^n y \in A \cap [y] \subset H^{\alpha+1},$$

что невозможно в силу (33). Следовательно,

$$p^n y \notin A. \tag{38}$$

Теперь, сопоставляя соотношения (37) и (38), получим соотношение (34).

12°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(e)\qquad [A,\, y] \cap H^{\alpha+1} = A \cap H^{\alpha+1}.$$

В силу (34)

$$[A,\, p^n y] \subset [A,\, x].$$

Отсюда и из соотношения (3) следует соотношение

$$[A,\, p^n y] \cap H^{\alpha+1} \subset A. \tag{39}$$

Покажем, что имеет место соотношение

$$[A,\, y] \cap H^{\alpha+1} \subset A. \tag{40}$$

Пусть d – какой-либо элемент пересечения $[A,\, y] \cap H^{\alpha+1}$; покажем, что $d \in A$. Элемент d можно представить в виде

$$d = a + ky,$$

где $a \in A$ и k – элемент кольца операторов группы H. В силу (16) $ky \in H^{\alpha}$. Отсюда, поскольку $a + ky \in H^{\alpha+1}$, следует, что $a \in H^{\alpha}$ и поэтому, полагая $\bar{a} = a + H^{\alpha+1}$, имеем

$$\bar{a} \in A_{\alpha}.$$

Кроме того, $\bar{a} + k\bar{y}$ является нулевым элементом группы H_{α}, $H_{\alpha} = H^{\alpha}/H^{\alpha+1}$, поскольку $a + ky \in H^{\alpha+1}$. Отсюда в силу (27) следует, что $\bar{a}$ и $k\bar{y}$ суть нулевые элементы группы H_{α} и поэтому

$$a \in H^{\alpha+1}, \tag{41}$$

$$ky \in H^{\alpha+1}. \tag{42}$$

Так как в силу (33) $p^n y \in H^{\alpha} \setminus H^{\alpha+1}$, элемент ky не может принадлежать группе $H^{\alpha+1}$, если k не делится на p^n. Но согласно (42) $ky \in H^{\alpha+1}$, следовательно, k делится на p^n и поэтому

$$ky \in [p^n y]. \tag{43}$$

На основании (42) и (43) заключаем, что

$$ky \in [A,\, p^n y] \cap H^{\alpha+1},$$

откуда в силу (39) получим $ky \in A$. Отсюда, поскольку $a \in A$ и $d = a + ky$, следует, что $d \in A$. Этим доказано, что имеет место соотношение (40). Из соотношения (40), очевидно, следует соотношение (e).

13°. Докажем, что имеет место соотношение

$$(з)\qquad [x] \cap A \subsetneqq [x] \cap [A,\, y].$$

В силу (34) элемент $p^n y$ можно представить в виде

$$p^n y = a + c, \quad \text{где } a \in A,\ c \in [x],$$

причем

$$c \in [x] \setminus A, \tag{44}$$

так как $p^n y \notin A$. Поскольку $c = p^n y - a$,

$$c \in [A,\, y]. \tag{45}$$

На основании (44) и (45) заключаем, что

$$c \notin [x] \cap A, \qquad c \in [x] \cap [A,\, y],$$

откуда следует соотношение (*з*).

Итак, предложение 12.6 доказано.

Будем говорить, что изоморфное отображение φ подгруппы обобщенной примарной группы H на подгруппу обобщенной примарной группы G сохраняет типы элементов, если для всякого элемента x из подгруппы группы H тип элемента $\varphi(x)$ в G равен типу элемента x в H.

12.7. *Пусть H и G – нормальные редуцированные обобщенные примарные группы (с одним и тем же кольцом операторов), удовлетворяющие следующим условиям:*

(*a*) $$\tau(H) = \tau(G);$$

(*b*) *для всякого $i < \tau(H)$ факторгруппы $H_i = H^i/H^{i+1}$ и $G_i = G^i/G^{i+1}$ изоморфны и разлагаются в прямые суммы (допустимых) циклических подгрупп.*

Пусть, далее, заданы группы A и V с конечным числом образующих[4], *являющиеся совершенными подгруппами соответственно групп H и G, операторный изоморфизм φ между ними, сохраняющий типы элементов, и элемент $x \in H \setminus A$. Тогда существуют элементы $y \in H$ и $z \in G$ со следующими свойствами:*

(*ж*) *$[A,\, y]$ является совершенной подгруппой группы H;*

(*и*) *$[V,\, z]$ является совершенной подгруппой группы G;*

(*к*) *между группами $[A,\, y]$ и $[V,\, z]$ существует операторный изоморфизм, сохраняющий типы и продолжающий изоморфизм φ;*

(*з*) $$[x] \cap A \subsetneqq [x] \cap [A,\, y].$$

Доказательство. 1°. По условию группа H, ее подгруппа A и элемент x удовлетворяют условиям предложения 12.6. Поэтому согласно 12.6 существует элемент y со следующими свойствами:

[4] Относительно кольца операторов групп H и G.

(*г*) $y \in H^{\alpha} \setminus H^{\alpha+1}$, где α – наибольшее порядковое число, входящее в множество $M([A,\, x] \setminus A,\ H)$;

(*д*) $$A \cap [y] \subset H^{\alpha+1};$$

(*е*) $$[A,\, y] \cap H^{\alpha+1} = A \cap H^{\alpha+1};$$

(*ж*) $[A,\, y]$ является совершенной подгруппой группы H;

(*з*) $$[x] \cap A \subsetneqq [x] \cap [A,\, y].$$

Обозначим через S подгруппу $[A,\, y]$ группы H,

$$S = [A,\, y]. \tag{1}$$

Положим, далее,

$$\begin{gathered} H_{\alpha} = H^{\alpha}/H^{\alpha+1}, \\ G_{\alpha} = G^{\alpha}/G^{\alpha+1}, \\ A_{\alpha} = [A \cap H^{\alpha},\, H^{\alpha+1}]/H^{\alpha+1}, \\ V_{\alpha} = [V \cap G^{\alpha},\, G^{\alpha+1}]/G^{\alpha+1}, \\ S_{\alpha} = [S \cap H^{\alpha},\, H^{\alpha+1}]/H^{\alpha+1}. \end{gathered}$$

По условию между группами A и V существует изоморфизм φ, сохраняющий типы; поэтому группы A_{α} и V_{α} изоморфны,

$$A_{\alpha} \cong V_{\alpha}. \tag{2}$$

Далее, поскольку $S = [A,\, y]$, мы на основании соотношений (*г*), (*д*) и (*е*) заключаем, что

$$S_{\alpha} = A_{\alpha} \oplus [\bar{y}], \quad \text{где } \bar{y} = y + H^{\alpha+1}. \tag{3}$$

2°. Согласно условию V – совершенная подгруппа группы G. Кроме того, по свойству (*ж*) группа $S = [A,\, y]$ является совершенной подгруппой группы H. Поэтому V_{α} и S_{α} суть прямые слагаемые соответственно групп G_{α} и H_{α},

$$G_{\alpha} = V_{\alpha} \oplus R, \tag{4}$$
$$H_{\alpha} = S_{\alpha} \oplus D. \tag{5}$$

Сопоставляя (3) и (5), получим

$$H_{\alpha} = A_{\alpha} \oplus [\bar{y}] \oplus D. \tag{6}$$

Согласно условию (b) группы H_{α} и G_{α} изоморфны. Кроме того, согласно условию (2) A_{α} и V_{α} также изоморфны. Поэтому на основании (4) и (6) заключаем [†], что $R \cong [\bar{y}] \oplus D$. Отсюда следует, что существует прямое разложение

$$R = C \oplus F, \tag{7}$$

[†] Здесь мы пользуемся тем фактом, что все подгруппы групп H_{α} и G_{α} можно разложить в прямую сумму циклических подгрупп, а подгруппы A_{α} и V_{α} – в прямую сумму конечного числа циклических подгрупп. – *Прим. ред.*

где C – (допустимая) циклическая группа, изоморфная группе $[\bar{y}]$,

$$C \cong [\bar{y}]. \tag{8}$$

Сопоставляя теперь (4) и (7), получим прямое разложение

$$G_\alpha = V_\alpha \oplus C \oplus F. \tag{9}$$

3°. В силу (8) и (9) C является циклической подгруппой группы G_α. Обозначим через $\bar{s}$ образующий элемент группы C,

$$C = [\bar{s}], \tag{10}$$

и через s – какой-либо элемент группы G^α, входящий в класс смежности $\bar{s}$,

$$\bar{s} = s + G^{\alpha+1}. \tag{11}$$

4°. Предположим, что элемент $\bar{y} \in H_\alpha$ имеет конечный порядок. Поскольку H_α – обобщенная примарная (относительно p) группа, порядком элемента $\bar{y}$ является степень простого числа p (см. предложение 1.3). Пусть p^m – порядок элемента $\bar{y}$. Докажем, что существует элемент $t \in G^\alpha$, удовлетворяющий соотношениям

$$G_\alpha = V_\alpha \oplus [\,\bar{t}\,] \oplus F, \quad \text{где } \bar{t} = t + G^{\alpha+1}; \tag{12}$$

$$p^m t = \varphi(p^m y). \tag{13}$$

Поскольку элемент $\bar{y} \in H_\alpha$ имеет порядок p^m и $\bar{y} = y + H^{\alpha+1}$, то $p^m y \in H^{\alpha+1}$. Отсюда следует соотношение

$$\varphi(p^m y) \in G^{\alpha+1}, \tag{14}$$

так как по условию изоморфизм φ сохраняет типы. Далее, принимая во внимание (8) и (10), заключаем, что элемент $\bar{s} \in G_\alpha$ имеет тот же порядок, что и элемент $\bar{y}$, т.е. порядок p^m. Поэтому

$$p^m s \in G^{\alpha+1}. \tag{15}$$

Положим

$$a = \varphi(p^m y) - p^m s. \tag{16}$$

Соотношения (14), (15) и (16) показывают, что

$$a \in G^{\alpha+1}. \tag{17}$$

Так как $V_\alpha \oplus C$ – группа с конечным числом образующих, ее максимальная периодическая подгруппа является конечной примарной группой. Поэтому существует натуральное число l такое, что порядок любого элемента из $V_\alpha \oplus C$, имеющего конечный порядок, не больше, чем p^l.

На основании (17) заключаем, что существует элемент b, удовлетворяющий условиям

$$b \in G^{\alpha}, \tag{18}$$

$$p^{m+l}b = a. \tag{19}$$

В силу (17) и (19) $p^{m+l}b \in G^{\alpha+1}$, следовательно, элемент $\bar{b} = b + G^{\alpha+1}$ является элементом конечного порядка группы G_{α}. Отсюда в силу (9) следует, что

$$\bar{b} = \bar{c} + \bar{d} \qquad (\bar{c} \in V_{\alpha} \oplus C,\ \bar{d} \in F), \tag{20}$$

причем $\bar{c}$ и $\bar{d}$ – элементы конечного порядка, так как $\bar{b}$ – элемент конечного порядка и $\bar{c}$, $\bar{d}$ – его компоненты в различных прямых слагаемых разложения (9). Так как $\bar{c}$ – элемент конечного порядка из $V_{\alpha} \oplus C$, его порядок не больше p^l. Отсюда и из (20) следует, что $p^l\bar{b} = p^l\bar{d} \in F$, т.е.

$$p^l\bar{b} \in F. \tag{21}$$

Определим элементы t и $\bar{t}$ при помощи равенств

$$t = s + p^l b, \qquad \bar{t} = t + G^{\alpha+1}. \tag{22}$$

Тогда, очевидно,

$$\bar{t} = \bar{s} + p^l\bar{b}. \tag{23}$$

Из (9), (21) и (23) следует, что порядок элемента $\bar{t}$ равен p^m, т.е. совпадает с порядками элементов $\bar{s}$ и $\bar{y}$. Это, в свою очередь, означает, что $[\,\bar{t}\,] \cap F = \{0\}$. Так как $C = [\bar{s}]$, мы на основании (21) и (23) заключаем, что в разложении (9) прямое слагаемое C можно заменить группой $[\,\bar{t}\,]$, т.е. имеет место прямое разложение (12). Кроме того, элемент t удовлетворяет соотношению (13). Действительно, в силу (19) и (22) $p^m t = p^m s + p^{m+l}b = p^m s + a$, откуда в силу (16) следует равенство (13).

5°. Определим элемент z при помощи соотношения

$$z = \begin{cases} s, & \text{если элемент } \bar{y} \in H_{\alpha} \text{ имеет бесконечный порядок;} \\ t, & \text{если элемент } \bar{y} \in H_{\alpha} \text{ имеет конечный порядок.} \end{cases} \tag{24}$$

Поскольку $\bar{s}$ и $\bar{t}$ – ненулевые элементы группы G_{α}, элемент $\bar{z} = z + G^{\alpha+1}$ также является ненулевым элементом группы $G_{\alpha} = G^{\alpha}/G^{\alpha+1}$. Отсюда следует соотношение

$$z \in G^{\alpha} \setminus G^{\alpha+1}. \tag{25}$$

Легко видеть, что имеет место прямое разложение

$$G_{\alpha} = V_{\alpha} \oplus [\bar{z}] \oplus F, \quad \text{где } \bar{z} = z + G^{\alpha+1}. \tag{26}$$

Действительно, если $z = s$, то соотношение (26) следует из (9) и (10). Если же $z = t$, то (26) имеет место в силу (12).

Если элемент $\bar{y} \in H_\alpha$ имеет конечный порядок, то его порядок совпадает с порядком элемента $\bar{t}$, т.е. $[\bar{z}] = [\,\bar{t}\,] \cong [\bar{y}]$. Если же $\bar{y}$ имеет бесконечный порядок, то $[\bar{z}] = [\bar{s}] = C \cong [\bar{y}]$. Мы заключаем, что подгруппы $[\bar{z}]$ и $[\bar{y}]$ соответственно групп G_α и H_α изоморфны,

$$[\bar{z}] \cong [\bar{y}]. \tag{27}$$

Далее, на основании (26) заключаем, что

$$V \cap [z] \subset G^{\alpha+1}. \tag{28}$$

Если элемент $\bar{y} \in H_\alpha$ имеет конечный порядок, то $z = t$ и поэтому соотношение (13) можно записать в виде

$$p^m z = \varphi(p^m y). \tag{29}$$

6°. Если элемент $\bar{y} \in H_\alpha$ имеет бесконечный порядок, то имеют место равенства

$$[A,\, y] = A \oplus [y], \tag{30}$$

$$[V,\, z] = V \oplus [z]. \tag{31}$$

Покажем, что имеет место соотношение (30). Для этого, очевидно, достаточно показать, что $A \cap [y] = \{0\}$. Допустим, что пересечение $A \cap [y]$ является ненулевой подгруппой группы $[y]$. Тогда существует натуральное число n такое, что $p^n y \in A \cap [y]$. Отсюда, поскольку имеет место соотношение

$$(\partial) \qquad A \cap [y] \subset H^{\alpha+1},$$

следует, что $p^n y \in H^{\alpha+1}$, т.е. элемент $\bar{y} = y + H^{\alpha+1}$ имеет конечный порядок в группе H_α, что невозможно по предположению. Следовательно, $A \cap [y] = \{0\}$ и поэтому имеет место соотношение (30).

Если $\bar{y}$ – элемент бесконечного порядка, то в силу (27) $\bar{z}$ также будет элементом бесконечного порядка группы G_α. Поэтому, принимая во внимание (28) и рассуждая так же, как и при доказательстве равенства (30), убеждаемся в справедливости равенства (31).

7°. Определим отображение ψ группы $[A,\, y]$ на группу $[V,\, z]$, предполагая, что элемент $\bar{y}$ имеет бесконечный порядок.

Обозначим через ψ отображение группы $[A,\, y]$ на группу $[V,\, z]$, определяемое равенством

$$\psi(a + ky) = \varphi(a) + kz \qquad (a \in A),$$

где k – произвольный элемент кольца операторов групп H и G. По условию φ – операторное изоморфное отображение группы A на группу V. Поэтому, принимая во внимание соотношения (30), (31) и (27), нетрудно видеть, что ψ является операторным изоморфным отображением группы $[A,\, y]$ на группу $[V,\, z]$, продолжающим отображение φ.

8°. Определим отображение ψ группы $[A,\, y]$ на группу $[V,\, z]$, предполагая, что элемент $\bar{y}$ имеет конечный порядок.

Обозначим через p^m порядок элемента $\bar{y} \in H_\alpha$. Тогда имеют место соотношения $p^m y \in H^{\alpha+1}$, $p^{m-1} y \notin H^{\alpha+1}$. Поэтому всякий элемент из $[A,\, y]$ можно единственным образом представить в виде

$$a + ny,$$

где $a \in A$ и $0 \leqslant n < p^m$, n – целое рациональное число.

В силу (27) $[\bar{z}] \cong [\bar{y}]$ и поэтому элемент $\bar{z}$ группы G_α имеет порядок p^m. Поэтому всякий элемент из $[V,\, z]$ можно представить [††], и притом единственным образом, в виде

$$b + nz,$$

где $b \in V$ и $0 \leqslant n < p^m$.

Обозначим через ψ отображение группы $[A,\, y]$ на группу $[V,\, z]$, определяемое равенством

$$\psi(a + ny) = \varphi(a) + nz \qquad (0 \leqslant n < p^m,\ n \text{ – целое рациональное}).$$

Очевидно, отображение ψ является продолжением отображения φ.

Докажем, что для любого k, принадлежащего кольцу операторов групп G и H, имеет место равенство

$$\psi(a + ky) = \varphi(a) + kz. \tag{32}$$

Кольцом операторов групп G и H является либо кольцо K_p, либо кольцо Z_p. Поэтому число k как элемент кольца K_p или Z_p можно представить в виде

$$k = n + k_1 p^m,$$

где k_1 – элемент кольца операторов и n – целое рациональное число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant n < p^m$. Следовательно, $a + ky = (a + k_1 p^m y) + ny$, причем $a + k_1 p^m y \in A$, поскольку $p^m y \in H^{\alpha+1}$ и, значит, в силу (e) $p^m y \in A$. Отсюда согласно определению отображения ψ следует, что

$$\psi(a + ky) = \varphi(a + k_1 p^m y) + nz. \tag{33}$$

Далее, поскольку по условию φ – операторный изоморфизм и согласно равенству (29) $\varphi(p^m y) = p^m z$, то $\varphi(a + k_1 p^m y) = \varphi(a) + k_1 \varphi(p^m y) = \varphi(a) + k_1 p^m z$. Отсюда и из (33) следует, что

$$\psi(a + ky) = \varphi(a) + k_1 p^m z + nz = \varphi(a) + (n + k_1 p^m) z = \varphi(a) + kz,$$

т.е. имеет место соотношение (32).

[††] Возможность такого представления следует из условия $p^m z = \varphi(p^m y) \in V$. – *Прим. ред.*

Непосредственная проверка показывает, что ψ является изоморфным отображением группы $[A, y]$ на группу $[V, z]$. Действительно, если $h = a + ky$ и $h_1 = a_1 + k_1 y$ – два произвольных элемента группы $[A, y]$, то на основании (32) заключаем, что

$$\psi(h + h_1) = \psi(a + a_1 + (k + k_1)y) = \varphi(a + a_1) + (k + k_1)z = \\ = \varphi(a) + \varphi(a_1) + kz + k_1 z = (\varphi(a) + kz) + (\varphi(a_1) + k_1 z) = \psi(h) + \psi(h_1),$$

т.е.

$$\psi(h + h_1) = \psi(h) + \psi(h_1).$$

Легко убедиться в том, что ψ является операторным изоморфным отображением группы $[A, y]$ на группу $[V, z]$. Действительно, пусть $h = a + ky$ – некоторый элемент группы $[A, y]$ и k_1 – произвольный элемент кольца операторов групп H и G. Тогда, принимая во внимание (32), заключаем, что

$$\psi(k_1 h) = \psi(k_1 a + k_1 k y) = \varphi(k_1 a) + k_1 k z.$$

Отсюда, поскольку φ – операторный изоморфизм, получим

$$\psi(k_1 h) = k_1 \varphi(a) + k_1(kz) = k_1(\varphi(a) + kz) = k_1 \cdot \psi(h),$$

т.е.

$$\psi(k_1 h) = k_1 \cdot \psi(h).$$

Этим доказано, что ψ является операторным изоморфным отображением группы $[A, y]$ на группу $[V, z]$.

9°. Докажем, что отображение ψ сохраняет типы элементов. Поскольку по условию H и G – редуцированные группы и $\tau(H) = \tau(G)$, достаточно показать, что для всякого элемента $h \in [A, y]$ из соотношения $h \in H^{\lambda} \setminus H^{\lambda+1},\ \lambda < \tau(H)$, всегда следует соотношение $\psi(h) \in G^{\lambda} \setminus G^{\lambda+1}$.

Пусть h – произвольный элемент группы $[A, y]$, его можно представить в виде $h = a + ky$, где $a \in A$ и k – элемент кольца операторов групп H и G.

Возможны следующие три случая.

1-й случай:

$$a + ky \in H^{\lambda} \setminus H^{\lambda+1}, \qquad \lambda < \alpha.$$

Так как согласно свойству (г) $y \in H^{\alpha}$ и, значит, $ky \in H^{\alpha}$, этот случай возможен тогда и только тогда, когда

$$a \in H^{\lambda} \setminus H^{\lambda+1}.$$

Следовательно,

$$\varphi(a) \in G^{\lambda} \setminus G^{\lambda+1}, \tag{34}$$

поскольку по условию доказываемого предложения φ есть отображение, сохраняющее типы. Кроме того, в силу (25)

$$kz \in G^{\alpha}. \tag{35}$$

Но поскольку $G^\alpha \subset G^\lambda$ при $\lambda < \alpha$, из соотношений (34) и (35) следует соотношение

$$\varphi(a) + kz \in G^\lambda \setminus G^{\lambda+1},$$

откуда получим

$$\psi(a + ky) \in G^\lambda \setminus G^{\lambda+1}.$$

2-й случай:

$$a + ky \in H^\lambda \setminus H^{\lambda+1}, \qquad \alpha < \lambda < \tau(H).$$

В этом случае $a + ky \in [A,\, y] \cap H^{\alpha+1}$. Но по свойству (*е*) $[A,\, y] \cap H^{\alpha+1} \subset A$. Следовательно, $a + ky \in A$ и поэтому $\psi(a + ky) = \varphi(a + ky)$. Отсюда, учитывая, что φ есть отображение, сохраняющее типы, следует соотношение

$$\psi(a + ky) \in G^\lambda \setminus G^{\lambda+1}.$$

3-й случай:

$$a + ky \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}.$$

В силу (*г*) $ky \in H^\alpha$. Поэтому этот случай возможен только тогда, когда $a \in H^\alpha$. Возможны два подслучая.

1-й подслучай:

$$a \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}.$$

Тогда

$$\varphi(a) \in G^\alpha \setminus G^{\alpha+1},$$

поскольку φ сохраняет типы. Следовательно, элемент $\bar{c}$, $\bar{c} = \varphi(a) + G^{\alpha+1}$, является ненулевым элементом группы V_α. Отсюда в силу (26) следует, что $\bar{c} + k\bar{z}$ есть ненулевой элемент группы G_α. Поэтому

$$\varphi(a) + kz \in G^\alpha \setminus G^{\alpha+1},$$

и, следовательно,

$$\psi(a + ky) \in G^\alpha \setminus G^{\alpha+1}.$$

2-й подслучай:

$$a \in H^{\alpha+1}.$$

При этом, поскольку $a + ky \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}$ и $ky \in H^\alpha$, имеет место соотношение

$$ky \in H^\alpha \setminus H^{\alpha+1}.$$

Поэтому $k\bar{y}$ является ненулевым элементом группы H_α. Отсюда, принимая во внимание (25) и (27), заключаем, что $k\bar{z}$ является ненулевым элементом группы G_α, т.е.

$$kz \in G^\alpha \setminus G^{\alpha+1}. \tag{36}$$

Кроме того,

$$\varphi(a) \in G^{\alpha+1}, \tag{37}$$

поскольку $a \in H^{\alpha+1}$ и по условию изоморфизм φ сохраняет типы. На основании (36) и (37) заключаем, что

$$\varphi(a) + kz \in G^{\alpha} \setminus G^{\alpha+1},$$

откуда, поскольку $\psi(a + ky) = \varphi(a) + kz$, имеем

$$\psi(a + ky) \in G^{\alpha} \setminus G^{\alpha+1}.$$

Итак, доказано, что отображение ψ сохраняет типы элементов.

Таким образом, полностью доказано, что ψ является искомым операторным изоморфным отображением группы $[A,\, y]$ на группу $[V,\, z]$, сохраняющим типы и продолжающим изоморфизм φ. Этим доказано, что имеет место свойство ($\varkappa$).

10°. Докажем, что имеет место соотношение

$$[V,\, z] \cap G^{\alpha+1} \subset V. \tag{38}$$

Пусть u – какой-либо элемент пересечения $[V,\, z] \cap G^{\alpha+1}$, покажем, что $u \in V$. Обозначим через d элемент группы $[A,\, y]$, являющийся прообразом элемента u при отображении ψ,

$$\psi(d) = u. \tag{39}$$

Так как $u \in G^{\alpha+1}$ и отображение ψ сохраняет типы, $d \in H^{\alpha+1}$. Таким образом,

$$d \in [A,\, y] \cap H^{\alpha+1}.$$

Но в силу соотношения (e) $[A,\, y] \cap H^{\alpha+1} \subset A$ и поэтому

$$d \in A.$$

Кроме того, $\psi(A) = V$, так как ψ продолжает изоморфизм φ. Следовательно,

$$\psi(d) \in V. \tag{40}$$

Сопоставляя (39) и (40), получим

$$u \in V.$$

Этим доказано, что имеет место соотношение (38). На основании (38) заключаем, что

$$[V,\, z] \cap G^{i} \subset V \qquad (i > \alpha),$$

откуда, очевидно, следует соотношение

$$[V,\, z] \cap G^{i} = V \cap G^{i} \qquad (i > \alpha). \tag{41}$$

11°. Докажем, что группа $T = [V,\, z]$ есть совершенная подгруппа группы G. Для этого согласно определению 12.5 надо показать, что группа T_i,

$$T_i = [T \cap G^{i},\, G^{i+1}]/G^{i+1}, \tag{42}$$

является прямым слагаемым группы G_i, $G_i = G^i/G^{i+1}$, при всяком $i < \tau(G)$. Принимая во внимание соотношения (25), (26) и (42), нетрудно видеть, что $T_\alpha = V_\alpha \oplus [\bar{z}]$. Поэтому соотношение (26) можно записать в виде

$$G_\alpha = T_\alpha \oplus F. \tag{43}$$

Далее, из (41) и (42) следует, что $T_i = V_i$ при $i > \alpha$. Кроме того, на основании (25) заключаем, что $T_i = V_i$ при $i < \alpha$. Таким образом,

$$T_i = V_i \qquad (i \neq \alpha,\, i < \tau(G)). \tag{44}$$

Но по условию V – совершенная подгруппа группы G и поэтому V_i является прямым слагаемым группы G_i при всяком $i < \tau(G)$. Отсюда, принимая во внимание (43) и (44), заключаем, что T_i является прямым слагаемым группы G_i при всяком $i < \tau(G)$. Следовательно, группа T является совершенной подгруппой группы G, т.е. имеет место свойство (u).

Итак, предложение 12.7 доказано.

12.8. *Пусть H и G – нормальные редуцированные обобщенные примарные группы (с одним и тем же кольцом операторов), удовлетворяющие условиям (a) и (b) предложения* 12.7. *Пусть, далее, заданы группы A и V с конечным числом образующих*[5], *являющиеся совершенными подгруппами соответственно групп H и G, операторный изоморфизм φ между ними, сохраняющий типы элементов, и элемент $x \in H \setminus A$. Тогда существуют группы C и D со следующими свойствами:*

(α) *C является совершенной подгруппой группы H, имеет конечное число образующих и содержит подгруппу A и элемент x;*

(β) *D является совершенной подгруппой группы G, имеет конечное число образующих и содержит подгруппу V;*

(γ) *между группами C и D существует операторный изоморфизм, сохраняющий типы и продолжающий изоморфизм φ.*

Доказательство. Рассмотрим процесс построения последовательностей

$$A = A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_i,\ \ldots, \tag{1}$$
$$V = V_0,\ V_1,\ \ldots,\ V_i,\ \ldots, \tag{2}$$

члены которых обладают следующими свойствами:

(a_i) A_i является совершенной подгруппой группы H, имеет конечное число образующих и содержит подгруппу A_{i-1}, $i > 0$;

(b_i) V_i является совершенной подгруппой группы G, имеет конечное число образующих и содержит подгруппу V_{i-1}, $i > 0$;

[5] Относительно кольца операторов групп H и G.

(c_i) между группами A_i и V_i существует операторный изоморфизм φ_i, сохраняющий типы и продолжающий изоморфизм φ_{i-1}, причем $\varphi_0 = \varphi$;

(d_i) $$[x] \cap A_{i-1} \subsetneqq [x] \cap A_i \qquad (i > 0).$$

По условию группы $A_0 = A$ и $V_0 = V$, изоморфизм φ и элемент x удовлетворяют всем условиям предложения 12.7. Тогда на основании предложения 12.7 заключаем, что существуют группы A_1, V_1 и изоморфизм φ_1 со свойствами (a_1) – (d_1). Если $x \in A_1$, то будем считать, что процесс построения последовательностей (1) и (2) закончен. Если же $x \notin A_1$, то, принимая во внимание, что группы A_1, V_1 обладают свойствами (a_1) – (d_1), мы на основании предложения 12.7 заключаем, что существуют группы A_2, V_2 со свойствами (a_2) – (d_2). Далее, если $x \in A_2$, то процесс построения последовательностей (1) и (2) будем считать законченным. Если же $x \notin A_2$, то этот процесс считаем незаконченным и продолжаем его дальше. Нетрудно видеть, что этот процесс закончится через конечное число шагов. Действительно, в противном случае существовали бы бесконечные последовательности (1) и (2), члены которых A_i, V_i для всякого натурального числа i обладали бы свойствами (a_i) – (d_i). Следовательно, в силу свойств (d_i) существовала бы бесконечная возрастающая последовательность

$$[x] \cap A_0 \subsetneqq [x] \cap A_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq [x] \cap A_i \subsetneqq \ldots$$

допустимых подгрупп группы $[x]$, что невозможно, поскольку $[x]$ – циклическая группа.

Таким образом, процесс построения последовательностей (1) и (2) заканчивается через конечное число шагов, т.е. через конечное число шагов мы придем к последовательностям

$$\begin{gathered} A_0, \ A_1, \ \ldots, A_n, \\ V_0, \ V_1, \ \ldots, V_n, \end{gathered}$$

члены которых A_i, V_i для всякого $i \leqslant n$ обладают свойствами (a_i) – (d_i), и, сверх того, имеет место соотношение

$$x \in A_n. \tag{3}$$

Теперь, полагая $C = A_n$ и $D = V_n$ и принимая во внимание, что группы A_n, V_n обладают свойствами (a_n), (b_n), (c_n) и имеет место соотношение (3), мы видим, что группы C и D обладают свойствами (α), (β) и (γ).

Таким образом, предложение 12.8 доказано.

Следующее предложение будет впоследствии использовано при доказательстве теоремы 12.12.

12.9. *Любая изотипная* (см. определение 3.4) *подгруппа нормальной обобщенной примарной группы также является нормальной обобщенной примарной группой. В частности, подгруппа* (*допустимая*) *нормальной обобщенной примарной группы, являющаяся прямым слагаемым этой группы, есть также нормальная обобщенная примарная группа.*

Доказательство. 1°. Пусть A – изотипная подгруппа нормальной обобщенной примарной группы H. Докажем, что A является нормальной группой. Пусть E – произвольная (допустимая) подгруппа группы A, имеющая конечное число образующих. Покажем, что

$$M(E,\, A) \subset M(E,\, H). \tag{1}$$

Пусть i – порядковое число, не принадлежащее множеству $M(E,\, H)$. Тогда $E \cap H^i = E \cap H^{i+1}$, откуда

$$E \cap (H^i \cap A) = E \cap (H^{i+1} \cap A). \tag{2}$$

По условию A – изотипная подгруппа группы H, поэтому

$$H^i \cap A = A^i, \qquad H^{i+1} \cap A = A^{i+1}. \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3), получим равенство $E \cap A^i = E \cap A^{i+1}$, которое показывает, что число i не принадлежит множеству $M(E,\, A)$. Этим доказано, что имеет место соотношение (1).

По условию H – нормальная обобщенная примарная группа и поэтому множество $M(E,\, H)$ является конечным. Отсюда в силу (1) следует, что множество $M(E,\, A)$ также является конечным. Этим доказано, что A является нормальной обобщенной примарной группой.

2°. Согласно предложению 3.23 подгруппа (допустимая) обобщенной примарной группы, являющаяся ее прямым слагаемым, есть изотипная подгруппа этой группы. Поэтому, принимая во внимание утверждение, доказанное в п. 1°, мы заключаем, что любое прямое слагаемое (являющееся допустимой подгруппой) нормальной обобщенной примарной группы также является нормальной обобщенной примарной группой.

12.10. *Пусть H и G – обобщенные примарные группы (с одним и тем же кольцом операторов) и φ – изоморфное отображение группы H на группу G. Тогда группы H, G и изоморфизм φ обладают следующими свойствами:*

(*a*) *для всякого порядкового числа i образом подгруппы H^i группы H при изоморфизме φ является подгруппа G^i группы G; при этом если φ – операторное изоморфное отображение, то оно индуцирует операторное изоморфное отображение H^i на G^i;*

(*b*) $$\tau(H) = \tau(G);$$

(*c*) *для всякого порядкового числа i факторгруппы H^i/H^{i+1} и G^i/G^{i+1} изоморфны, причем они операторно изоморфны, если φ – операторное изоморфное отображение.*

Доказательство. 1°. Докажем, что имеет место свойство (*a*). Покажем, что для всякого порядкового числа i имеет место равенство

$$\varphi(H^i) = G^i. \tag{1}$$

Очевидно, $\varphi(H^0) = G^0$, поскольку $H^0 = H$ и $G^0 = G$. Предположим, что соотношение $\varphi(H^\alpha) = G^\alpha$ имеет место всякий раз, когда $\alpha < i$, где i – порядковое число, отличное от нуля, и докажем, что тогда имеет место равенство $\varphi(H^i) = G^i$.

1-й случай: i – изолированное число. Пусть n – произвольное натуральное число; покажем, что

$$\varphi(p^n H^{i-1}) = p^n G^{i-1}. \tag{2}$$

Пусть $a \in p^n H^{i-1}$. Тогда существует элемент $b \in H^{i-1}$ такой, что $p^n b = a$. Следовательно, $\varphi(a) = p^n \varphi(b)$. Но $\varphi(b) \in G^{i-1}$, так как $b \in H^{i-1}$ и по индуктивному предположению $\varphi(H^{i-1}) = G^{i-1}$. Следовательно, $p^n\varphi(b) \in p^n G^{i-1}$, т.е. $\varphi(a) \in p^n G^{i-1}$. Этим доказано, что

$$\varphi(p^n H^{i-1}) \subset p^n G^{i-1}. \tag{3}$$

Покажем, что при отображении φ прообраз любого элемента из $p^n G^{i-1}$ содержится в $p^n H^{i-1}$. Пусть $c \in p^n G^{i-1}$; тогда существует элемент $d \in G^{i-1}$ такой, что $p^n d = c$. Обозначим через h прообраз элемента d при отображении φ, $\varphi(h) = d$; поскольку φ – изоморфное отображение и $\varphi(H^{i-1}) = G^{i-1}$, $h \in H^{i-1}$. Следовательно, $p^n h \in p^n H^{i-1}$. Кроме того, $\varphi(p^n h) = p^n \varphi(h) = p^n d = c$. Таким образом, прообразом элемента $c \in p^n G^{i-1}$ является элемент $p^n h \in p^n H^{i-1}$. Этим доказано, что

$$\varphi(p^n H^{i-1}) \supset p^n G^{i-1}. \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получим равенство (2).

Теперь, принимая во внимание, что $H^i = \bigcap\limits_{n<\omega} p^n H^{i-1}$, $G^i = \bigcap\limits_{n<\omega} p^n G^{i-1}$ и соотношение (2) имеет место для любого натурального числа n, заключаем, что $\varphi(H^i) = G^i$.

2-й случай: i – предельное число. В этом случае $H^i = \bigcap\limits_{\alpha<i} H^\alpha$, $G^i = \bigcap\limits_{\alpha<i} G^\alpha$, и по индуктивному предположению $\varphi(H^\alpha) = G^\alpha$ при всяком $\alpha < i$. Отсюда заключаем, что $\varphi(H^i) = G^i$.

Таким образом, доказано, что соотношение (1) имеет место для всякого порядкового числа i. Кроме того, в силу предложения 1.9 для любого порядкового числа i группы H^i и G^i суть допустимые подгруппы соответственно групп H и G. Отсюда заключаем, что если φ – операторное изоморфное отображение H на G, то операторным будет также и отображение подгруппы H^i на подгруппу G^i, индуцируемое отображением φ.

2°. Докажем, что имеет место соотношение (b). Из определения числа $\tau(H)$ следует, что

$$H^{\tau(H)} = H^{\tau(H)+1}.$$

Кроме того, согласно свойству (a) образами подгрупп $H^{\tau(H)}$ и $H^{\tau(H)+1}$ группы H при отображении φ являются соответственно подгруппы $G^{\tau(H)}$ и $G^{\tau(H)+1}$ группы G. Поэтому

$$G^{\tau(H)} = G^{\tau(H)+1}.$$

Отсюда следует, что $\tau(G) \leqslant \tau(H)$. Подобным же образом убеждаемся в том, что $\tau(H) \leqslant \tau(G)$. Следовательно,

$$\tau(H) = \tau(G),$$

т.е. имеет место соотношение (b).

3°. Докажем, что имеет место свойство (c). Пусть i – произвольное порядковое число. Согласно свойству (a) образами подгрупп H^i и H^{i+1} группы H при изоморфном отображении φ являются соответственно подгруппы G^i и G^{i+1} группы G. Отсюда следует, что факторгруппы H_i, $H_i = H^i/H^{i+1}$, и G_i, $G_i = G^i/G^{i+1}$, изоморфны. Обозначим через ψ отображение, ставящее в соответствие любому элементу $h + H^{i+1}$, где $h \in H^i$, факторгруппы H_i элемент $\varphi(h) + G^{i+1}$ факторгруппы G_i. Тогда легко видеть, что ψ является изоморфным отображением факторгруппы H_i на факторгруппу G_i; при этом нетрудно видеть, что если φ – операторное отображение, то ψ также является операторным отображением H_i на G_i. Таким образом, показано, что имеет место свойство (c).

Итак, предложение 12.10 доказано.

12.11. Теорема. *Пусть H и G – нормальные редуцированные обобщенные примарные группы (с одним и тем же кольцом операторов), имеющие счетные системы образующих*[6] *и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы (допустимых) циклических подгрупп. Для того чтобы группы H и G были операторно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$(a) \qquad \tau(H) = \tau(G);$$

$$(b) \qquad H^i/H^{i+1} \cong G^i/G^{i+1} \quad (i < \tau(H)).$$

Доказательство. 1°. В силу предложения 12.10 условия (a) и (b) являются необходимыми.

2°. Докажем достаточность условий (a) и (b). По условию H и G – обобщенные примарные группы, обладающие счетными системами образующих (относительно заданного кольца операторов). Пусть

$$x_1,\, x_3,\, \ldots,\, x_{2k+1},\, \ldots \tag{1}$$

– система образующих элементов группы H, перенумерованных нечетными натуральными числами, и

$$z_2,\, z_4,\, \ldots,\, z_{2k},\, \ldots \tag{2}$$

– система образующих элементов группы G, перенумерованных четными натуральными числами.

Обозначим через H_0 и G_0 нулевые подгруппы соответственно групп H и G и через φ_0 – изоморфизм между ними. Покажем методом полной математической индукции, что существуют бесконечные последовательности $\{H_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$

[6] Относительно кольца операторов групп H и G.

и $\{G_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ подгрупп соответственно групп H и G и последовательность $\{\varphi_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ изоморфизмов φ_i, обладающие при всяком натуральном i следующими свойствами:

(α_i) H_i является совершенной подгруппой группы H, имеет конечное число образующих и содержит подгруппу H_{i-1}. Кроме того, если i – нечетное число, группа H_i содержит элемент x_i.

(β_i) G_i является совершенной подгруппой группы G, имеет конечное число образующих и содержит подгруппу G_{i-1}. Кроме того, если i – четное число, группа G_i содержит элемент z_i.

(γ_i) φ_i является операторным изоморфизмом между группами H_i и G_i, сохраняющим типы и продолжающим изоморфизм φ_{i-1}.

Предположим, что группы H_i, G_i и изоморфизм φ_i, обладающие свойствами (α_i), (β_i) и (γ_i), уже построены для всякого $i < n$, где n – натуральное число. Покажем, что тогда существуют группы H_n, G_n и изоморфизм φ_n, обладающие свойствами (α_n), (β_n) и (γ_n). При этом мы рассмотрим два случая.

1-й случай: n – нечетное число. Если $x_n \in H \setminus H_{n-1}$, то, учитывая, что по индуктивному предположению группы H_{n-1}, G_{n-1} и изоморфизм φ_{n-1} обладают свойствами (α_{n-1}), (β_{n-1}) и (γ_{n-1}), мы на основании условия теоремы и предложения 12.8 заключаем, что существуют группы H_n, G_n и изоморфизм φ_n, обладающие свойствами (α_n), (β_n) и (γ_n). Если же $x_n \in H_{n-1}$, то полагаем $H_n = H_{n-1}$, $G_n = G_{n-1}$ и $\varphi_n = \varphi_{n-1}$.

2-й случай: n – четное число. Если $z_n \in G \setminus G_{n-1}$, то, так как по индуктивному предположению группы H_{n-1}, G_{n-1} и изоморфизм φ_{n-1} обладают свойствами (α_{n-1}), (β_{n-1}) и (γ_{n-1}), мы на основании предложения 12.8 заключаем, что существуют группы H_n, G_n и изоморфизм φ_n, обладающие свойствами (α_n), (β_n) и (γ_n). Если же $z_n \in G_{n-1}$, то полагаем $H_n = H_{n-1}$, $G_n = G_{n-1}$ и $\varphi_n = \varphi_{n-1}$.

Таким образом, доказано, что существуют последовательности групп

$$\{H_i\}_{i=0,1,2,\dots}, \qquad \{G_i\}_{i=0,1,2,\dots}$$

и последовательность изоморфизмов $\{\varphi_i\}_{i=0,1,2,\dots}$, обладающие свойствами (α_i), (β_i) и (γ_i).

Учитывая, что последовательность $\{x_{2k+1}\}_{k=0,1,2,\dots}$ является системой образующих элементов группы H, мы на основании свойств (α_i) заключаем, что имеют место соотношения

$$H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots, \tag{3}$$

$$H = \bigcup_{i<\omega} H_i. \tag{4}$$

Аналогично, на основании свойств (β_i) заключаем, что

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \ldots, \tag{5}$$

$$G = \bigcup_{i<\omega} G_i. \tag{6}$$

Теперь мы определим отображение ψ группы H на группу G следующим образом: если $x \in H$ и i – натуральное число такое, что $x \in H_i$ (в силу (4) такое число существует для всякого элемента $x \in H$), то полагаем

$$\psi(x) = \varphi_i(x).$$

В силу (3) и (4) H есть объединение возрастающей последовательности (допустимых) подгрупп H_i, и в силу (5), (6) G есть объединение возрастающей последовательности подгрупп G_i. Кроме того, согласно свойствам (γ_i) φ_i является операторным изоморфизмом между группами H_i и G_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, причем изоморфизм φ_i продолжает изоморфизм φ_k всякий раз, когда $i > k$. На основании всего этого мы заключаем, что ψ является операторным изоморфным отображением группы H на группу G. Таким образом, показано, что группы H и G операторно изоморфны.

Теорема доказана.

Если группы H и G изоморфны, то в силу предложения 12.10 условия (a) и (b) теоремы 12.11 выполняются. Поэтому из теоремы 12.11 вытекает следующее предложение.

Пусть H и G – нормальные редуцированные обобщенные примарные группы (*с одним и тем же кольцом операторов*), *имеющие счетные системы образующих*[7] *и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы* (*допустимых*) *циклических подгрупп. Если группы H и G изоморфны, то они также операторно изоморфны.*

Для случая групп с кольцом операторов K_p это предложение является частным случаем теоремы 1.21.

12.12. Теорема. *Пусть H и G – нормальные обобщенные примарные группы* (*с одним и тем же кольцом операторов*), *имеющие счетные системы образующих*[7] *и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы* (*допустимых*) *циклических подгрупп. Для того чтобы группы H и G были операторно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

(*а*) *группы H и G имеют один и тот же тип, $\tau(H) = \tau(G)$*;

(*б*) $$H^i/H^{i+1} \cong G^i/G^{i+1} \qquad (i < \tau(H));$$

(*в*) *группы $H^{\tau(H)}$ и $G^{\tau(G)}$ операторно изоморфны.*

Доказательство. 1°. В силу предложения 12.10 условия (*а*), (*б*) и (*в*) являются необходимыми.

2°. Докажем достаточность условий. Допустим, что условия (*а*), (*б*) и (*в*) выполнены; покажем, что тогда группы H и G операторно изоморфны. Согласно условию (*а*) $\tau(H) = \tau(G)$. Положим

$$\tau = \tau(H) = \tau(G), \tag{1}$$

[7] Относительно кольца операторов групп H и G.

$$\overline{H} = H/H^{\tau}, \tag{2}$$
$$\overline{G} = G/G^{\tau}. \tag{3}$$

В силу предложения 6.11 факторгруппа $\overline{H}$ является редуцированной группой, имеет тот же тип, что и группа H,

$$\tau(\overline{H}) = \tau, \tag{4}$$

и последовательность ульмовских факторов группы H служит также последовательностью ульмовских факторов для группы $\overline{H}$, т.е.

$$\overline{H}^{i}/\,\overline{H}^{i+1} \cong H^{i}/H^{i+1} \qquad (i < \tau). \tag{5}$$

Группа H^{τ} является полной подгруппой (и притом, в силу предложения 1.9, допустимой) группы H. Отсюда на основании предложения 2.10 заключаем, что существует допустимая подгруппа A группы H такая, что

$$H = H^{\tau} \oplus A. \tag{6}$$

Из (2) и (6) следует, что группы A и $\overline{H}$ изоморфны. Отсюда, принимая во внимание предложение 12.10 и соотношения (4) и (5), заключаем, что

$$\tau(A) = \tau, \tag{7}$$
$$A^{i}/A^{i+1} \cong H^{i}/H^{i+1} \qquad (i < \tau). \tag{8}$$

Кроме того, группа A является редуцированной, так как она изоморфна редуцированной группе $\overline{H}$.

Аналогично убеждаемся в том, что существует редуцированная допустимая подгруппа B группы G, удовлетворяющая следующим условиям:

$$G = G^{\tau} \oplus B, \tag{9}$$
$$\tau(B) = \tau, \tag{10}$$
$$B^{i}/B^{i+1} \cong G^{i}/G^{i+1} \qquad (i < \tau). \tag{11}$$

Докажем, что группы A и B операторно изоморфны. Сопоставляя равенства (7) и (10), имеем

$$\tau(A) = \tau(B) = \tau. \tag{12}$$

Из (8) и (11) следует, что

$$A^{i}/A^{i+1} \cong B^{i}/B^{i+1} \qquad (i < \tau). \tag{13}$$

По условию теоремы H есть нормальная обобщенная примарная группа, и в силу (6) подгруппа A является прямым слагаемым группы H. Отсюда согласно предложению 12.9 следует, что A является нормальной обобщенной примарной группой. Так же убеждаемся в том, что B является нормальной обобщенной примарной группой.

Далее, согласно условию ульмовские факторы групп H и G разложимы в прямые суммы (допустимых) циклических подгрупп. Отсюда в силу (8) и (11) следует, что ульмовские факторы групп A и B также разложимы в прямые суммы (допустимых) циклических подгрупп.

Наконец, группы A и B имеют счетные системы образующих, поскольку этим свойством обладают группы H и G.

Таким образом, группы A и B удовлетворяют всем условиям теоремы 12.11. На основании этой теоремы заключаем, что A и B операторно изоморфны.

Кроме того, согласно условию (*в*) группы H^τ и G^τ операторно изоморфны. Таким образом, прямые слагаемые H^τ и A разложения (6) операторно изоморфны соответственно прямым слагаемым G^τ и B разложения (9). Отсюда следует, что группы H и G операторно изоморфны. Теорема 12.12 доказана.

Ульмовские факторы счетной примарной группы являются счетными или конечными группами без элементов бесконечной высоты; поэтому согласно теореме Прюфера они разложимы в прямые суммы циклических подгрупп. Кроме того, любая примарная группа является нормальной группой. Поэтому из теоремы 12.12 непосредственно следует теорема Ульма:

Для того чтобы счетные примарные группы H и G были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$(a) \qquad \tau(H) = \tau(G);$$

$$(б) \qquad H^i/H^{i+1} \cong G^i/G^{i+1} \qquad (i < \tau(H));$$

$$(в) \qquad H^{\tau(H)} \cong G^{\tau(G)}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс нормальных обобщенных примарных групп, имеющих счетные системы образующих относительно кольца операторов (K_p или Z_p) и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы операторных циклических подгрупп. Для этого класса групп имеет место следующая теорема существования.

12.13. Теорема. *Пусть заданы порядковое число τ не более чем счетной мощности и последовательность $\{H_\lambda\}_{0\leqslant\lambda<\tau}$ принадлежащих классу $\mathfrak{A}$ ненулевых групп, не содержащих элементов бесконечной высоты и имеющих одно и то же кольцо операторов (K_p или Z_p). Для того чтобы существовала принадлежащая классу $\mathfrak{A}$ редуцированная группа G, имеющая тип τ и последовательность $\{H_\lambda\}_{0\leqslant\lambda<\tau}$ в качестве последовательности ульмовских факторов, необходимо и достаточно, чтобы для всякого индекса λ, удовлетворяющего неравенству $\lambda + 1 < \tau$, группа H_λ содержала элементы как угодно больших конечных порядков.*

Пусть $\{H_\lambda\}_{0\leqslant\lambda<\tau}$ – заданная последовательность групп. При помощи теоремы 4.26 можно выбрать базисные подгруппы C_λ групп H_λ так, что последовательности $\{H_\lambda\}_{0\leqslant\lambda<\tau}$ и $\{C_\lambda\}_{0\leqslant\lambda<\tau}$ будут удовлетворять условиям теоремы 8.3. Можно убедиться в том, что группа G, построенная в теореме 8.3 для этих последовательностей, будет искомой группой. Таким образом, достаточность условий теоремы 12.13 следует из теоремы 8.3. Необходимость условий теоремы следует из предложения 6.13.

Теоремы 12.12 и 12.13 дают полное описание класса нормальных обобщенных примарных групп, имеющих счетные системы образующих [8] и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы операторных циклических подгрупп.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли усилить теорему 12.12, отказавшись хотя бы от одного из трех условий: 1) нормальности, 2) счетности системы образующих, 3) разложимости ульмовских факторов в прямые суммы циклических подгрупп?

В начале этого параграфа было отмечено, что среди редуцированных примарных (и, значит, нормальных) групп, ульмовские факторы которых разложимы в прямые суммы циклических подгрупп, существуют группы (континуальной мощности), для которых последовательность ульмовских факторов не является полной системой инвариантов. Таким образом, нельзя отказаться от условия о счетности системы образующих.

Отметим, далее, без доказательства, что среди редуцированных обобщенных примарных групп, имеющих счетные системы образующих [8] и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы циклических подгрупп, существуют группы, для которых последовательность ульмовских факторов не является полной системой инвариантов. Таким образом, нельзя отказаться от условия о нормальности.

Можно ли отказаться от третьего условия? Другими словами, будет ли верна теорема 12.12, если отказаться от условия о разложимости ульмовских факторов в прямые суммы циклических подгрупп? Этот вопрос остается нерешенным.

В заключение отметим без доказательства, что существуют редуцированные примарные группы, имеющие тип 2 и мощность континуума, для которых последовательность ульмовских факторов не является полной системой инвариантов.

Поступило 28/IV 1951 г.

Литература

1. Baer R., *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. J., **3:1** (1937), 68–122.

2. Baer R., *Abelian groups that are direct summands of every containing Abelian group*, Bull. Amer. Math. Soc., **46:10** (1940), 800–806.

3. Derry D., *Über eine Klasse von Abelschen Gruppen*, Proc. London Math. Soc., **43** (1937), 490–506.

4. Kakutani S., *On cardinal numbers related with a compact Abelian group*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **19:7** (1943), 366–372.

5. Kampen E. R. van, *Locally bicompact Abelian groups and their character groups*, Ann. Math., **36:2** (1935), 448–463.

[8] Относительно кольца операторов группы.

6. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **9(51):1** (1941), 165–181.

7. Куликов Л. Я., *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Мат. сб., **16(58):2** (1945), 129–162.

8. Курош А. Г., *Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп*, Успехи мат. наук, вып. **3** (1937), 5–15.

9. Курош А. Г., *Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range*, Ann. Math., **38:1** (1937), 175–203.

10. Курош А. Г., *Несколько замечаний к теории бесконечных групп*, Мат. сб., **5(47):2** (1939), 347–354.

11. Курош А. Г., *Теория групп*, М.; Л.: Гостехиздат, 1944.

12. Мальцев А. И., *Абелевы группы конечного ранга без кручения*, Мат. сб., **4(46):1** (1938), 45–68.

13. Понтрягин Л. С., *The theory of topological commutative groups*, Ann. Math., **35:2** (1934), 361–388.

14. Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы*, М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938.

15. Prüfer H., *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **17** (1923), 35–61.

16. Prüfer H., *Theorie der Abelschen Gruppen*, Math. Z., **20** (1924), 165–187; **22** (1925), 222–249.

17. Ulm H., *Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen*, Math. Ann., **107** (1933), 774–803.

18. Ulm H., *Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z., **40** (1935), 205–207.

19. Zippin L., *Countable torsion groups*, Ann. Math., **36:1** (1935), 86–99.

Пример неизоморфных групп типа 2 с изоморфными ульмовскими факторами

Обозначим через $Z_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ циклическую группу порядка p^i и через A – замыкание прямой суммы всех этих циклических групп. Таким образом, A является группой последовательностей элементов, взятых по одному в каждой из групп Z_i, причем порядки всех элементов каждой из этих последовательностей ограничены в совокупности. Пусть B – подгруппа, состоящая из всех тех элементов порядка $\leqslant p$ группы A, которые имеют лишь конечное число ненулевых компонент, C – подгруппа, состоящая из всех тех элементов порядка $\leqslant p$, которые имеют лишь конечное число ненулевых компонент с нечетными индексами i, в то время как на компоненты с четными индексами не накладывается никаких ограничений. Ясно, что

$$B \subset C \subset A_1,$$

где A_1 – нижний слой * группы A.

Теорема. *Группы $H = A/B$ и $G = A/C$ являются неизоморфными редуцированными примарными группами типа 2 с изоморфными ульмовскими факторами.*

Доказательство. 1°. Положим $H^* = A_1/B$ и докажем, что H^* состоит из элементов, имеющих в группе H бесконечную высоту. Произвольный элемент h^* из H^* имеет вид $h^* = a+B$, где a – элемент порядка $\leqslant p$ из A; i-ю компоненту элемента a обозначим через z_i. Если число n фиксировано, то для всякого $i > n$ в группе Z_i существует такой элемент z'_i, что $p^n z'_i = z_i$. Положим, далее, $z'_i = 0$ при $i \leqslant n$. Тогда

$$z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_i, \ldots)$$

– элемент порядка $\leqslant p^{n+1}$ группы A, причем $p^n z' - a \in B$, т.е. $p^n(z' + B) = h^*$. Этим доказано, что элемент h^* имеет в группе H бесконечную высоту, т.е.

$$H^* \subset H^1, \tag{1}$$

где H^1 – подгруппа элементов бесконечной высоты группы H.

Далее, из $H = A/B,\ H^* = A_1/B$ следует изоморфизм

$$H/H^* \cong A/A_1.$$

* *Нижним слоем* группы A называется ее подгруппа $A[p] = \{g \in A \mid pg = 0\}$. – *Прим. ред.*

Однако $A/A_1 \cong pA$, так как отображение $a \to pa,\ a \in A$, является гомоморфизмом группы A на подгруппу pA с ядром A_1. Поэтому

$$H/H^* \cong pA. \tag{2}$$

Так как группа pA, как и сама группа A, не содержит элементов бесконечной высоты, то из (1) и (2) вытекает

$$H^1 = H^*, \tag{3}$$

$$H/H^1 \cong pA. \tag{4}$$

Мы нашли ульмовские факторы группы H и доказали, в частности, что группа H является редуцированной типа 2.

2°. Найдем теперь ульмовские факторы группы G. Если положим $D = C/B$, то ввиду $G = A/C,\ H = A/B$ будет

$$G \cong H/D. \tag{5}$$

Из $D \subset H^*$ и (3) следует $D \subset H^1$, а поэтому из (5) вытекает

$$G^1 \cong (H/D)^1 = H^1/D, \tag{6}$$

где G^1 есть подгруппа элементов бесконечной высоты группы G: если элемент $h + D$ имеет в группе H/D бесконечную высоту, то для любого n существуют такие элементы $h_n \in H$ и $d_n \in D$, что $p^n h_n = h + d_n$; элемент d_n имеет, однако, в группе H бесконечную высоту, поэтому высота элемента h также бесконечна.

Из (5) и (6) вытекает

$$G/G^1 \cong H/H^1. \tag{7}$$

С другой стороны, группа H^1 имеет ввиду (3) мощность континуума и состоит из элементов порядка $\leqslant p$. Это же верно и для группы G^1: из (6), (3) и определения групп H^* и D следует, что

$$G^1 \cong A_1/C,$$

однако группа A_1/C состоит из элементов порядка $\leqslant p$ и имеет мощность континуума. Применяя первую теорему Прюфера, мы приходим к изоморфизму

$$G^1 \cong H^1. \tag{8}$$

Этим доказано, что группа G является редуцированной типа 2 и ее ульмовские факторы изоморфны соответствующим ульмовским факторам группы H.

3°. Остается показать, что сами группы H и G не будут изоморфными. Для этого, учитывая включения $H^1 \subset H_1$ и $G^1 \subset G_1$, где H_1 и G_1 – соответственно нижние слои групп H и G, достаточно доказать, что факторгруппы H_1/H^1 и G_1/G^1 имеют различные мощности.

Мы знаем ввиду (3), что $H^1 = A_1/B$. С другой стороны, легко видеть, что $H_1 = L/B$, где через L обозначена подгруппа группы A, состоящая из всех элементов порядка $\leqslant p$ и тех элементов порядка p^2, которые имеют лишь конечное число отличных от нуля компонент порядка p^2. Отсюда следует, что

$$H_1/H^1 \cong L/A_1;$$

факторгруппа L/A_1 является, однако, счетной.

Рассмотрим теперь факторгруппу G_1/G^1. Прежде всего,

$$G^1 = A_1/C. \tag{9}$$

Действительно, так как $D \subset H^1$, то при естественном гомоморфизме группы H на группу $G \cong H/D$ полным прообразом группы G^1 будет подгруппа H^1. Однако из (3) следует, что A_1 будет полным прообразом подгруппы H^1 при естественном гомоморфизме группы A на группу $H = A/B$. Отсюда вытекает, что при естественном гомоморфизме группы A на группу $G = A/C$ полным прообразом подгруппы G^1 будет служить подгруппа A_1; этим доказано равенство (9).

С другой стороны, $G_1 = K/C$, где через K обозначена подгруппа группы A, состоящая из всех элементов порядка $\leqslant p$ и тех элементов порядка p^2, которые имеют лишь конечное число компонент порядка p^2 с нечетными индексами, в то время как компонент порядка p^2 с четными индексами может быть бесконечно много. Отсюда и из (9) следует, что

$$G_1/G^1 \cong K/A_1;$$

факторгруппа K/A_1 имеет, однако, мощность континуума.

Этим доказано, что группы H и G не будут изоморфными.

О прямых разложениях одной смешанной абелевой группы

(Посвящена памяти профессора Тибора Селе)

В работе «Обобщенные примарные группы» (Труды Московского математического общества, **2** (1953), 85–167) автором была доказана следующая теорема (теорема 12.12), обобщающая теорему У л ь м а:

Пусть A и G – нормальные обобщенные примарные[1] группы (с одним и тем же кольцом операторов), каждая из которых имеет счетную систему образующих[2] и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы циклических[2] подгрупп. Для того чтобы группы A и G были операторно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) ульмовский тип $\tau(A)$ группы A равен ульмовскому типу $\tau(G)$ группы G;

(b) соответствующие ульмовские факторы групп A и G изоморфны, т.е.

$$A^i/A^{i+1} \cong G^i/G^{i+1} \quad \text{при } i < \tau(A);$$

(c) группы $A^{\tau(A)}$ и $G^{\tau(G)}$ операторно изоморфны.

Было установлено, что теорема неверна, если отказаться либо от условия о нормальности групп A и G, либо от условия о счетности систем образующих групп A и G.

В работе был поставлен вопрос о том, будет ли верна приведенная выше теорема, если отказаться от условия о разложимости ульмовских факторов групп A и G в прямые суммы циклических[2] подгрупп.

---

[1] Абелеву группу с кольцом операторов Z_p или K_p, где Z_p – кольцо целых p-адических чисел и K_p – кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с данным простым числом p, называем *обобщенной примарной группой*. Обобщенная примарная группа G называется *нормальной*, если для всякой ее допустимой подгруппы E, имеющей конечное число образующих (относительно кольца операторов группы), множество порядковых чисел i, для которых $E \cap G^i \neq E \cap G^{i+1}$, является конечным.

[2] Относительно кольца операторов группы.

По предположению Тибора Селе ответ на этот вопрос отрицательный; однако его попытка доказать это застряла на доказательстве того, что обобщенная примарная группа H (с кольцом операторов Z_p), заданная образующими $b_1, b_2, \ldots$ и определяющими соотношениями

$$p^2(b_1 - pb_2) = p^4(b_2 - pb_3) = \ldots = p^{2k}(b_k - pb_{k+1}) = \ldots = c \neq 0,$$

не разлагается в прямую сумму двух смешанных подгрупп [3].

Целью настоящей заметки является доказательство неразложимости группы H в прямую сумму двух смешанных подгрупп.

Неразложимость группы H в прямую сумму двух смешанных подгрупп вытекает из следующего свойства этой группы: *в любом прямом разложении группы H в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой.* Ниже приводится доказательство этого интересного свойства группы H.

Рассмотрим Z_p-группу (или K_p-группу) G, заданную счетной системой образующих $a_1, a_2, \ldots$,

$$G = [a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots],$$

и определяющими соотношениями

$$p^2(a_1 - pa_2) = p^4(a_2 - pa_3) = \ldots = p^{2k}(a_k - pa_{k+1}) = \ldots = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $d_1, d_2, \ldots$ элементы группы G, определяемые равенствами

$$d_1 = a_1 - pa_2,\ d_2 = a_2 - pa_3,\ \ldots,\ d_k = a_k - pa_{k+1},\ \ldots, \tag{2}$$

и через F – подгруппу группы G, порожденную этими элементами,

$$F = [d_1, d_2, \ldots d_k, \ldots].$$

Докажем, что группа F есть максимальная периодическая подгруппа группы G. Действительно, из (1) и (2) следуют равенства

$$p^{2k} d_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

показывающие, что F есть p-группа. Кроме того, факторгруппа $\overline{G} = G/F$ является Z_p-группой со счетной системой образующих,

$$\overline{G} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \ldots], \qquad \text{где } \bar{a}_k = a_k + F,$$

и с определяющими соотношениями

$$\bar{a}_1 = p\bar{a}_2,\ \bar{a}_2 = p\bar{a}_3,\ \ldots,\ \bar{a}_k = p\bar{a}_{k+1},\ \ldots, \tag{4}$$

[3] Глубокоуважаемый Тибор Селе любезно сообщил мне об этом в письме, которое было получено мною в январе 1955 г.

т.е. $\overline{G}$ изоморфна аддитивной группе поля p-адических чисел. Отсюда следует, что F есть максимальная периодическая подгруппа группы G и свободный ранг группы G равен единице.

Докажем, что *во всяком разложении*

$$G = A \oplus B \tag{5}$$

группы G в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой. Поскольку F есть группа с образующими $d_1, d_2, \ldots$ и определяющими соотношениями (3), то F разлагается в прямую сумму циклических подгрупп четных порядков

$$F = \bigoplus_{k=1}^{\infty} F_k, \tag{6}$$

где $F_k = [d_k]$ – циклическая подгруппа порядка $2k$. Из равенства (2) следуют соотношения $a_k = d_k + pa_{k+1}$ и

$$p^{2k-1}a_k = p^{2k-1}d_k + p^{2k}a_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Далее, на основании (1) заключаем, что

$$p^k a_1 = p^{2k-1}a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получим

$$p^k a_1 = p^{2k-1}d_k + p^{2k}a_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Обозначим через $h(x, G)$ высоту элемента x в группе G. На основании (6) заключаем, что $h(p^{2k-1}d_k, F) = 2k - 1$. Отсюда, поскольку F – сервантная подгруппа группы G, следует, что

$$h(p^{2k-1}d_k, G) = 2k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Далее, на основании (9) и (10) заключаем, что

$$h(p^k a_1, G) = 2k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Поскольку свободный ранг группы G равен единице, то в разложении (5) одно из слагаемых является периодической группой; предположим, что A является периодической группой, а B – смешанная группа или группа без кручения. Так как прямое слагаемое A в разложении (5) есть периодическая группа и элемент a_1 имеет бесконечный порядок, то найдутся натуральные числа k такие, что

$$p^k a_1 \in B \setminus \{0\};$$

наименьшее из этих чисел обозначим через m, тогда

$$p^m a_1 \in B. \tag{12}$$

Из (11) и (5) следует, что

$$h(p^{k+1}a_1,\, B) = 2k+1 \qquad (k = m-1,\, m,\, m+1,\, \dots),$$

следовательно, существует элемент $g_k \in B$, удовлетворяющий условиям

$$pg_k = p^{k+1}a_1, \qquad h(g_k,\, B) = 2k. \tag{13}$$

На основании (13) заключаем, что элемент $s_k = g_k - p^k a_1$ имеет порядок p и высоту $2k-1$ в группе B,

$$ps_k = 0, \qquad h(s_k,\, B) = 2k-1 \qquad (k = m,\, m+1,\, \dots).$$

Таким образом, доказано, что в B существует бесконечная последовательность элементов

$$s_m,\, s_{m+1},\, \dots,\, s_n,\, \dots,$$

каждый из которых имеет порядок p и высоту $h(s_k,\, B) = 2k-1$.

Известно, что всякий элемент s_k можно включить в циклическое прямое слагаемое группы B порядка $2k$. Отсюда следует, что любое разложение максимальной периодической подгруппы $F(B)$ группы B в прямую сумму циклических подгрупп содержит циклические слагаемые любых четных порядков, бóльших или равных $2m$. Но группа F является прямой суммой циклических подгрупп, порядки которых суть четные и различные числа; кроме того, ввиду (5)

$$F = A \oplus F(B).$$

Отсюда следует, что в любом разложении группы A в прямую сумму циклических подгрупп порядки циклических слагаемых меньше $2m$; кроме того, всякое такое разложение не содержит прямых слагаемых одного и того же порядка. Следовательно, группа A является конечной.

Рассмотрим теперь группу H с кольцом операторов Z_p (или K_p), заданную счетной системой образующих $\{b_1,\, b_2,\, \dots\}$, $H = [b_1,\, b_2,\, \dots]$, и определяющими соотношениями

$$p^2(b_1 - pb_2) = p^4(b_2 - pb_3) = \dots = p^{2k}(b_k - pb_{k+1}) = \dots = c \neq 0. \tag{14}$$

Докажем, что *в любом прямом разложении группы H в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой.*

Пусть

$$H = D \oplus E \tag{15}$$

– какое-либо разложение H в прямую сумму двух слагаемых. Соотношения (14) показывают, что элемент c имеет бесконечную высоту в H и факторгруппа $\overline{H} = H/[c]$ изоморфна группе G,

$$\overline{H} \cong G; \tag{16}$$

отсюда, поскольку группа G не имеет элементов бесконечной высоты, следует, что все элементы бесконечной высоты группы H содержатся в группе $C = [c]$. Обозначим через D_1 подгруппу группы D, образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в D, через E_1 – подгруппу, образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в E. На основании (15) заключаем, что

$$C = D_1 \oplus E_1. \tag{17}$$

Поскольку C – циклическая группа, одно из двух слагаемых в разложении (17) является нулевым; предположим, что $D_1 = \{0\}$. Тогда $E_1 = C$, следовательно,

$$H/C \cong D \oplus E/C. \tag{18}$$

На основании (16) и (18) заключаем, что

$$G \cong D \oplus E/C.$$

Выше было доказано, что во всяком разложении группы G в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых есть конечная группа. Следовательно, либо D, либо E/C является конечной группой. Но элемент c имеет бесконечную высоту в E и потому факторгруппа E/C не может быть конечной группой. Следовательно, группа D является конечной.

Из доказанного предложения следует, что группа H неразложима в прямую сумму двух смешанных подгрупп.

(Поступила в редакцию 15/XII 1955 г.)

Случайные системы неравенств по модулю

Введение

Настоящая работа посвящена изучению случайных систем неравенств по модулю, т.е. таких систем неравенств, которые представляют собой случайные выборки с возвращением из множества всех соотношений несравнимости (по данному модулю) вида $x_i - x_j \not\equiv \alpha$ (более точное определение понятия случайной системы неравенств дается в § 1).

Основные результаты работы содержатся в трех последних параграфах. В § 6 даются формулы для среднего числа решений и среднего числа квазирешений данного ранга случайной системы неравенств. В § 7 излагается метод нахождения множества всех решений и множества всех квазирешений, ранг которых не превосходит данного числа m. В § 7 дается формула [см. теорему (7.2)] для среднего числа элементарных операций (это понятие определяется в § 7), необходимых для нахождения множества всех решений случайной системы неравенств. Далее, в § 7 выводится формула [теорема (7.1)] для среднего значения случайной величины $\eta_m(S)$ – числа элементарных операций, необходимых для нахождения (по предложенному методу) множества всех квазирешений ранга $\leqslant m$ $(m < \frac{n}{2})$ случайной системы неравенств. Однако для практического использования этой формулы необходимо знать распределение вероятностей случайной величины $\varphi(V_k, B)$, определяемой в § 2. Таким образом, теорема (7.1) сводит задачу о нахождении среднего значения случайной величины $\eta_m(S)$ к задаче об отыскании распределения вероятностей случайной величины $\varphi(V_k, B)$. В § 8 дается оценка сверху среднего значения случайной величины $\eta_m(S)$, т.е. дается оценка сверху среднего числа элементарных операций, необходимых для нахождения множества всех квазирешений случайной системы неравенств, ранг которых не превосходит данного числа m.

§ 1. Основные понятия

Введем основные понятия, которыми мы будем всюду дальше пользоваться.

1. Понятие системы неравенств по модулю n

Совокупность соотношений несравнимости по модулю n вида

$$x_{i_q} - x_{j_q} \not\equiv \alpha_q \pmod n \qquad (q = 1, \ldots, t;\ 1 \leqslant i_q, j_q, \alpha_q \leqslant n) \qquad (S)$$

назовем *системой неравенств по модулю* n; $x_1, \ldots, x_n$ назовем *неизвестными системы* независимо от того, входят ли все они в систему или нет. Таким образом, число неизвестных x_i, входящих в систему, не больше модуля n системы.

2. Понятие решения системы неравенств

Систему $V_n = (a_1, \ldots, a_n)$ значений неизвестных

$$x_1 = a_1,\, x_2 = a_2,\, \ldots,\, x_n = a_n, \tag{V_n}$$

удовлетворяющих каждому неравенству системы S и попарно несравнимых по модулю n, назовем *полным решением системы* S.

Два решения $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ системы неравенств будем называть *эквивалентными*, если

$$a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \equiv \ldots \equiv a_n - b_n \pmod{n}.$$

Нетрудно видеть, что каждому решению $(a_1, \ldots, a_n)$ системы неравенств S (по модулю n) соответствует n эквивалентных ему решений $(a_1 + c, \ldots, a_n + c)$, где $c = 1, \ldots, n$.

Систему $V_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ значений первых k неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ системы

$$(x_1 = a_1,\, x_2 = a_2,\, \ldots,\, x_k = a_k), \tag{V_k}$$

попарно несравнимых по модулю n и удовлетворяющих каждому неравенству системы S, содержащему только неизвестные с индексами $\leqslant k$, мы назовем *k-мерным решением системы* S. Всякое n-мерное решение системы является полным решением этой системы.

Обозначим через ϑ_k множество всех систем значений первых k неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, попарно несравнимых между собой по модулю n, $k \leqslant n$. Запись $V_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \vartheta_k$ будет означать, что мы рассматриваем следующую систему значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$x_1 = a_1,\, x_2 = a_2,\, \ldots,\, x_k = a_k,$$

причем вычеты $a_1, a_2, \ldots, a_k$ попарно несравнимы по модулю n. Систему V_k значений первых k неизвестных, $V_k \in \vartheta_k$, будем называть *k-мерным вектором.* Мощность множества ϑ_k равна A_n^k, $|\vartheta_k| = A_n^k$.

3. Нормальная форма записи системы неравенств

Всякое неравенство вида

$$x_i - x_j \not\equiv \alpha \pmod{n} \qquad (0 \leqslant \alpha < n) \tag{1}$$

может быть записано также в виде

$$x_j - x_i \not\equiv n - \alpha \pmod{n}. \tag{2}$$

Неравенство (1) назовем *нормально записанным*, если

$$\alpha \in \left\{0,\, 1,\, \ldots,\, \left[\tfrac{n}{2}\right]\right\},$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ – целая часть числа $\frac{n}{2}$, и, кроме того, $i \leqslant j$ при $\alpha = \frac{n}{2}$.

Из двух форм (1), (2) записи неравенства одна является нормальной. В случае когда $\alpha = \frac{n}{2}$ и $i = j$, формы записи (1) и (2) совпадают.

Систему неравенств S назовем *нормально записанной*, если каждое неравенство этой системы записано в нормальной форме. Всюду ниже мы будем рассматривать только нормально записанные системы неравенств.

4. Подсистемы S_α системы неравенств

Обозначим через S_α множество всех неравенств системы S, у которых правые части равны данному числу α, т.е. множество всех неравенств системы S вида

$$x_i - x_j \not\equiv \alpha \pmod n;$$

множество S_α назовем подсистемой системы S. Подсистема S_α будет пустым множеством, если система S не содержит неравенств, у которых правые части равны α.

Нормально записанная система неравенств S состоит из подсистем

$$S_0,\, S_1,\, \ldots,\, S_{[n/2]}.$$

Каждое неравенство системы S входит в одну и только в одну из этих подсистем, поскольку подсистемы попарно не пересекаются, т.е.

$$S = \bigcup_{\alpha=0}^{[n/2]} S_\alpha, \qquad S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing \ \text{ при } \alpha \neq \beta$$

($\varnothing$ – пустое множество).

5. Понятие квазирешения ранга m системы неравенств

Обозначим через $N(V_k, S)$ множество индексов α всех подсистем S_α системы S, которым не удовлетворяет данный k-мерный вектор V_k, $V_k \in \vartheta_k$.

Вектор V_k, $V_k \in \vartheta_k$, назовем *k-мерным квазирешением ранга m* системы неравенств S, если мощность множества всех подсистем S_α системы S, которым не удовлетворяет вектор V_k, равна m, т.е. $|N(V_k, S)| = m$. В частности, k-мерное квазирешение нулевого ранга системы S представляет собой k-мерное решение системы S.

6. Понятие случайной системы неравенств

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех нормально записанных неравенств (по некоторому фиксированному модулю n) с отличными от нуля правыми частями. Таким образом, $\mathcal{N}$ представляет собой множество всех неравенств вида

$$x_i - x_j \not\equiv \alpha \pmod n,$$

удовлетворяющих условиям

$$\alpha \in \left\{1,\, 2,\, \ldots,\, \left[\tfrac{n}{2}\right]\right\}, \qquad i, j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}, \qquad i \leqslant j \ \text{ при } \alpha = \frac{n}{2}.$$

Определение. Случайную выборку (с возвращением) объема t из генеральной совокупности $\mathcal{N}$ назовем *случайной системой* t неравенств по модулю n.

Если S есть случайная система t неравенств, то t будем называть *мощностью системы* S.

7. Мощность множества $\mathcal{N}$

Множество $\mathcal{N}$ представляет собой совокупность всех неравенств вида

$$x_i - x_j \not\equiv \alpha \pmod n,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$(a) \qquad \alpha \in \left\{1,\, 2,\, \ldots,\, \left[\tfrac{n}{2}\right]\right\}, \qquad i, j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\};$$

$$(b) \qquad i \leqslant j \ \text{ при } \alpha = \tfrac{n}{2}.$$

При n нечетном условие (b) выполняется, так как $\frac{n}{2} \notin \left\{1,\, \ldots,\, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$. Следовательно, мощность множества $\mathcal{N}$ равна числу упорядоченных троек $(i,\, j,\, \alpha)$ индексов $i,\, j,\, \alpha$, удовлетворяющих условию (a). Поэтому $|\mathcal{N}| = \frac{1}{2}\, n^2(n-1)$.

При n четном мощность множества $\mathcal{N}$ равна $\frac{1}{2}\, n(n^2 - n + 1)$. Действительно, при $\alpha = 1,\, 2,\, \ldots,\, \frac{n}{2} - 1$ каждый из индексов $i,\, j$ может принимать n значений, $i, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, следовательно, $\mathcal{N}$ содержит $(\frac{n}{2} - 1)n^2$ неравенств, у которых $\alpha \neq \frac{n}{2}$. Далее, при $\alpha = \frac{n}{2}$ индексы $i,\, j$ удовлетворяют условию (b), следовательно, $\mathcal{N}$ содержит $\frac{n}{2}(n+1)$ неравенств, у которых правые части α равны $\frac{n}{2}$. Поэтому мощность множества $\mathcal{N}$ равна сумме

$$(\tfrac{n}{2} - 1)n^2 + \tfrac{n}{2}(n+1) = \tfrac{1}{2}\, n(n^2 - n + 1).$$

Таким образом, доказана формула

$$|\mathcal{N}| = \begin{cases} \ \ \frac{1}{2}\, n^2(n-1) & \text{при } n \text{ нечетном}, \\ \frac{1}{2}\, n(n^2 - n + 1) & \text{при } n \text{ четном}. \end{cases}$$

§ 2. Функция φ

В настоящем параграфе вводится функция $\varphi(V_k, B)$ и доказываются некоторые ее свойства, играющие существенную роль в последующих параграфах.

(2.1) Определение функции $\varphi(V_k, B)$

Обозначим через $\mathcal{B}_m$ множество всех подмножеств мощности m множества $L = \left\{1,\, 2,\, \ldots,\, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$, $0 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Через $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$ обозначим декартово произведение множеств ϑ_k и $\mathcal{B}_m$, т.е. множество пар (V_k, B), где $V_k \in \vartheta_k$, $B \in \mathcal{B}_m$. Каждому множеству $B \in \mathcal{B}_m$, $B = \{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m\}$, сопоставим множество $\overline{B} = \{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m,\, n - \alpha_1,\, n - \alpha_2,\, \ldots,\, n - \alpha_m\}$.

Каждому элементу (V_k, B), $V_k = (a_1, \ldots, a_k)$, множества $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$ поставим в соответствие число $\varphi(V_k, B)$, равное числу элементов таблицы $T(V_k)$,

$$T(V_k) = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 & a_1 - a_2 & \ldots & a_1 - a_k \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_2 & \ldots & a_2 - a_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_k - a_1 & a_k - a_2 & \ldots & a_k - a_k \end{pmatrix},$$

принадлежащих множеству $\overline{B}$. Таким образом, функция φ определена на множестве $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$. В частности, $\varphi(V_k, B) = 0$ при $m = 0$, поскольку в этом случае B и $\overline{B}$ являются пустыми множествами.

В том случае, когда B состоит из одного элемента, например, $B = \{\alpha\}$, $\varphi(V_k, B)$ будем записывать также в виде $\varphi(V_k, \alpha)$.

Отметим, что $|\overline{B}| = 2\,|B|$ (символом $|\overline{B}|$ обозначаем мощность множества $\overline{B}$) во всех случаях, за исключением случая, когда n четно и $\frac{n}{2} \in B$. В этом последнем случае $|\overline{B}| = 2\,|B| - 1$. Следовательно, всегда имеет место неравенство $|\overline{B}| \leqslant 2\,|B|$.

Свойства функции φ

Обозначим через $\mathcal{M}(\overline{B})$ множество всех неравенств $x_i - x_j \not\equiv \beta \pmod n$, у которых правые части β принадлежат $\overline{B}$. Через $A(V_k)$, $V_k = (a_1, \ldots, a_k)$, обозначим множество неравенств вида $x_i - x_j \not\equiv a_i - a_j \pmod n$, где $i, j \leqslant k$.

$$A(V_k) = \{x_i - x_j \not\equiv a_i - a_j\}_{i,\, j\, =\, 1,\, 2, \ldots,\, k}\,. \tag{1}$$

(2.2) *Функция φ обладает следующими свойствами:*

(a) $$\varphi(V_k, B) = \sum_{i=1}^{k} \bigl|\, \overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j\, =\, 1,\, 2, \ldots,\, k} \bigr|;$$

(b) $$\varphi(V_k, B) = \sum_{\alpha \in B} \varphi(V_k, \alpha);$$

(c) $$\varphi(V_k, L) = k(k-1);$$

(d) $$\varphi(V_k, B) \leqslant k\,|\overline{B}| \leqslant 2k\,|B|;$$

(e) $$\varphi(V_n, B) = n\,|\overline{B}|;$$

(f) *среднее значение функции φ на множестве $\mathcal{B}_m$ равно $\frac{mk(k-1)}{[n/2]}$, т.е.*

$$\frac{1}{C^m_{[n/2]}} \cdot \sum_{B \in \mathcal{B}_m} \varphi(V_k, B) = \frac{mk(k-1)}{[n/2]}\,;$$

(g) *среднее значение функции φ на множестве $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$ равно $\frac{mk(k-1)}{[n/2]}$, т.е.*

$$\frac{1}{C^m_{[n/2]} \cdot A^k_n} \cdot \sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} \varphi(V_k, B) = \frac{mk(k-1)}{[n/2]}\,;$$

$$(h) \qquad \varphi(V_k, B) = |A(V_k) \cap \mathcal{M}(\overline{B}\,)|;$$

$$(l) \qquad \varphi(V_k, B) = 2\,|A(V_k) \cap \mathcal{N}(B)|,$$

где $\mathcal{N}(B)$ *– множество всех неравенств из* $\mathcal{N}$, *правые части которых принадлежат множеству* B, $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}(\overline{B}\,)$.

Доказательство. Докажем, что функция φ обладает свойством (a). Так как $V_k = (a_1, \ldots, a_k) \in \vartheta_k$, числа $a_1, \ldots, a_k$ попарно несравнимы по модулю n. Следовательно, попарно несравнимыми являются числа, принадлежащие одной и той же строке таблицы $T(V_k)$. Отсюда следует, что число элементов i-й строки таблицы, принадлежащих множеству $\overline{B}$, равно

$$\left|\,\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k}\right|.$$

Поэтому число $\varphi(V_k, B)$ элементов таблицы $T(V_k)$, принадлежащих $\overline{B}$, равно

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\,\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k}\right|.$$

Докажем, что функция φ обладает свойством (b). Нетрудно видеть, что $\overline{B} = \bigcup\limits_{\alpha \in B} \{\alpha,\, n - \alpha\}$, причем множества $\{\alpha,\, n - \alpha\}$ попарно не пересекаются. Отсюда следует, что

$$\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k} = \bigcup_{\alpha \in B} \big(\{\alpha,\, n - \alpha\} \cap \{a_i - a_j\}_{j\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k}\big),$$

$$\varphi(V_k, B) = \sum_{i=1}^{k} \left|\,\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j\,=\,1,\,\ldots\,,\,k}\right| = \sum_{\alpha \in B}\, \sum_{i=1}^{k} \left|\{\alpha,\, n - \alpha\} \cap \{a_i - a_j\}_{j\,=\,1,\,\ldots\,,\,k}\right|.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\{\alpha,\, n - \alpha\} \cap \{a_i - a_j\}_{j=1,\,2,\,\ldots\,,\,k}\right| = \varphi(V_k,\, \alpha).$$

Следовательно,

$$\varphi(V_k, B) = \sum_{\alpha \in B} \varphi(V_k,\, \alpha).$$

Докажем, что φ обладает свойством (c). $\varphi(V_k, L)$ есть число элементов таблицы $T(V_k)$, принадлежащих множеству $\overline{L} = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n-1\}$, т.е. число элементов таблицы, отличных от нуля. Но равны нулю только элементы таблицы, расположенные на главной диагонали, поскольку числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ попарно несравнимы по модулю n. Следовательно,

$$\varphi(V_k, L) = k(k-1).$$

Неравенство

$$\varphi(V_k, B) \leqslant k\,|\overline{B}|$$

непосредственно следует из свойства (a), поскольку каждое слагаемое суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} \big|\,\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j=1,2,\dots,k}\big|$ не больше $|\overline{B}|$ и сумма содержит k слагаемых. Кроме того, выше было установлено, что $|\overline{B}| \leqslant 2\,|B|$. Таким образом, доказано, что φ обладает свойством (d).

Докажем равенство (e). Каждая строка таблицы $T(V_n)$ представляет собой полную систему вычетов по модулю n. Поэтому

$$\big|\,\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j=1,2,\dots,n}\big| = |\overline{B}|$$

и

$$\varphi(V_n, B) = \sum_{i=1}^{n} \big|\,\overline{B} \cap \{a_i - a_j\}_{j=1,2,\dots,n}\big| = n\,|\overline{B}|.$$

Докажем свойство (f). Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_m} \varphi(V_k, B) = C^{m-1}_{[n/2]-1} \cdot \sum_{\alpha \in L} \varphi(V_k,\, \alpha) \qquad (m \geqslant 1).$$

Отсюда ввиду (c)

$$\frac{1}{C^{m}_{[n/2]}} \cdot \sum_{B \in \mathcal{B}_m} \varphi(V_k, B) = \frac{C^{m-1}_{[n/2]-1}}{C^{m}_{[n/2]}} \cdot \sum_{\alpha \in L} \varphi(V_k,\, \alpha) = \frac{mk(k-1)}{[n/2]},$$

и, таким образом, среднее значение φ на множестве $\mathcal{B}_m$ равно $\frac{mk(k-1)}{[n/2]}$.

Свойство (g) непосредственно следует из свойства (f).

Докажем свойство (h). Множество $A(V_k)$ определяется равенством (1). Пересечение $A(V_k) \cap \mathcal{M}(\,\overline{B}\,)$ представляет собой множество всех тех неравенств множества $A(V_k)$, правые части которых принадлежат множеству $\overline{B}$. Нетрудно видеть, что мощность этого множества равна числу элементов таблицы $T(V_k)$, принадлежащих множеству $\overline{B}$, т.е.

$$|A(V_k) \cap \mathcal{M}(\,\overline{B}\,)| = \varphi(V_k, B).$$

Докажем равенство (l). Пусть $x_i - x_j \not\equiv a_i - a_j$ есть какое-либо неравенство, принадлежащее $A(V_k) \cap \mathcal{M}(\,\overline{B}\,)$; тогда это множество содержит также неравенство $x_j - x_i \not\equiv a_j - a_i$. Но только одно из этих двух неравенств является нормально записанным и принадлежит множествам $\mathcal{N}(B)$ и $A(V_k) \cap \mathcal{N}(B)$. Кроме того, множество $\mathcal{M}(\,\overline{B}\,)$ не содержит неравенств вида $x_i - x_j \not\equiv 0$, поскольку 0 не принадлежит L и, следовательно, не принадлежит также $\overline{B}$. Таким образом, каждому элементу множества $A(V_k) \cap \mathcal{N}(B)$ соответствуют в точности два различных элемента множества $A(V_k) \cap \mathcal{M}(\,\overline{B}\,)$ и это соответствие является взаимно однозначным. Поэтому

$$|A(V_k) \cap \mathcal{M}(\,\overline{B}\,)| = 2\,|A(V_k) \cap \mathcal{N}(B)|;$$

отсюда ввиду равенства (h) следует равенство (l).

§ 3. Основная лемма

Нормально записанная система неравенств S, не содержащая неравенств с нулевыми правыми частями, состоит из следующих подсистем:

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{[n/2]}.$$

Пусть B есть какое-либо подмножество множества L,

$$L = \left\{1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\tfrac{n}{2}\right]\right\}.$$

Обозначим через $S(B)$ систему тех неравенств из S, которые принадлежат подсистемам S_α с индексами α, не принадлежащими множеству B, т.е.

$$S(B) = \bigcup_{\alpha \in L \setminus B} S_\alpha.$$

Через $\mathcal{R}_n(S(B))$ обозначим множество всех решений системы неравенств $S(B)$. Каждое решение системы $S(B)$ является, очевидно, квазирешением ранга $\leqslant |B|$ системы неравенств S, где $|B|$ – мощность множества B. Символом $\mathcal{R}_k(S(B))$ обозначим множество всех k-мерных решений системы $S(B)$.

Имеет место следующая лемма.

(3.1) *Пусть S есть случайная система неравенств мощности t и B – подмножество множества L. Вероятность события, заключающегося в том, что данный k-мерный вектор V_k, $V_k \in \vartheta_k$, является k-мерным решением системы неравенств $S(B)$, выражается формулой*

$$p\big(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\big) = \left(1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}(B)$ есть множество всех неравенств из $\mathcal{N}$, правые части которых принадлежат B. Обозначим через C_1 событие, состоящее в том, что k-мерный вектор V_k удовлетворяет случайно выбранному из $\mathcal{N}$ неравенству, и через C_2 – событие, заключающееся в том, что случайно выбранное из $\mathcal{N}$ неравенство принадлежит $\mathcal{N}(B)$. Через C обозначим событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий C_1, C_2, т.е. $C = C_1 \cup C_2$.

Вероятность $p(C)$ появления события C выражается формулой

$$p(C) = p(C_1) + p(C_2) - p(C_1 C_2). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что имеют место следующие равенства:

$$p(C_1) = \frac{|\mathcal{N} \setminus A(V_k)|}{|\mathcal{N}|}, \quad \text{где } A(V_k) = \{x_i - x_j \not\equiv a_i - a_j\}_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,k},$$

$$p(C_2) = \frac{|\mathcal{N}(B)|}{|\mathcal{N}|}, \tag{3}$$

$$p(C_1C_2) = \frac{\bigl|(\mathcal{N} \setminus A(V_k)) \cap \mathcal{N}(B)\bigr|}{|\mathcal{N}|}\,. \tag{4}$$

Далее, поскольку $|\mathcal{N} \cap A(V_k)| = \frac{1}{2}k(k-1)$,

$$|\mathcal{N} \setminus A(V_k)| = |\mathcal{N}| - \tfrac{1}{2}k(k-1)$$

и, следовательно,

$$p(C_1) = 1 - \frac{k(k-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\,. \tag{5}$$

Кроме того, согласно свойству (l) функции φ (см. § 2)

$$|A(V_k) \cap \mathcal{N}(B)| = \tfrac{1}{2}\,\varphi(V_k, B),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\bigl|(\mathcal{N} \setminus A(V_k)) \cap \mathcal{N}(B)\bigr| &= |\mathcal{N}(B)| - |A(V_k) \cap \mathcal{N}(B)| = \\ &= |\mathcal{N}(B)| - \tfrac{1}{2}\,\varphi(V_k, B).\end{aligned} \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует равенство

$$p(C_1C_2) = \frac{|\mathcal{N}(B)|}{|\mathcal{N}|} - \frac{\varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\,. \tag{7}$$

На основании (2), (3), (5) и (7) заключаем, что

$$p(C) = 1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\,.$$

Пусть S есть случайная система неравенств мощности t, т.е. случайная выборка с возвращением объема t из генеральной совокупности $\mathcal{N}$. Нетрудно видеть, что искомая вероятность $p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr)$ равна вероятности того, что событие C появится t раз подряд при случайном выборе t неравенств из $\mathcal{N}$. Другими словами, искомая вероятность равна вероятности сложного события, состоящего в том, что каждое из t неравенств, случайно выбранных из множества $\mathcal{N}$, будет либо удовлетворяться вектором V_k, либо иметь правую часть, принадлежащую B. Отсюда, поскольку при каждом испытании вероятность появления события C не зависит от того, сколько раз оно появилось в предыдущих испытаниях, следует, что искомая вероятность равна $(p(C))^t$, т.е.

$$p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr) = \left(1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t.$$

Таким образом, лемма (3.1) доказана.

(3.2) *Пусть S есть случайная система неравенств мощности t и $B \subset L$. Вероятность события, состоящего в том, что данный n-мерный вектор V_n, $V_n \in \vartheta_n$, есть решение системы неравенств $S(B)$, выражается формулой*

$$p\bigl(V_n \in \mathcal{R}_n(S(B))\bigr) = \left(1 - \frac{n(n - |\overline{B}| - 1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t.$$

Предложение (3.2) непосредственно следует из (3.1), так как $\varphi(V_n, B) = n\,|\overline{B}|$ (см. § 2, свойство (e) функции φ).

(3.3) *Вероятность события, заключающегося в том, что данный вектор V_k, $V_k \in \vartheta_k$, является k-мерным решением случайной системы неравенств S мощности t, выражается формулой*

$$p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S)\bigr) = \left(1 - \frac{k(k-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Это предложение является частным случаем леммы (3.1). Действительно, если в качестве B взять пустое множество, то $\varphi(V_k, B) = 0$.

§ 4. Оценки сверху и снизу среднего значения вероятностей $p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr)$

Предположим, что из множества $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$ случайным образом выбираются элементы (V_k, B), причем вероятность появления любого такого элемента равна $\dfrac{1}{|\vartheta_k \times \mathcal{B}_m|} = \dfrac{1}{A_n^k \cdot C_{[n/2]}^m}$. Тогда функцию φ мы можем рассматривать как случайную величину, определенную на множестве $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$. Следовательно, ввиду леммы (3.1) $p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr)$ мы можем также рассматривать как случайную величину, определенную на множестве $\vartheta_k \times \mathcal{B}_m$.

(4.1) Определение. Обозначим через $p_k^{(m)}$ математическое ожидание случайной величины $p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr)$:

$$\begin{aligned} p_k^{(m)} &= Mp\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr) = \\ &= M\left(1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t \qquad \bigl(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\ m = 0,\, 1,\, \ldots,\, \left[\tfrac{n}{2}\right]\bigr). \end{aligned}$$

(4.2) *Имеет место следующая формула*:

$$p_k^{(m)} = \frac{1}{A_n^k \cdot C_{[n/2]}^m} \cdot \sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr).$$

Это предложение непосредственно следует из определения (4.1).

(4.3) *Имеет место формула*

$$p_k^{(0)} = \left(1 - \frac{k(k-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Это предложение непосредственно следует из предложения (3.3) и определения (4.1).

(4.4) *При нечетном n имеет место формула*

$$p_n^{(m)} = \left(\frac{n^2 - 2(n-m) + 1}{n^2 - n}\right)^t \qquad \bigl(m = 0,\, 1,\, \ldots,\, \tfrac{n-1}{2}\bigr). \qquad \textbf{(I)}$$

Доказательство. Согласно лемме (3.1)

$$p\bigl(V_n \in \mathcal{R}_n(S(B))\bigr) = \left(1 - \frac{n(n-1) - \varphi(V_n, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t. \tag{1}$$

Далее, согласно свойству (e) функции φ [см. (2.2)]

$$\varphi(V_n, B) = n\,|\overline{B}|$$

и, следовательно,

$$\varphi(V_n, B) = 2mn \qquad (m = |B|), \tag{2}$$

поскольку $|\overline{B}| = 2\,|B| = 2m$ при нечетном n. Кроме того, при нечетном n

$$|\mathcal{N}| = \tfrac{1}{2}\,n^2(n-1). \tag{3}$$

Заменяя в (1) $\varphi(V_n, B)$ и $|\mathcal{N}|$ согласно формулам (2) и (3), получим

$$p\bigl(V_n \in \mathcal{R}_n(S(B))\bigr) = \left(\frac{n^2 - 2(n-m) + 1}{n^2 - n}\right)^t. \tag{4}$$

Из (4) следует равенство

$$p_n^{(m)} = Mp\bigl(V_n \in \mathcal{R}_n(S(B))\bigr) = \left(\frac{n^2 - 2(n-m) + 1}{n^2 - n}\right)^t.$$

Таким образом, предложение (4.4) доказано.

(4.5) *При четном n имеет место равенство*

$$p_n^{(m)} = \frac{n - 2m}{n} \cdot \left(\frac{n^2 - 2(n-m-1)}{n^2 - n + 1}\right)^t + \frac{2m}{n} \cdot \left(\frac{n^2 - 2(n-m) + 1}{n^2 - n + 1}\right)^t. \qquad \textbf{(II)}$$

Доказательство. Согласно лемме (3.1)

$$p\bigl(V_n \in \mathcal{R}_n(S(B))\bigr) = \left(1 - \frac{n(n-1) - \varphi(V_n, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t. \tag{1}$$

Далее, ввиду свойства (e) функции φ [см. (2.2)]

$$\varphi(V_n, B) = n\,|\overline{B}|.$$

В § 2 было отмечено, что

$$|\overline{B}| = \begin{cases} 2m, & \text{если } \frac{n}{2} \notin B, \\ 2m-1, & \text{если } \frac{n}{2} \in B \end{cases} \qquad (m = |B|).$$

Следовательно,

$$\varphi(V_n, B) = \begin{cases} 2nm, & \text{если } \frac{n}{2} \notin B, \\ n(2m-1), & \text{если } \frac{n}{2} \in B. \end{cases} \tag{2}$$

Вероятность события, состоящего в том, что случайно выбранное множество B из $\mathcal{B}_m$ не содержит элемент $\frac{n}{2}$, очевидно, равна

$$\frac{C^m_{[n/2]-1}}{C^m_{[n/2]}} = \frac{n-2m}{n}\,.$$

Поэтому вероятность события, состоящего в том, что для случайно выбранного элемента (V_n, B) из $\vartheta_n \times \mathcal{B}_m$ имеет место равенство $\varphi(V_n, B) = 2nm$, равна $\frac{n-2m}{n}$:

$$p\bigl(\varphi(V_n, B) = 2nm\bigr) = \frac{n-2m}{n}\,, \qquad p\bigl(\varphi(V_n, B) = n(2m-1)\bigr) = \frac{2m}{n}\,. \tag{3}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что

$$p_n^{(m)} = Mp\bigl(V_n \in \mathcal{R}_n(S(B))\bigr) = \\ = \frac{n-2m}{n} \cdot \left(1 - \frac{n(n-2m-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t + \frac{2m}{n} \cdot \left(1 - \frac{n(n-2m)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t. \tag{4}$$

В § 1 было отмечено, что при n четном

$$|\mathcal{N}| = \tfrac{1}{2}\,n(n^2 - n + 1). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует искомая формула (II). Предложение (4.5) доказано.

(4.6) *Имеет место следующая оценка сверху для величины* $p_k^{(m)}$:

$$p_k^{(m)} \leqslant \left(1 - \frac{k(k-2m-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t.$$

Это предложение непосредственно следует из (3.1) ввиду свойства (d) функции φ [см. (2.2)].

(4.7) *Имеет место следующая оценка снизу для величины* $p_k^{(m)}$:

$$\left(1 - \frac{k(k-1) \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right] - m\right)}{2\left[\frac{n}{2}\right] \cdot |\mathcal{N}|}\right)^t \leqslant p_k^{(m)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(u_1, \ldots, u_s)$ от s переменных $u_1, \ldots, u_s$, определяемую соотношением

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_s) = \sum_{i=1}^{s} u_i^t \qquad \text{при } 0 < u_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где t – целое положительное число $\geqslant 2$ и $u_1, \ldots, u_s$ – действительные переменные, связанные соотношением

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_s = c \qquad (0 < c < s). \tag{1}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция F при условии (1) имеет минимум в точке

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_s = \frac{c}{s}$$

и этот минимум является единственным. Следовательно, функция F при условии (1) в этой точке достигает наименьшего значения.

На основании этого и принимая во внимание равенство [см. свойство (g) функции φ из (2.2)]

$$\frac{1}{C_{[n/2]}^{m} \cdot A_n^k} \cdot \sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} \varphi(V_k, B) = \frac{mk(k-1)}{[n/2]}$$

заключаем, что значение суммы

$$\sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} \left(1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t$$

может только уменьшиться, если мы заменим в ней значения функции φ ее средним значением, равным $\frac{mk(k-1)}{[n/2]}$. Таким образом, мы убеждаемся в том, что имеет место неравенство

$$\sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} \left(1 - \frac{k(k-1) - \frac{mk(k-1)}{[n/2]}}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t \leqslant \sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} \left(1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t$$

и, следовательно, также неравенство

$$\left(1 - \frac{k(k-1) \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right] - m\right)}{2\left[\frac{n}{2}\right] \cdot |\mathcal{N}|}\right)^t \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\vartheta_k \times \mathcal{B}_m|} \cdot \sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} \left(1 - \frac{k(k-1) - \varphi(V_k, B)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t = p_k^{(m)}.$$

Таким образом, предложение (4.7) доказано.

§ 5. Вероятность события, заключающегося в том, что случайный k-мерный вектор является квазирешением данного ранга случайной системы неравенств

(5.1) Обозначим через $\pi_k^{(m)}$ вероятность события, состоящего в том, что случайно выбранный из множества ϑ_k k-мерный вектор является квазирешением ранга m случайной системы неравенств (по модулю n) мощности t.

Главной целью настоящего параграфа является вывод формул [см. (5.3) и (5.4)] для вероятностей $\pi_k^{(m)}$ и $\pi_n^{(m)}$.

Пусть S есть случайная система неравенств мощности t и $\{S_i\}_{i\in L}$ – множество ее подсистем. Обозначим через $C(F)$ событие, состоящее в том, что случайно выбранный из множества ϑ_k вектор V_k удовлетворяет системе $\bigcup\limits_{i\in F} S_i$, $F\subset L$. Через $\sigma_r(k)$ обозначим сумму вероятностей событий $C(F)$ с $F\in\mathcal{B}_r$,

$$\sigma_r(k)=\sum_{F\in\mathcal{B}_r} p(C(F)) \qquad \left(r=0,\,1,\,\ldots,\,\left[\tfrac{n}{2}\right]\right),$$

где через $\mathcal{B}_r$ обозначена совокупность всех подмножеств мощности r множества $L=\left\{1,\,2,\,\ldots,\,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$; в частности, $\sigma_0(k)=1$.

(5.2) *Имеет место формула*

$$\sigma_r(k)=\sum_{F\in\mathcal{B}_r} p(C(F))=C^r_{[n/2]}\cdot p_k^{([n/2]-r)}=C^m_{[n/2]}\cdot p_k^{(m)} \quad \left(0\leqslant r\leqslant\left[\tfrac{n}{2}\right]\right), \tag{1}$$

где $m=\left[\frac{n}{2}\right]-r$.

Доказательство. Обозначим через $D(V_k)$ событие, состоящее в том, что случайно выбранный из множества ϑ_k k-мерный вектор есть заданный вектор V_k. Легко видеть, что

$$p(D(V_k))=\frac{1}{|\vartheta_k|}=\frac{1}{A_n^k}\,. \tag{2}$$

Событие $C(F)$ может произойти лишь при условии, что произошло одно из событий $D(V_k)$. Поэтому согласно формуле полной вероятности

$$p(C(F))=\sum_{V_k\in\vartheta_k} p\big(C(F)\mid D(V_k)\big)\cdot p(D(V_k)). \tag{3}$$

Положим $B=L\setminus F$, тогда $S(B)=\bigcup\limits_{i\in F} S_i$. Нетрудно видеть, что

$$p\big(C(F)\mid D(V_k)\big)=p\big(V_k\in\mathcal{R}_k(S(B))\big), \tag{4}$$

так как $p\big(V_k\in\mathcal{R}_k(S(B))\big)$ есть вероятность события, состоящего в том, что данный вектор V_k принадлежит множеству k-мерных решений системы неравенств $S(B)=\bigcup\limits_{i\in F} S_i$, т.е. удовлетворяет системе $\bigcup\limits_{i\in F} S_i$. Из (2), (3), (4) следует формула

$$p(C(F))=\frac{1}{A_n^k}\cdot\sum_{V_k\in\vartheta_k} p\big(V_k\in\mathcal{R}_k(S(B))\big),$$

из которой следуют равенства

$$\sigma_r(k) = \sum_{F \in \mathcal{B}_r} p(C(F)) = \frac{1}{A_n^k} \cdot \sum_{(V_k,\, B) \in \vartheta_k \times \mathcal{B}_m} p\bigl(V_k \in \mathcal{R}_k(S(B))\bigr) =$$
$$= \frac{1}{A_n^k} \cdot |\vartheta_k \times \mathcal{B}_m| \cdot p_k^{(m)} = C_{[n/2]}^m \cdot p_k^{(m)},$$

где $m = \left[\frac{n}{2}\right] - r$. Предложение (5.2) доказано.

Ниже будет встречаться сумма $\sum\limits_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, C_m^i\, p_k^{(i)}$. Эту сумму ради краткости будем записывать в виде $(p_k - 1)^{(m)}$. Таким образом, символ $(p_k - 1)^{(m)}$ определяется с помощью равенства

$$(p_k - 1)^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, C_m^i\, p_k^{(i)},$$

в частности,

$$(p_k - 1)^{(0)} = p_k^{(0)}.$$

(5.3) Теорема. *Имеет место следующая формула для вероятности* $\pi_k^{(m)}$:

$$\pi_k^{(m)} = C_{[n/2]}^m \cdot (p_k - 1)^{(m)} = C_{[n/2]}^m \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, C_m^i\, p_k^{(i)}. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим через C_i событие, состоящее в том, что случайно выбранный из ϑ_k k-мерный вектор удовлетворяет подсистеме S_i случайной системы неравенств S, $i \in L$.

Как известно (см. Феллер [1], гл. IV, § 3), вероятность $P_{[r]}$ одновременного осуществления в точности r из $\left[\frac{n}{2}\right]$ событий $C_1, C_2, \ldots, C_{[n/2]}$ дается формулой

$$P_{[r]} = \sigma_r(k) - C_{r+1}^r\, \sigma_{r+1}(k) + C_{r+2}^r\, \sigma_{r+2}(k) - \ldots \pm C_{[n/2]}^r\, \sigma_{[n/2]}(k). \tag{2}$$

Далее, в силу (5.2)

$$\sigma_i(k) = C_{[n/2]}^i \cdot p_k^{([n/2]-i)}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует равенство

$$P_{[r]} = \sum_{j=0}^{[n/2]-r} (-1)^j \cdot C_{r+j}^r \cdot C_{[n/2]}^{r+j} \cdot p_k^{([n/2]-r-j)}. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$C_{r+j}^r \cdot C_{[n/2]}^{r+j} = C_{[n/2]}^r \cdot C_{[n/2]-r}^j = C_{[n/2]}^m \cdot C_m^j \qquad \bigl(m = \left[\tfrac{n}{2}\right] - r\bigr). \tag{5}$$

На основании равенств (4) и (5) заключаем, что

$$P_{[r]} = C^m_{[n/2]} \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, C^i_m\, p^{(i)}_k. \tag{6}$$

Принимая во внимание определение (5.1), заключаем, что

$$\pi^{(m)}_k = P_{[r]}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует формула (1). Теорема доказана.

(5.4) Теорема. *Имеет место следующая формула для вероятности* $\pi^{(m)}_n$:

$$\pi^{(m)}_n = C^m_{[n/2]} \cdot (p_n - 1)^{(m)} = C^m_{[n/2]} \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, C^i_m\, p^{(i)}_n, \tag{III}$$

причем $p^{(i)}_n$ *определяется формулами* (I) *и* (II) *предложений* (4.4) *и* (4.5).

Эта теорема непосредственно следует из теоремы (5.3) и предложений (4.4) и (4.5).

(5.5) Обозначим через $P_m(k)$ вероятность события, заключающегося в том, что случайно выбранный из множества ϑ_k k-мерный вектор является квазирешением ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств (по модулю n) мощности t.

(5.6) *Имеет место следующая формула для вероятности* $P_m(k)$:

$$P_m(k) = \sum_{i=0}^{m} C^i_{[n/2]} \cdot (p_k - 1)^{(i)}.$$

Это предложение непосредственно следует из теоремы (5.3), поскольку

$$P_m(k) = \sum_{i=0}^{m} \pi^{(i)}_k.$$

(5.7) *Имеют место следующие неравенства для вероятности* $\pi^{(m)}_k$:

$$C^m_{[n/2]} \cdot \left(p^{(m)}_k - m p^{(m-1)}_k\right) \leqslant \pi^{(m)}_k \leqslant C^m_{[n/2]} \cdot p^{(m)}_k. \tag{1}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы (5.3) были определены события C_i; символом $P_{[r]}$ мы обозначили вероятность одновременного осуществления в точности r из $\left[\frac{n}{2}\right]$ событий $C_1, C_2, \ldots, C_{[n/2]}$. При этом отмечалось, что

$$\pi^{(m)}_k = P_{[r]}. \tag{2}$$

Неравенства (1) легко следуют из предложения (5.2) и следующего неравенства Бонферрони (см. Феллер [1], гл. IV, §6) для вероятности $P_{[r]}$:

$$\sigma_r(k) - (r+1)\,\sigma_{r+1}(k) \leqslant P_{[r]} \leqslant \sigma_r(k). \tag{3}$$

Действительно, ввиду (5.2)

$$\sigma_r(k) = C^m_{[n/2]} \cdot p^{(m)}_k, \tag{4}$$

где $m = \left[\frac{n}{2}\right] - r$,

$$\begin{aligned}\sigma_r(k) - (r+1)\,\sigma_{r+1}(k) &= C^r_{[n/2]} \cdot p^{(m)}_k - (r+1)\,C^{r+1}_{[n/2]} \cdot p^{(m-1)}_k = \\ &= C^m_{[n/2]} \cdot \bigl(p^{(m)}_k - m p^{(m-1)}_k\bigr).\end{aligned} \tag{5}$$

На основании соотношений (2), (3), (4) и (5) заключаем, что имеют место неравенства (1). Предложение (5.7) доказано.

(5.8) *Имеют место следующие неравенства для вероятности* $P_m(k)$:

$$C^m_{[n/2]} \cdot \left(p^{(m)}_k - \frac{m\bigl(\left[\frac{n}{2}\right] - m\bigr)}{\left[\frac{n}{2}\right] - m + 1} \cdot p^{(m-1)}_k\right) \leqslant P_m(k) \leqslant C^m_{[n/2]} \cdot p^{(m)}_k. \tag{1}$$

Доказательство. Для вероятности $P_m(k)$ имеют место следующие неравенства Бонферрони (см. Феллер [1], гл. IV, § 6):

$$\sigma_r(k) - r\sigma_{r+1}(k) \leqslant P_m(k) \leqslant \sigma_r(k) \qquad \bigl(r = \left[\tfrac{n}{2}\right] - m\bigr)\,. \tag{2}$$

Далее, ввиду (5.2)

$$\sigma_r(k) = C^m_{[n/2]} \cdot p^{(m)}_k, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(k) - r\sigma_{r+1}(k) &= C^r_{[n/2]} \cdot p^{(m)}_k - rC^{r+1}_{[n/2]} \cdot p^{(m-1)}_k = \\ &= C^m_{[n/2]} \cdot \left(p^{(m)}_k - \tfrac{rm}{r+1}\, p^{(m-1)}_k\right).\end{aligned} \tag{4}$$

На основании (2), (3) и (4) заключаем, что имеют место неравенства (1) предложения (5.8).

§ 6. Математическое ожидание числа решений и числа квазирешений данного ранга случайной системы неравенств

Обозначим через $F^{(m)}_k(S)$ множество всех k-мерных квазирешений ранга m системы S и через $\mathcal{R}^{(m)}_k(S)$ – множество всех k-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ системы S.

(6.1) Теорема. *Математическое ожидание числа n-мерных решений случайной системы неравенств S (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$M\,|\mathcal{R}^{(0)}_n(S)| = n! \cdot \left(1 - \frac{n(n-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t, \tag{1}$$

где

$$|\mathcal{N}| = \begin{cases} \ \ \frac{1}{2}\, n^2(n-1) & \text{\textit{при} } n \text{ \textit{нечетном},} \\ \frac{1}{2}\, n(n^2-n+1) & \text{\textit{при} } n \text{ \textit{четном}.} \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Согласно предложению (4.3) вероятность $p_n^{(0)}$ события, состоящего в том, что случайно выбранный из ϑ_n n-мерный вектор V_n является решением случайной системы неравенств S мощности t, дается формулой

$$p_n^{(0)} = \left(1 - \frac{n(n-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t.$$

Отсюда, поскольку $|\vartheta_n| = n!$, следует, что

$$M\,|\mathcal{R}_n^{(0)}(S)| = |\vartheta_n| \cdot p_n^{(0)} = n! \cdot \left(1 - \frac{n(n-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t. \tag{3}$$

В § 1 была доказана формула (2) для $|\mathcal{N}|$.

На основании (2) и (3) заключаем, что имеет место формула (1). Теорема доказана.

Каждому решению $(a_1, \ldots, a_n)$ какой-либо системы неравенств S (по модулю n) соответствует n эквивалентных ему решений $(a_1 + c, \ldots, a_n + c)$, где $c = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что мощность множества неэквивалентных решений (например, решений, у которых $a_1 = 0$) системы неравенств S равна $\frac{1}{n}\,|\mathcal{R}_n^{(0)}(S)|$.

Естественно возникает вопрос: при каком значении t случайная система неравенств имеет в среднем единственное решение, т.е.

$$M\left(\tfrac{1}{n}\,|\mathcal{R}_n^{(0)}(S)|\right) = 1? \tag{A}$$

На основании теоремы (6.1) заключаем, что равенство (A) может быть записано в виде

$$(n-1)! \cdot \left(1 - \frac{n(n-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t = 1. \tag{B}$$

Из (B) следует, что

$$t = \frac{\ln(n-1)!}{\ln(2\,|\mathcal{N}|) - \ln\bigl(2\,|\mathcal{N}| - n(n-1)\bigr)}\,, \tag{C}$$

причем $|\mathcal{N}|$ определяется по формуле (2) теоремы (6.1). Таким образом, всякий раз, когда задано n, с помощью формулы (C) может быть найдено такое значение t, при котором случайная система неравенств мощности t имеет в среднем единственное решение.

(6.2) Теорема. *Математическое ожидание числа n-мерных квазирешений ранга m случайной системы неравенств S (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$M\,|F_n^{(m)}(S)| = n!\cdot C_{[n/2]}^m\cdot(p_n-1)^{(m)} =$$
$$= n!\cdot C_{[n/2]}^m\cdot\sum_{i=0}^m(-1)^{m-i}\,C_m^i\,p_n^{(i)}\qquad\left(m=0,\,1,\,\ldots,\,\left[\tfrac{n}{2}\right]\right),\quad(1)$$

причем $p_n^{(i)}$ *определяется формулами* (I) *и* (II) *предложений* (4.4) *и* (4.5).

Доказательство. Нетрудно видеть, что математическое ожидание случайной величины $|F_n^{(m)}(S)|$, т.е. математическое ожидание числа n-мерных квазирешений ранга m случайной системы неравенств S, равно произведению мощности множества ϑ_n всех n-мерных векторов на $\pi_n^{(m)}$,

$$M\,|F_n^{(m)}(S)| = |\vartheta_n|\cdot\pi_n^{(m)} = n!\cdot\pi_n^{(m)},\quad(2)$$

где $\pi_n^{(m)}$ – вероятность события, заключающегося в том, что случайно выбранный из ϑ_n n-мерный вектор является квазирешением ранга m случайной системы неравенств. Заменяя в (2) $\pi_n^{(m)}$ по формуле (III) теоремы (5.4), получаем искомую формулу (1). Теорема доказана.

(6.3) Теорема. *Математическое ожидание числа n-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств S (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$M\,|\mathcal{R}_n^{(m)}(S)| = n!\cdot\sum_{i=0}^m C_{[n/2]}^i\cdot(p_n-1)^{(i)} =$$
$$= n!\cdot\sum_{i=0}^m C_{[n/2]}^i\cdot\sum_{j=0}^i(-1)^{i-j}\,C_i^j\,p_n^{(j)},\quad(1)$$

причем $p_n^{(j)}$ *находится по формулам* (I), (II) *предложений* (4.4) *и* (4.5).

Доказательство. Математическое ожидание числа n-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств S равно произведению мощности множества ϑ_n на $P_m(n)$,

$$M\,|\mathcal{R}_n^{(m)}(S)| = |\vartheta_n|\cdot P_m(n) = n!\cdot P_m(n),\quad(2)$$

где $P_m(n)$ – вероятность события, заключающегося в том, что случайно выбранный из ϑ_n n-мерный вектор является квазирешением ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств S. Согласно предложению (5.6)

$$P_m(n) = \sum_{i=0}^m\pi_n^{(i)} = \sum_{i=0}^m C_{[n/2]}^i\cdot(p_n-1)^{(i)} = \sum_{i=0}^m C_{[n/2]}^i\cdot\sum_{j=0}^i(-1)^{i-j}\,C_i^j\,p_n^{(j)}.\quad(3)$$

Из (2) и (3) следует формула (1). Теорема доказана.

(6.4) Теорема. *Математическое ожидание числа k-мерных квазирешений ранга m случайной системы неравенств S (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$M\,|F_k^{(m)}(S)| = A_n^k \cdot C_{[n/2]}^m \cdot (p_k - 1)^{(m)} = A_n^k \cdot C_{[n/2]}^m \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\, C_m^i\, p_k^{(i)}. \qquad (1)$$

Доказательство. Математическое ожидание числа $|F_k^{(m)}(S)|$ k-мерных квазирешений ранга m случайной системы неравенств S равно $|\vartheta_k| \cdot \pi_k^{(m)}$,

$$M\,|F_k^{(m)}(S)| = |\vartheta_k| \cdot \pi_k^{(m)} = A_n^k \cdot \pi_k^{(m)}, \qquad (2)$$

поскольку $\pi_k^{(m)}$ равно вероятности события, заключающегося в том, что случайно выбранный из ϑ_k k-мерный вектор является квазирешением ранга m случайной системы неравенств. Из (2) и формулы (1) теоремы (5.3) следует искомая формула. Теорема доказана.

(6.5) Теорема. *Математическое ожидание числа k-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств S мощности t дается формулой*

$$\begin{aligned} M\,|\mathcal{R}_k^{(m)}(S)| &= A_n^k \cdot \sum_{i=0}^{m} C_{[n/2]}^i \cdot (p_k - 1)^{(i)} = \\ &= A_n^k \cdot \sum_{i=0}^{m} C_{[n/2]}^i \cdot \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\, C_i^j\, p_k^{(j)}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из теоремы (6.4), поскольку

$$\mathcal{R}_k^{(m)}(S) = \bigcup_{i=0}^{m} F_k^{(i)}(S), \qquad |\mathcal{R}_k^{(m)}(S)| = \sum_{i=0}^{m} |F_k^{(i)}(S)|$$

и, следовательно,

$$M\,|\mathcal{R}_k^{(m)}(S)| = \sum_{i=0}^{m} M\,|F_k^{(i)}(S)| = A_n^k \cdot \sum_{i=0}^{m} C_{[n/2]}^i \cdot (p_k - 1)^{(i)}.$$

§ 7. Схема нахождения множества $R_n^{(m)}(S)$ всех (неэквивалентных) n-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств по модулю n мощности t. Математическое ожидание числа элементарных операций, необходимых для нахождения множества $R_n^{(m)}(S)$

Пусть

$$x_{i_q} - x_{j_q} \not\equiv \alpha_q \pmod{n} \qquad (q = 1,\, 2,\, \ldots,\, t) \qquad (S)$$

есть случайная система t неравенств. Далее, пусть $V_k = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k) \in \vartheta_k$. Рассмотрим множество всех неравенств системы S, которым не удовлетворяет вектор V_k, т.е. множество тех неравенств, которым не удовлетворяет следующая система значений неизвестных:

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_k = a_k.$$

Число различных чисел α_q, входящих в неравенства этого множества, обозначим через $r(V_k, S)$. Нетрудно видеть, что k-мерный вектор V_k тогда и только тогда является квазирешением ранга $\leqslant m$ системы S, когда $r(V_k, S) \leqslant m$.

Обозначим через $R_k^{(m)}(S)$ множество всех k-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ системы S, у которых $a_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$|R_k^{(m)}(S)| = \tfrac{1}{n}\,|\mathcal{R}_k^{(m)}(S)|. \tag{1}$$

Нахождение множества $R_n^{(m)}(S)$ всех (неэквивалентных) n-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ системы неравенств S будем производить по следующей схеме. Предположим, что целое неотрицательное число m нам задано, $0 \leqslant m < \left[\frac{n}{2}\right]$. Множество $R_1^{(m)}(S)$ содержит, очевидно, только один элемент $V_1 = (0)$. Найдем множество $R_2^{(m)}(S)$ двумерных векторов $V_2 = (0,\ a_2)$, для которых $r(V_2, S) \leqslant m$. Для этого надо последовательно придавать a_2 все возможные $n-1$ значений $1,\ \ldots,\ n-1$ и для каждого такого значения установить, выполняется ли условие $r(V_2, S) \leqslant m$. Будем считать поэтому, что для нахождения всех элементов множества $R_2^{(m)}(S)$ затрачивается $n-1$ элементарных операций. Предположим, что множество $R_k^{(m)}(S)$ уже найдено. Для нахождения множества $R_{k+1}^{(m)}(S)$ надо взять каждый вектор $V_k = (0,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k) \in R_k^{(m)}(S)$, т.е. каждую систему значений неизвестных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$

$$(x_1 = 0,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_k = a_k),$$

являющуюся k-мерным квазирешением ранга $\leqslant m$, и, придавая x_{k+1} все $n-k$ возможных значений a_{k+1}, отличных (по модулю n) от чисел $0,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k$, отобрать те из них, для которых вектор $V_{k+1} = (0,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k+1})$ удовлетворяет условию $r(V_{k+1}, S) \leqslant m$. Будем называть *элементарной операцией* проверку выполнимости для вектора V_{k+1} [построенного по данному вектору $V_k \in R_k^{(m)}(S)$] условия $r(V_{k+1}, S) \leqslant m$ и запись вектора V_{k+1} в качестве элемента множества $R_{k+1}^{(m)}(S)$, если это условие выполняется. Тогда, очевидно, для нахождения всех элементов множества $R_{k+1}^{(m)}(S)$ надо затратить $(n-k)\cdot|R_k^{(m)}(S)|$ элементарных операций. Таким образом, исходя из множества $R_1^{(m)}(S)$, содержащего только один элемент, мы последовательно находим множества $R_2^{(m)}(S)$, $R_3^{(m)}(S)$, $\ldots$, $R_{n-1}^{(m)}(S)$ и, наконец, находим искомое множество $R_n^{(m)}(S)$ всех неэквивалентных n-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ системы неравенств S.

Обозначим через $\eta_m(S)$ число элементарных операций, необходимых для нахождения множества $R_n^{(m)}(S)$ по описанной выше схеме. Поскольку S есть случайная система неравенств, $\eta_m(S)$ является случайной величиной. Найдем среднее значение этой случайной величины. Нетрудно видеть, что

$$\eta_m(S) = (n-1)\cdot|R_1^{(m)}(S)| + (n-2)\cdot|R_2^{(m)}(S)| + \ldots + 1\cdot|R_{n-1}^{(m)}(S)|, \tag{2}$$

поскольку множества

$$R_2^{(m)}(S),\ R_3^{(m)}(S),\ \ldots,\ R_n^{(m)}(S)$$

находятся последовательно и для нахождения множества $R_{k+1}^{(m)}(S)$ по найденному множеству $R_k^{(m)}(S)$ надо затратить $(n-k)\cdot|R_k^{(m)}(S)|$ элементарных операций.

Из (1) и (2) следует равенство

$$\eta_m(S) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot|\mathcal{R}_k^{(m)}(S)|. \tag{3}$$

Далее, согласно теореме (6.5)

$$M\,|\mathcal{R}_k^{(m)}(S)| = A_n^k\cdot\sum_{i=0}^{m} C_{[n/2]}^i\cdot(p_k-1)^{(i)}. \tag{4}$$

На основании (3) и (4) заключаем, что имеет место формула

$$M\eta_m(S) = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k\big(p_k^{(0)} + C_{[n/2]}^1\cdot(p_k-1)^{(1)} + \ldots + C_{[n/2]}^m\cdot(p_k-1)^{(m)}\big). \tag{IV}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

(7.1) Теорема. *Математическое ожидание числа $\eta_m(S)$ элементарных операций, необходимых для нахождения (по описанной выше схеме) множества $R_n^{(m)}(S)$ всех (неэквивалентных) n-мерных квазирешений ранга $\leqslant m$ случайной системы неравенств S (по модулю n) мощности t, выражается формулой*

$$\begin{aligned} M\eta_m(S) = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k\Big(p_k^{(0)} + C_{[n/2]}^1\cdot\big(p_k^{(1)}-p_k^{(0)}\big) + \ldots +\\ + C_{[n/2]}^m\cdot\big(p_k^{(m)} - C_m^1\,p_k^{(m-1)} + \ldots + (-1)^m\,p_k^{(0)}\big)\Big), \end{aligned} \tag{V}$$

или, более сжато, формулой (IV).

(7.2) Теорема. *Математическое ожидание числа $\eta_0(S)$ элементарных операций, необходимых для нахождения (по описанной выше схеме) множества $R_n^{(0)}(S)$ всех (неэквивалентных) n-мерных решений случайной системы неравенств S (по модулю n) мощности t, выражается формулой*

$$M\eta_0(S) = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k\,p_k^{(0)} = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k\left(1-\frac{k(k-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t,$$

где

$$|\mathcal{N}| = \begin{cases} \frac{1}{2}\,n^2(n-1) & \text{\textit{при n нечетном,}}\\ \frac{1}{2}\,n(n^2-n+1) & \text{\textit{при n четном.}} \end{cases}$$

Эта теорема непосредственно следует из предложения (4.3) и теоремы (7.1) при $m=0$.

§ 8. Оценка сверху среднего значения случайной величины $\eta_m(S)$ при $m > 0$

(8.1) Теорема. *Имеет место следующая оценка сверху для среднего значения случайной величины* $\eta_m(S)$:

$$M\eta_m(S) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k \cdot \min\left\{1,\ C_{[n/2]}^m \cdot \left(1 - \frac{k(k-2m-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t\right\}, \tag{1}$$

где S – случайная система неравенств (по модулю n) мощности t и

$$|\mathcal{N}| = \begin{cases} \frac{1}{2}\,n^2(n-1) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{1}{2}\,n(n^2-n+1) & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через $w_k^{(m)}$ величину, определяемую равенством

$$w_k^{(m)} = \left(1 - \frac{k(k-2m-1)}{2\,|\mathcal{N}|}\right)^t. \tag{2}$$

В силу (4.6) имеет место неравенство

$$p_k^{(m)} \leqslant w_k^{(m)}.$$

Кроме того, ввиду (5.8) имеет место неравенство

$$P_m(k) \leqslant C_{[n/2]}^m \cdot p_k^{(m)}$$

и, следовательно, также неравенство

$$P_m(k) \leqslant C_{[n/2]}^m \cdot w_k^{(m)}. \tag{3}$$

Поскольку $P_m(k) \leqslant 1$, из (3) следует неравенство

$$P_m(k) \leqslant \min\left\{1,\ C_{[n/2]}^m \cdot w_k^{(m)}\right\}. \tag{4}$$

Согласно (5.6) формулу (V) теоремы (7.1) можно записать в виде

$$M\eta_m(S) = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1}^k P_m(k), \tag{5}$$

поскольку

$$P_m(k) = \sum_{i=0}^{m} C_{[n/2]}^i \cdot (p_k - 1)^{(i)}.$$

На основании (4) и (5) заключаем, что имеет место неравенство (1). Теорема доказана.

Литература

1. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, М.: ИЛ, 1952.

Системы соотношений несравнимости по модулю

Введение

В работе изучаются системы соотношений несравнимости вида

$$x_{i_q} \not\equiv \beta_q \pmod{n} \qquad (q = 1,\, 2,\, \ldots,\, t), \tag{1}$$

где β_q суть вычеты по модулю n, $\beta_q \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$.

К решению такого рода систем сводится задача об отыскании всех подстановок, противоречивых* данному множеству подстановок. Действительно, пусть $\{P_k\}_{k=1,\,2,\,\ldots,\,l}$,

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix},$$

есть заданное множество подстановок. Ставится задача об отыскании таких подстановок X,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix},$$

которые противоречивы подстановкам P_k, т.е. удовлетворяют условиям

$$x_i \not\equiv a_{ik} \pmod{n} \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\; k = 1,\, 2,\, \ldots,\, l). \tag{2}$$

Систему соотношений (2) мы можем рассматривать как систему соотношений несравнимости по модулю n с неизвестными $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$.

Нетрудно видеть, что каждое решение системы (2) даст подстановку, противоречивую данным подстановкам P_k, и, обратно, каждой подстановке, противоречивой подстановкам P_k, соответствует некоторое определенное решение системы (2). Таким образом, задача нахождения совокупности всех подстановок, противоречивых заданному множеству $\{P_k\}_{k=1,\,2,\,\ldots,\,l}$ подстановок, эквивалентна задаче о нахождении множества всех решений системы (2).

Легко видеть, что задача о нахождении множества подстановок, противоречивых заданным неполным подстановкам, также эквивалентна задаче о нахождении множества всех решений системы соотношений несравнимости вида (1).

---

* Термин взят из русского перевода работы [1]. – *Прим. ред.*

Такого рода задачи по существу эквивалентны задачам о подстановках с ограниченными позициями (см., например, главы 7 и 8 работы [1]).

Естественно возникают вопросы о средней мощности множества решений систем вида (1) и о трудоемкости того или иного метода нахождения этого множества. Однако такие вопросы целесообразно ставить для случайных систем вида (1), т.е. для систем, являющихся случайными выборками из множества всех соотношений несравнимости вида

$$x_i \not\equiv \beta \pmod{n}.$$

В связи с этим в работе вводится понятие *случайной системы соотношений несравнимости* по модулю (см. § 2) и для таких систем решаются поставленные выше вопросы.

В первых двух параграфах вводятся основные понятия, в том числе понятия матрицы и характеристического многочлена системы неравенств, понятия решения и квазирешения данного порядка, понятие случайной системы.

В § 3 выводится точная формула для среднего числа решений случайной системы, имеющей заданное число соотношений несравнимости.

В § 4 изложена схема нахождения множества всех решений системы соотношений несравнимости вида (1) и находится формула для среднего числа элементарных операций, необходимых для нахождения по этой схеме множества всех решений случайной системы соотношений несравнимости по модулю.

В § 5 ставится и решается задача нахождения математических ожиданий числа квазирешений порядка m, $0 \leqslant m \leqslant n$, и числа квазирешений порядка, не большего, чем m, случайной системы соотношений несравнимости по модулю.

§ 1. Понятия решения и квазирешения системы неравенств

А. Понятие системы неравенств (системы соотношений несравнимости по модулю)

Обозначим через N полную систему вычетов по модулю n,

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Совокупность соотношений несравнимости по модулю n вида

$$(S) \qquad x_{i_q} \not\equiv \beta_q \pmod{n} \qquad (i_q, \beta_q \in N;\ q = 1, 2, \ldots, t)$$

назовем *системой неравенств первой степени по модулю* n; неизвестные x_1, $x_2, \ldots, x_n$ назовем *неизвестными системы* (S) независимо от того, входят ли все эти неизвестные в систему (S) или нет. Таким образом, число неизвестных системы вида (S) равно модулю n системы. Число t мы называем *мощностью системы* (S); оно указывает число соотношений несравнимости, входящих в систему (S) (некоторые неравенства могут входить в систему неоднократно).

Всюду в данной работе мы будем рассматривать системы неравенств только первой степени. Поэтому ради краткости систему вида (S) мы будем называть просто системой неравенств.

Б. Понятия решения и совместности системы неравенств

n-мерный вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, координаты которого суть вычеты по модулю n, $a_i \in N$, назовем *решением системы неравенств* (S), если выполнены следующие два условия:

(a) вычеты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно несравнимы по модулю n;

(b) система значений

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_n = a_n$$

неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы удовлетворяет каждому соотношению несравнимости системы (S).

Решение системы (S) (в указанном выше смысле) будем называть также *n-мерным* или *полным* решением системы.

Систему неравенств по модулю будем называть *совместной*, если она имеет хотя бы одно полное решение.

Систему неравенств по модулю назовем *несовместной*, если она не имеет полных решений.

В. Множества ϑ_k

Обозначим через ϑ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, множество всех упорядоченных систем значений первых k неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ системы, попарно несравнимых по модулю n.

Таким образом, ϑ_k есть множество всех k-мерных векторов вида $(a_1, \ldots, a_k)$, координаты которых являются попарно несравнимыми по модулю n вычетами. Мощность множества ϑ_k будем обозначать символом $|\vartheta_k|$. Нетрудно видеть, что имеет место формула

$$|\vartheta_k| = A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Г. Понятие k-мерного решения системы неравенств

k-мерный вектор $(a_1, \ldots, a_k)$, координаты a_i которого суть вычеты по модулю n, $a_i \in N$, назовем *k-мерным решением системы неравенств* (S), если выполнены следующие два условия:

(a) вычеты $a_1, \ldots, a_k$ попарно несравнимы по модулю n, т.е. $(a_1, \ldots, a_k) \in \vartheta_k$;

(b) система значений

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_k = a_k$$

первых k неизвестных системы удовлетворяет каждому такому неравенству системы, которое содержит только неизвестные с индексами $\leqslant k$.

Пусть векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1})$ суть соответственно k-мерное и $(k-1)$-мерное решения системы (S). Будем говорить, что k-мерное решение $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ является *продолжением* $(k-1)$-мерного решения $(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1})$, если выполняются следующие условия:

$$b_1 = a_1,\, b_2 = a_2,\, \ldots,\, b_{k-1} = a_{k-1}.$$

Д. Понятие квазирешения порядка m системы неравенств

Обозначим через (S_k) систему, содержащую те и только те неравенства системы (S), неизвестные которых принадлежат множеству $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ (т.е. индексы неизвестных не превышают k). В частности, система (S_n) совпадает с системой (S).

Пусть $V_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – какой-либо элемент множества ϑ_k. Обозначим через $N(V_k, S)$ множество различных неравенств из системы (S_k), которым не удовлетворяет вектор V_k, и через $|N(V_k, S)|$ – мощность этого множества.

Вектор V_k назовем *k-мерным квазирешением порядка m системы* (S), если мощность множества $N(V_k, S)$ равна m. Нетрудно видеть, что

$$0 \leqslant |N(V_k, S)| \leqslant k.$$

В частности, n-мерный вектор $V_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $V_n \in \vartheta_n$, назовем *квазирешением порядка m системы неравенств* (S) по модулю n, если мощность множества $N(V_n, S)$ равна m. Нетрудно видеть, что

$$0 \leqslant |N(V_n, S)| \leqslant n.$$

Квазирешения нулевого порядка системы (S) являются, очевидно, полными решениями этой системы.

§ 2. Матрица и характеристический многочлен системы неравенств

А. Матрица системы неравенств

Системе неравенств (S) по модулю n поставим в соответствие квадратную матрицу

$$A(S) = (\alpha_{ki})_{k,\, i = 1, 2, \ldots, n}$$

порядка n, элементы α_{ki} которой определяются следующим соотношением:

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{если система } (S) \text{ содержит неравенство } x_k \not\equiv i, \\ 1, & \text{если система } (S) \text{ не содержит неравенство } x_k \not\equiv i. \end{cases} \tag{1}$$

Матрицу $A(S)$, элементы которой определяются соотношением (1), назовем *матрицей системы неравенств* (S).

Б. Модуль матрицы

Пусть
$$D = (d_{k,i})_{k,\, i\, =\, 1,\, 2,\, \dots\, ,\, n}$$
есть квадратная матрица порядка n.

Сумму
$$\sum_{(i_1,\, \dots\, ,\, i_n) \in \vartheta_n} d_{1,i_1}\, d_{2,i_2} \dots\, d_{n,i_n}, \tag{2}$$
где ϑ_n – множество n-мерных векторов, координаты которых суть попарно различные вычеты по модулю n, $i_k \in N$, назовем *модулем матрицы* D и будем обозначать символами $|D|$ или $\operatorname{mod} D$.

Отметим, что сумма (2) содержит $n!$ слагаемых и сложение производится обычное, не по модулю.

Приведенное выше понятие модуля матрицы совпадает с понятием «определителя» в смысле, употребляемом в работе А. Г. Лунца [2].

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства модуля матрицы (см. [2]):

(*а*) *Модуль матрицы не меняется при перестановке строк или столбцов матрицы.*

(*б*) *Если все элементы какого-либо столбца или строки матрицы равны нулю, то модуль матрицы равен нулю.*

Из определения модуля также легко получить (аналогично формулам разложения определителя по элементам строки или столбца) следующее свойство:

(*в*) *Модуль матрицы* $A = (\alpha_{ki})_{k,\, i\, =\, 1,\, 2,\, \dots\, ,\, n}$ *может вычисляться по следующим формулам*:
$$\operatorname{mod} A = \alpha_{1i}A_{1i} + \alpha_{2i}A_{2i} + \ldots + \alpha_{ni}A_{ni},$$
$$\operatorname{mod} A = \alpha_{k1}A_{k1} + \alpha_{k2}A_{k2} + \ldots + \alpha_{kn}A_{kn},$$
где A_{ki} *есть модуль матрицы, получающейся из матрицы* A *вычеркиванием* k*-й строки и* i*-го столбца.*

В. Модульный ранг матрицы

Пусть D – какая-либо матрица, каждый элемент которой есть или 0, или 1. Обозначим через $\mathcal{D}_k$ множество всех квадратных матриц порядка k, порождаемых матрицей D.

Будем говорить, что *модульный ранг матрицы* D *равен* r, если множество $\mathcal{D}_r$ содержит хотя бы одну матрицу, модуль которой отличен от нуля, но модуль каждой матрицы из $\mathcal{D}_{r+1}$ равен нулю.

Нетрудно видеть, что модульный ранг матрицы не меньше обычного ранга матрицы.

Г. λ-матрица системы неравенств

Сопоставим системе неравенств (S) по модулю n матрицу $L = (l_{ki})_{k,\, i=1,\,2,\,\dots,\,n}$ порядка n, элементы l_{ki} которой определяются следующим соотношением:

$$l_{ki} = \begin{cases} \lambda, & \text{если система } (S) \text{ содержит неравенство } x_k \not\equiv i \pmod n, \\ 1, & \text{если система } (S) \text{ не содержит неравенство } x_k \not\equiv i \pmod n. \end{cases}$$

Матрицу L назовем λ-*матрицей системы* (S) и будем обозначать также символом $L(S)$.

Д. Характеристический многочлен системы неравенств

Пусть $L(S)$ есть λ-матрица какой-либо системы неравенств (S) по модулю n. Модуль матрицы $L(S)$ является, очевидно, многочленом относительно λ, степень которого меньше или равна n,

$$|L(S)| = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_n\lambda^n.$$

Этот многочлен будем называть *характеристическим многочленом системы* (S) [или λ-*многочленом системы* (S)].

Нетрудно видеть, что коэффициенты c_k характеристического многочлена обладают следующими свойствами:

(*а*) *Число полных решений системы неравенств (S) равно коэффициенту c_0 его характеристического многочлена.*

(*б*) *Система неравенств (S) совместна тогда и только тогда, когда отличен от нуля коэффициент c_0 характеристического многочлена системы (S).*

Это свойство непосредственно следует из свойства (*а*).

(*в*) *Число квазирешений порядка m системы неравенств (S) равно коэффициенту c_m характеристического многочлена системы.*

Это свойство следует из определений характеристического многочлена и квазирешения порядка m системы неравенств (S).

(*г*) *Сумма всех коэффициентов характеристического многочлена системы неравенств (S) по модулю n равна $n!$, т.е.*

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_n = n!\,.$$

Это свойство является следствием того факта, что каждый n-мерный вектор из множества ϑ_n, содержащего $n!$ элементов, является либо решением системы (S), либо квазирешением какого-то порядка этой системы.

§ 3. Среднее число решений и k-мерных решений случайной системы неравенств

А. Множество $M(n)$

Множество всех соотношений несравнимости вида

$$x_k \not\equiv i \pmod{n} \qquad (k, i \in N) \tag{1}$$

обозначим символом $M(n)$ и будем называть *множеством всех неравенств по модулю n.*

Поскольку k и i могут принимать независимо друг от друга n значений, $k, i \in N$, то существует n^2 различных соотношений несравнимости вида (1), т.е. мощность множества $M(n)$ равна n^2.

Б. Понятие случайной системы неравенств. Множество $\sigma(n, t)$

Систему неравенств

$$(S) \qquad x_{i_q} \not\equiv \beta_q \pmod{n} \qquad (i_q, \beta_q \in N;\ q = 1, 2, \ldots, t)$$

назовем *случайной системой неравенств по модулю n мощности t*, если последовательность неравенств

$$x_{i_1} \not\equiv \beta_1,\ x_{i_2} \not\equiv \beta_2,\ \ldots,\ x_{i_t} \not\equiv \beta_t$$

является случайной выборкой с возвращением объема t из генеральной совокупности $M(n)$.

Множество всех случайных систем неравенств по модулю n мощности t будем обозначать символом $\sigma(n, t)$.

В. Математическое ожидание числа k-мерных решений случайной системы неравенств

Теорема 1. *Математическое ожидание числа $\rho_k(S)$ k-мерных решений случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$\underset{S\in\sigma(n,t)}{M} \rho_k(S) = A_n^k \left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

или приближенной формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,t)}{M} \rho_k(S) \approx A_n^k\, e^{-kt/n^2}. \tag{II}$$

Доказательство. Пусть $V_k = (a_1, \ldots, a_k)$ есть какой-либо вектор, являющийся элементом множества ϑ_k (см. § 1, п. В). Найдем вероятность $p(V_k, t)$

события, состоящего в том, что данный вектор V_k является k-мерным решением случайной системы неравенств (S) мощности t. Таким образом, надо найти вероятность $p(V_k, t)$ события, состоящего в том, что заданная система значений первых k неизвестных,

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_k = a_k, \tag{1}$$

удовлетворяет каждому неравенству из случайной последовательности t неравенств по модулю n. При этом мы будем считать, что система значений (1) удовлетворяет также каждому такому неравенству, которое не содержит первые k неизвестных.

Вероятность элементарного события, состоящего в том, что данная система значений удовлетворяет неравенству вида

$$x_{i_q} \not\equiv \beta_q \pmod{n},$$

случайно выбранному из множества $M(n)$ (см. § 3, п. А), равна, как нетрудно видеть, $1 - \frac{k}{n^2}$. Отсюда следует, что вероятность сложного события, состоящего в том, что заданная система (1) значений первых k неизвестных удовлетворяет случайной последовательности t неравенств [т.е. случайной выборке с возвращением t неравенств из генеральной совокупности $M(n)$], равна $\left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t$, т.е.

$$p(V_k, t) = \left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t.$$

Следовательно, $\left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t$ есть вероятность события, состоящего в том, что данный вектор V_k, $V_k \in \vartheta_k$, является k-мерным решением случайной системы неравенств мощности t. Отсюда, поскольку мощность множества ϑ_k равна A_n^k, следует, что математическое ожидание числа $\rho_k(S)$ k-мерных решений случайной системы (S), содержащей t неравенств, выражается формулой

$$\underset{S \in \sigma(n,\,t)}{M} \rho_k(S) = \sum_{V_k \in \vartheta_k} p(V_k, t) = |\vartheta_k| \cdot p(V_k, t) = A_n^k \left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t.$$

Формула (I) доказана.

Из формулы (I) следует приближенная формула (II), поскольку

$$1 - \frac{k}{n^2} \approx e^{-k/n^2}.$$

Г. Математическое ожидание числа полных решений случайной системы неравенств

Теорема 1а. *Математическое ожидание числа $\rho(S)$ полных решений случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$\underset{S \in \sigma(n,\,t)}{M} \rho(S) = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t \tag{\textbf{III}}$$

или приближенной формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\rho(S)\approx n!\cdot e^{-t/n}. \qquad \textbf{(IV)}$$

Поскольку $\rho(S)=\rho_n(S)$, формулы (III) и (IV) непосредственно следуют соответственно из формул (I) и (II). Таким образом, рассматриваемая теорема является важным частным случаем предыдущей теоремы.

Теорема 2. *Вероятность совместности случайной системы t неравенств по модулю n меньше, чем $n!\cdot e^{-t/n}$.*

Доказательство. Символом $\sigma(n,t)$ мы обозначили (см. § 3, п. Б) множество всех систем неравенств по модулю n мощности t; символом $\sigma^*(n,t)$ обозначим множество всех совместных систем, принадлежащих $\sigma(n,t)$.

Если система неравенств (S) совместна, то она имеет хотя бы одно полное решение и, значит, $\rho(S)\geqslant 1$; если же система (S) несовместна, то $\rho(S)=0$. Поэтому имеет место равенство

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\rho(S)=p\cdot\Big(\underset{S\in\sigma^*(n,\,t)}{M}\rho(S)\Big), \qquad (1)$$

где p – вероятность совместности случайной системы t неравенств по модулю n.

Кроме того,

$$\underset{S\in\sigma^*(n,\,t)}{M}\rho(S)\geqslant 1, \qquad (2)$$

поскольку $\rho(S)\geqslant 1$ для $S\in\sigma^*(n,\,t)$.

Из (1) и (2) следует неравенство

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\rho(S)\geqslant p. \qquad (3)$$

Из формулы (III) предыдущей теоремы и неравенства (3) следует неравенство

$$p\leqslant n!\cdot\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^t. \qquad (4)$$

Известно, далее, что имеет место неравенство

$$1-\tfrac{1}{n}<e^{-1/n} \qquad (n=1,\,2,\,\ldots). \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует неравенство $p<n!\cdot e^{-t/n}$, которое и надо было доказать.

§ 4. Схема решения системы неравенств. Среднее число элементарных операций, затрачиваемых при нахождении множества решений случайной системы неравенств

А. Множества $R_k(S)$

Пусть (S) есть система неравенств по модулю n мощности t и $A(S)=(\alpha_{ki})$, $k,i\in N$, – матрица системы (см. § 2, п. А). Символом $R_k(S)$ всюду ниже будем обозначать множество всех k-мерных решений системы (S), $k \in N$. В частности, $R_n(S)$ есть множество всех полных решений системы (S), которое мы также будем обозначать символом $R(S)$.

Символом $|R_k(S)|$ будем обозначать мощность множества $R_k(S)$.

Б. Множество $Q(V_{k-1})$ и понятие элементарной операции

Предположим, что нам дано какое-либо $(k-1)$-мерное решение

$$V_{k-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$$

системы неравенств (S) и надо найти множество $Q(V_{k-1})$ всех k-мерных решений этой системы, продолжающих данное решение V_{k-1} (см. § 1, п. Г). Пусть α_{ki} есть элемент k-й строки и i-го столбца матрицы $A(S)$ системы (S). Нетрудно убедиться в том, что вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, i)$ тогда и только тогда будет решением системы (S), когда $\alpha_{ki} = 1$ и

$$i \in N \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\},$$

где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. На основании этого заключаем, что

$$Q(V_{k-1}) = \bigl\{(a_1, \ldots, a_{k-1}, i) \bigm| \alpha_{ki} = 1,\ i \in N \setminus \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}\bigr\}. \tag{1}$$

Таким образом, для того чтобы установить для данных вектора V_{k-1} и индекса

$$i \in N \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\},$$

какое из двух соотношений

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, i) \in Q(V_{k-1}), \tag{d$_1$}$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, i) \notin Q(V_{k-1}) \tag{d$_2$}$$

справедливо, достаточно, как показывает равенство (1), проверить выполнимость условия $\alpha_{ki} = 1$. Если это условие выполнено, то имеет место соотношение (d_1) и вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, i)$ надо запомнить в качестве элемента множества $Q(V_{k-1})$.

Элементарной операцией мы назовем проверку для заданного вектора

$$V_{k-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$$

и данного вычета

$$i \in N \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

выполнимости условия $\alpha_{ki} = 1$ и запоминание вектора $(a_1, \ldots, a_{k-1}, i)$ в качестве элемента множества $Q(V_{k-1})$ при выполнении этого условия.

Нетрудно убедиться в том, что множество $R_k(S)$ является объединением множеств $Q(V_{k-1})$,

$$R_k(S) = \bigcup_{V_{k-1} \in R_{k-1}(S)} Q(V_{k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

B. Схема нахождения множества $\boldsymbol{R(S)}$

Предположим, что заданы система неравенств (S) по модулю n и соответствующая ей матрица $A(S) = (\alpha_{ki})_{k,\,i\in N}$ системы. Общая схема нахождения множества $R_n(S)$ всех полных решений системы такова.

С помощью первой строки матрицы $A(S)$ находится множество $R_1(S)$. Одномерный вектор (a) тогда и только тогда принадлежит множеству $R_1(S)$, когда элемент α_{1a} матрицы $A(S)$ равен единице. Для нахождения множества $R_1(S)$ последовательно просматриваются n элементов первой строки матрицы и всякий раз, когда $\alpha_{1a} = 1$, запоминается одномерный вектор (a) в качестве элемента множества $R_1(S)$. Поэтому мы будем считать, что при нахождении множества $R_1(S)$ затрачивается n элементарных операций.

Если множество $R_1(S)$ уже найдено, то для каждого элемента $V_1 = (a_1)$ этого множества находится с помощью второй строки матрицы $A(S)$ множество $Q(V_1)$ двумерных решений системы (S), продолжающих данное одномерное решение V_1 системы. Для этого последовательно для каждого вычета $i \in N \setminus \{a_1\}$ проверяется выполнимость условия

$$\alpha_{2i} = 1. \tag{b}$$

При выполнении этого условия вектор $(a_1,\, i)$ запоминается как элемент множества $Q(V_1)$. Если же условие (b) не выполнено, т.е. $\alpha_{2i} = 0$, то вектор $(a_1,\, i)$ не запоминается, так как он, очевидно, не будет элементом множества $Q(V_1)$.

Таким образом, при нахождении множества $Q(V_1)$ затрачивается $n-1$ элементарных операций.

Объединение множеств $Q(V_1)$ дает множество $R_2(S)$,

$$R_2(S) = \bigcup_{V_1\in R_1(S)} Q(V_1).$$

Если множество $R_{k-1}(S)$ уже найдено, то для каждого элемента

$$V_{k-1} = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{k-1})$$

множества $R_{k-1}(S)$ с помощью k-й строки матрицы $A(S)$ находится множество $Q(V_{k-1})$ k-мерных решений системы (S), продолжающих решение V_{k-1}.

Для этого последовательно для каждого вычета

$$i \in N \setminus \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{k-1}\}$$

проверяется выполнимость условия

$$\alpha_{ki} = 1. \tag{c}$$

При выполнении этого условия вектор $(a_1,\, \ldots,\, a_{k-1},\, i)$ запоминается как элемент множества $Q(V_{k-1})$. При невыполнении условия (c) вектор $(a_1,\, \ldots,\, a_{k-1},\, i)$

не запоминается, так как он не является элементом множества $Q(V_{k-1})$. Следовательно, при нахождении множества $Q(V_{k-1})$ по данному вектору V_{k-1} затрачивается $n-k+1$ элементарных операций, поскольку мощность множества

$$N \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

равна $n-k+1$.

Множество $R_k(S)$ является объединением множеств $Q(V_{k-1})$,

$$R_k(S) = \bigcup_{V_{k-1} \in R_{k-1}(S)} Q(V_{k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что при нахождении множества $R_k(S)$ по данному множеству $R_{k-1}(S)$ затрачивается $(n-k+1) \cdot |R_{k-1}(S)|$ элементарных операций.

Указанным выше способом последовательно находятся множества $R_1(S)$, $R_2(S)$, …, $R_{n-1}(S)$.

Наконец, с помощью множества $R_{n-1}(S)$ и последней строки матрицы $A(S)$ находится искомое множество $R_n(S)$.

Г. Число элементарных операций, затрачиваемых при нахождении множества $\boldsymbol{R_n(S)}$

Множество $R_n(S)$ находится по описанной в предыдущем пункте схеме с помощью матрицы $A(S)$ в результате последовательного нахождения множеств $R_1(S)$, $R_2(S)$, …

При нахождении множества $R_1(S)$ затрачивается n элементарных операций. Выше было отмечено также, что при нахождении множества $R_k(S)$ по множеству $R_{k-1}(S)$ при $k > 1$ затрачивается $(n-k+1) \cdot |R_{k-1}(S)|$ элементарных операций. Отсюда следует, что число $\eta(S)$ элементарных операций, затрачиваемых при последовательном нахождении множеств $R_1(S)$, $R_2(S)$, …, $R_n(S)$, выражается формулой

$$\eta(S) = n + (n-1) \cdot |R_1(S)| + \ldots + (n-k+1) \cdot |R_{k-1}(S)| + \ldots + |R_{n-1}(S)| =$$
$$= n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot |R_k(S)|.$$

Д. Математическое ожидание числа элементарных операций, необходимых для нахождения множества всех решений случайной системы неравенств

Теорема 3. *Математическое ожидание числа $\eta(S)$ элементарных операций, необходимых для нахождения по описанной в п.* В *схеме множества $R_n(S)$ всех полных решений случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t, выражается формулой*

$$\underset{S \in \sigma(n,t)}{M} \eta(S) = \sum_{k=0}^{n-1} A_n^{k+1} \left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t \qquad \textbf{(V)}$$

или приближенной формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\eta(S)\approx\sum_{k=0}^{n-1}A_n^{k+1}\,e^{-kt/n^2}. \tag{VI}$$

Доказательство. В п. Г этого параграфа была установлена следующая формула для числа $\eta(S)$ элементарных операций, необходимых для нахождения множества $R_n(S)$:

$$\eta(S)=n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot|R_k(S)|. \tag{1}$$

Поскольку

$$|R_k(S)|=\rho_k(S),$$

формула (I) (см. § 3, п. В) может быть записана в виде

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}|R_k(S)|=A_n^k\left(1-\frac{k}{n^2}\right)^t. \tag{2}$$

На основании равенств (1) и (2) заключаем, что

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\eta(S)=n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot\Bigl(\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}|R_k(S)|\Bigr)=$$
$$=n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,A_n^k\left(1-\frac{k}{n^2}\right)^t=\sum_{k=0}^{n-1}A_n^{k+1}\left(1-\frac{k}{n^2}\right)^t.$$

Таким образом, формула (V) доказана.

Формула (VI) непосредственно следует из (V), если воспользоваться следующим приближенным равенством:

$$\left(1-\frac{k}{n^2}\right)^t\approx e^{-kt/n^2}.$$

§ 5. Среднее число квазирешений данного порядка случайной системы неравенств

Основной целью настоящего параграфа является нахождение формул для математических ожиданий числа квазирешений порядка m, $0\leqslant m\leqslant n$, и числа квазирешений порядка $\leqslant m$ случайной системы соотношений несравнимости (по модулю n) мощности t. Эта задача по существу сводится к отысканию формул для вероятностей p_m и $p_{[m]}$, определение которых приводится ниже.

В этом параграфе даны также оценки сверху и снизу для математических ожиданий числа квазирешений данного порядка m и числа квазирешений порядка $\leqslant m$ случайной системы соотношений несравнимости.

А. События A_i и суммы S_k

Пусть задан какой-либо элемент V_n множества ϑ_n (см. § 1, п. В), т.е. n-мерный вектор

$$V_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

координаты которого суть попарно различные вычеты по модулю n. Обозначим через A_i, $i \in N$, событие, состоящее в том, что случайная система неравенств мощности t (по модулю n) не содержит соотношения несравнимости

$$x_i \not\equiv a_i \pmod n,$$

где a_i есть i-я координата вектора V_n.

Обозначим через B_k множество всех подмножеств множества N, имеющих мощность k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Мощность множества B_k, очевидно, равна C_n^k.

Вероятность события A_i обозначим символом $p(A_i)$; символом $p(A_i, A_j)$ обозначим вероятность одновременного осуществления событий A_i и A_j; символом $p(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ обозначим вероятность одновременного осуществления k событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$.

Суммы $S_1(V_n), \ldots, S_k(V_n), \ldots, S_n(V_n)$, а также $S_0(V_n)$ определим следующими формулами:

$$S_0(V_n) = 1 \qquad\qquad (V_n \in \vartheta_n),$$

$$S_1(V_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i),$$

$$S_2(V_n) = \sum_{\{i,j\} \in B_2} p(A_i, A_j),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_k(V_n) = \sum_{\{i,j,\ldots,\delta\} \in B_k} p(A_i, A_j, \ldots, A_\delta),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n(V_n) = p(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Б. Формула для сумм $S_k(V_n)$

Для сумм $S_k(V_n)$ имеет место следующая формула:

$$S_k(V_n) = C_n^k \left(1 - \frac{k}{n^2}\right)^t \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{I}$$

Доказательство. Предположим, что задан вектор $V_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Согласно определению

$$S_k(V_n) = \sum_{\{i,j,\ldots,\delta\} \in B_k} p(A_i, A_j, \ldots, A_\delta). \tag{1}$$

Символом $p(A_i, A_j, \ldots, A_\delta)$ мы обозначили вероятность одновременного осуществления k событий A_i, A_j, ..., A_δ. Другими словами, $p(A_i, A_j, \ldots, A_\delta)$ есть вероятность события, состоящего в том, что случайная выборка (с возвращением) объема t из генеральной совокупности $M(n)$ всех соотношений несравнимости по модулю n не содержит следующие k соотношений несравнимости:

$$x_i \not\equiv a_i,\ x_j \not\equiv a_j,\ \ldots,\ x_\delta \not\equiv a_\delta \qquad (\{i, j, \ldots, \delta\} \in B_k), \tag{2}$$

где $a_i, a_j, \ldots, a_\delta$ суть k координат заданного вектора V_n. Вероятность события, состоящего в том, что случайно выбранное из $M(n)$ неравенство не совпадет ни с одним из неравенств (2), равна $1 - \frac{k}{n^2}$, поскольку мощность множества $M(n)$ равна n^2. Отсюда следует, что вероятность события, состоящего в том, что случайная выборка (с возвращением) t неравенств из множества $M(n)$ не содержит ни одного из неравенств (2), равна

$$\left(1 - \tfrac{k}{n^2}\right)^t,$$

т.е.

$$p(A_i, A_j, \ldots, A_\delta) = \left(1 - \tfrac{k}{n^2}\right)^t.$$

Сумма в формуле (1) содержит C_n^k слагаемых, так как $|B_k| = C_n^k$. Каждое слагаемое этой суммы, как мы сейчас установили, равно

$$\left(1 - \tfrac{k}{n^2}\right)^t.$$

На основании этого заключаем, что имеет место формула (I).

В. Вероятности $p_{[m]}(V_n)$ и $p_m(V_n)$

Обозначим символом $p_{[m]}(V_n)$ вероятность события, состоящего в том, что данный n-мерный вектор V_n, $V_n \in \vartheta_n$, является квазирешением порядка $n - m$ случайной системы неравенств (по модулю n) мощности t.

Вспоминая определение квазирешения данного порядка (см. § 1, п. Д), легко видеть, что $p_{[m]}(V_n)$ есть вероятность одновременного осуществления в точности m из n событий A_1, A_2, ..., A_n.

Символом $p_m(V_n)$ обозначим вероятность события, состоящего в том, что данный n-мерный вектор V_n является квазирешением порядка $\leqslant n - m$ случайной системы неравенств мощности t. Нетрудно убедиться в том, что $p_m(V_n)$ есть вероятность одновременного осуществления m или более из n событий A_1, A_2, ..., A_n.

Г. Формулы для вероятности $p_{[m]}(V_n)$

Вероятность $p_{[m]}(V_n)$, $V_n \in \vartheta_n$, *выражается формулой*

$$p_{[m]}(V_n) = C_n^m \cdot \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \cdot C_{n-m}^i \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t \qquad (0 \leqslant m \leqslant n). \tag{II}$$

Доказательство. В предыдущем пункте было отмечено, что вероятность $p_{[m]}(V_n)$ равна вероятности одновременного осуществления в точности m из n событий A_1, A_2, …, A_n. Согласно теореме Пуанкаре для $p_{[m]}(V_n)$ имеет место следующая формула (см. [3], гл. IV, § 3):

$$p_{[m]}(V_n) = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \cdot C_{m+i}^m \cdot S_{m+i}(V_n) \qquad (0 \leqslant m \leqslant n), \tag{1}$$

где $S_{m+i}(V_n)$ – суммы, определенные в п. А этого параграфа, и $C_i^0 = 1$. Далее, ввиду формулы (I) (см. § 5, п. Б)

$$S_{m+i}(V_n) = C_n^{m+i} \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует равенство

$$p_{[m]}(V_n) = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \cdot C_{m+i}^m \cdot C_n^{m+i} \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t. \tag{3}$$

Легко проверить, что

$$C_{m+i}^m \cdot C_n^{m+i} = C_n^m \cdot C_{n-m}^i. \tag{4}$$

На основании (3) и (4) заключаем, что имеет место формула (II).

Для вероятности $p_{[m]}(V_n)$, $V_n \in \vartheta_n$, *имеет место следующая приближенная формула*:

$$p_{[m]}(V_n) \approx C_n^m \, e^{-mt/n^2} \left(1 - e^{-t/n^2}\right)^{n-m} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n). \tag{\textbf{III}}$$

Формула (III) получается из формулы (II), если воспользоваться приближенной формулой

$$\left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t \approx \, e^{-(m+i)t/n^2}$$

и произвести следующие выкладки:

$$\begin{aligned} p_{[m]}(V_n) &= C_n^m \cdot \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \, C_{n-m}^i \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t \approx \\ &\approx C_n^m \cdot \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \, C_{n-m}^i \, e^{-(m+i)t/n^2} = \\ &= C_n^m \, e^{-mt/n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \, C_{n-m}^i \, e^{-it/n^2} = \\ &= C_n^m \, e^{-mt/n^2} \left(1 - e^{-t/n^2}\right)^{n-m}. \end{aligned}$$

Д. Формула для вероятности $p_m(V_n)$

Для вероятности $p_m(V_n),\ V_n \in \vartheta_n$, *имеет место следующая формула*:

$$p_m(V_n) = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \cdot C_{m+i-1}^{m-1} \cdot C_n^{m+i} \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t \qquad (0 \leqslant m \leqslant n). \qquad \textbf{(IV)}$$

Доказательство. Как отмечалось в п. В этого параграфа, вероятность $p_m(V_n)$ равна вероятности одновременного осуществления m или более из n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (события A_i определены в п. А). Известно, что вероятность одновременного осуществления m или более из n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выражается формулой (см. [3], гл. IV, § 6)

$$p_m(V_n) = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \cdot C_{m+i-1}^{m-1} \cdot S_{m+i}(V_n), \tag{1}$$

где $S_{m+i}(V_n)$ – суммы, определенные в п. А этого параграфа.

Согласно формуле (I) (см. п. Б) имеет место равенство

$$S_{m+i}(V_n) = C_n^{m+i} \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t. \tag{2}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что имеет место формула (IV).

Е. Оценки сверху и снизу вероятностей $p_{[m]}(V_n)$ и $p_m(V_n)$

Вероятности $p_{[m]}(V_n)$ *и* $p_m(V_n),\ V_n \in \vartheta_n$, *удовлетворяют следующим неравенствам*:

$$C_n^m \left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t - (m+1)\, C_n^{m+1} \left(1 - \tfrac{m+1}{n^2}\right)^t \leqslant p_{[m]}(V_n) \leqslant C_n^m \left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t, \qquad \textbf{(V)}$$

$$C_n^m \left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t - m\, C_n^{m+1} \left(1 - \tfrac{m+1}{n^2}\right)^t \leqslant p_m(V_n) \leqslant C_n^m \left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t. \qquad \textbf{(VI)}$$

Доказательство. Известно, что вероятности $p_{[m]}(V_n)$ и $p_m(V_n)$ удовлетворяют следующим неравенствам, известным как неравенства Бонферрони (см. [3], гл. IV, § 6):

$$S_m(V_n) - (m+1)\, S_{m+1}(V_n) \leqslant p_{[m]}(V_n) \leqslant S_m(V_n), \tag{1}$$

$$S_m(V_n) - m\, S_{m+1}(V_n) \leqslant p_m(V_n) \leqslant S_m(V_n). \tag{2}$$

С другой стороны, согласно формуле (I) из п. Б

$$S_m(V_n) = C_n^m \left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t, \qquad S_{m+1}(V_n) = C_n^{m+1} \left(1 - \tfrac{m+1}{n^2}\right)^t. \tag{3}$$

Заменяя в неравенствах (1) и (2) суммы S_m и S_{m+1} по формулам (3), получим неравенства (V) и (VI).

Ж. Среднее число квазирешений данного порядка

Теорема 4. *Математическое ожидание числа $\xi_{n-m}(S)$ квазирешений порядка $n-m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) = n! \cdot C_n^m \cdot \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i\, C_{n-m}^i \left(1 - \frac{m+i}{n^2}\right)^t. \qquad \textbf{(VII)}$$

Доказательство. $p_{[m]}(V_n)$ есть вероятность события, состоящего в том, что данный вектор V_n, $V_n \in \vartheta_n$, является квазирешением порядка $n-m$ случайной системы неравенств (S) мощности t. Отсюда следует, что математическое ожидание случайной величины $\xi_{n-m}(S)$ выражается формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) = \sum_{V_n\in\vartheta_n} p_{[m]}(V_n), \qquad (1)$$

или, поскольку $|\vartheta_n| = n!$, формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) = n! \cdot p_{[m]}(V_n). \qquad (2)$$

На основании формул (2) и (II) (см. § 5, п. Г) заключаем, что имеет место формула (VII). Теорема доказана.

Замечание. Формула (III) из § 3 является частным случаем формулы (VII) (она получается из (VII) при $m = n$).

Теорема 5. *Для математического ожидания числа $\xi_{n-m}(S)$ квазирешений порядка $n-m$ случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t имеет место следующая приближенная формула*:

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) \approx n! \cdot C_n^m \cdot e^{-mt/n^2}\left(1 - e^{-t/n^2}\right)^{n-m} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n). \qquad \textbf{(VIII)}$$

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы была установлена следующая формула:

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) = n! \cdot p_{[m]}(V_n) \qquad (V_n \in \vartheta_n).$$

На основании этой формулы и формулы (III) (см. § 5, п. Г) мы заключаем, что имеет место приближенная формула (VIII).

Замечание. При $m = n$ из (VIII) получается формула (IV) из § 3.

Теорема 6. *Математическое ожидание числа $\xi_{n-m}(S)$ квазирешений порядка $n-m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t удовлетворяет следующим неравенствам*:

$$n! \cdot C_n^m\left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t \geqslant \underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) \geqslant$$
$$\geqslant n! \cdot \left[C_n^m\left(1 - \tfrac{m}{n^2}\right)^t - (m+1)\,C_n^{m+1}\left(1 - \tfrac{m+1}{n^2}\right)^t\right]. \qquad \textbf{(IX)}$$

Доказательство. При доказательстве формулы (VII) была установлена следующая формула:

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\xi_{n-m}(S) = n!\cdot p_{[m]}(V_n) \qquad (V_n\in\vartheta_n).$$

На основании этой формулы и неравенств (V) (см. § 5, п. Е) заключаем, что имеют место неравенства (IX).

З. Среднее число квазирешений, порядок которых не больше заданного числа

Теорема 7. *Математическое ожидание числа $\zeta_{n-m}(S)$ квазирешений порядка, не большего $n-m$, случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t выражается формулой*

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\zeta_{n-m}(S) = n!\cdot\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i\cdot C_{m+i-1}^{m-1}\cdot C_n^{m+i}\left(1-\frac{m+i}{n^2}\right)^t. \qquad \textbf{(X)}$$

Доказательство. Символом $p_m(V_n)$ мы обозначили вероятность события, состоящего в том, что данный вектор V_n, $V_n\in\vartheta_n$, является квазирешением порядка $\leqslant n-m$ случайной системы неравенств (S) мощности t. Следовательно, математическое ожидание случайной величины $\zeta_{n-m}(S)$ выражается формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\zeta_{n-m}(S) = \sum_{V_n\in\vartheta_n}p_m(V_n),$$

или, поскольку $|\vartheta_n| = n!$, формулой

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\zeta_{n-m}(S) = n!\cdot p_m(V_n) \qquad (V_n\in\vartheta_n). \tag{1}$$

На основании этого равенства и формулы (IV) (см. § 5, п. Д) заключаем, что при всех $m = 0, 1, \ldots, n$ имеет место формула (X). Теорема доказана.

Теорема 8. *Математическое ожидание числа $\zeta_{n-m}(S)$ квазирешений порядка $\leqslant n-m$, $0\leqslant m\leqslant n$, случайной системы неравенств (S) (по модулю n) мощности t удовлетворяет следующим неравенствам*:

$$n!\cdot C_n^m\left(1-\frac{m}{n^2}\right)^t \geqslant \underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\zeta_{n-m}(S)\geqslant$$
$$\geqslant n!\cdot\left[C_n^m\left(1-\frac{m}{n^2}\right)^t - m\,C_n^{m+1}\left(1-\frac{m+1}{n^2}\right)^t\right]. \qquad \textbf{(XI)}$$

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы была установлена следующая формула:

$$\underset{S\in\sigma(n,\,t)}{M}\zeta_{n-m}(S) = n!\cdot p_m(V_n) \qquad (V_n\in\vartheta_n). \tag{1}$$

На основании формулы (1) и неравенств (VI) (см. § 5, п. E) мы заключаем, что математическое ожидание случайной величины $\zeta_{n-m}(S)$ удовлетворяет неравенствам (XI). Теорема доказана.

Литература

1. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*, М.: ИЛ, 1963.

2. Лунц А. Г., *Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **16:5** (1952), 405–426.

3. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, М.: ИЛ, 1952.

Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой

Последовательность гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где A, B, F – абелевы группы, называется *точной*, если гомоморфизм $\alpha\colon A \to B$ есть мономорфизм, гомоморфизм $\beta\colon B \to F$ есть эпиморфизм и ядро гомоморфизма β совпадает с образом группы A при гомоморфизме α. Точная последовательность (1) называется *расщепляемой*, если образ группы A при мономорфизме α является прямым слагаемым группы B. В работе изучаются условия, при которых любая точная последовательность $0 \to A \to G \to F \to 0$ при заданных абелевых группах A и F расщепляема, т.е. существуют только тривиальные расширения группы A при помощи группы F. Другими словами, ищутся условия, при которых группа $\mathrm{Ext}(F, A)$ абелевых расширений группы A при помощи группы F является нулевой. Этот вопрос полностью решается в следующих случаях:

1) F – периодическая группа и A – любая абелева группа,
2) группа A и факторгруппа F/tF (tF – периодическая часть группы F) являются счетными.

Основными результатами работы являются теоремы 2, 9, 10, 11, 12.

Отметим, что Бэром [1] для широкого класса абелевых групп найдены условия, при которых периодическая часть абелевой группы является прямым слагаемым группы.

Все группы, рассматриваемые в этой статье, абелевы.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

N – множество всех целых положительных чисел;
Z – аддитивная группа всех целых чисел;
Q – аддитивная группа всех рациональных чисел;
P – множество всех простых чисел;
$|M|$ – мощность множества M;
$\aleph_0$ – мощность счетного множества;
$\varnothing$ – пустое множество;
nA – подгруппа группы A, образованная всеми элементами вида na из A;
$A[n]$ – подгруппа группы A, образованная элементами, порядки которых являются делителями числа n;

$\bigoplus\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ – прямая сумма групп A_α;

$A \oplus B$ – прямая сумма групп A и B;

$\prod\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ – полная прямая сумма групп A_α;

$\bigoplus\limits_{r} A$ – прямая сумма r экземпляров группы A;

$t_p A$ – p-примарная компонента группы A;

$t_\pi A$ – подгруппа $\bigoplus\limits_{p \in \pi} t_p A$ группы A, $\pi \subset P$;

$C(n)$ – циклическая группа порядка n;

$C(p^\infty)$ – группа типа p^∞, $p \in P$;

Q_π – подгруппа группы Q, содержащая Z и удовлетворяющая следующим условиям: $Q_\pi = Z$, если $\pi = \varnothing$, и $Q_\pi / Z \cong \bigoplus\limits_{p \in \pi} C(p^\infty)$, если $\varnothing \neq \pi \subset P$;

$\pi(A) = \{p \in P \mid t_p A \neq 0\}$;

$q(A) = \{p \in P \mid pA \neq A\}$;

$\Delta(A) = \{p \in P \mid p^n A \neq p^{n+1} A$ для любого $n \in N\}$;

$\pi^*(A)$ – множество всех таких простых чисел p, для которых $t_p A$ содержит подгруппу типа p^∞;

$A \cong B$ – группа A изоморфна группе B;

$\mathrm{Ext}(F, A)$ – группа абелевых расширений группы A при помощи группы F.

В статье используются следующие свойства функтора Ext.

I. *Если H – любая абелева группа, то точной последовательности*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{1}$$

соответствуют некоторые точные последовательности

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, H) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}(C, H) \longrightarrow \mathrm{Ext}(B, H) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, H) \longrightarrow 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, C) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}(H, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(H, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(H, C) \longrightarrow 0, \end{gathered}$$

причем гомоморфизмы каждой из этих последовательностей однозначно определяются гомоморфизмами α и β заданной точной последовательности (1) (Теорема Маклейна – Эйленберга).

II. *Для любой абелевой группы H и любого целого положительного n*

$$\mathrm{Ext}(C(n), H) \cong H/nH.$$

III. $\operatorname{Ext}(A \oplus B, H) \cong \operatorname{Ext}(A, H) \oplus \operatorname{Ext}(B, H)$,
$\operatorname{Ext}(H, A \oplus B) \cong \operatorname{Ext}(H, A) \oplus \operatorname{Ext}(H, B)$.

IV. $\operatorname{Ext}\Big(\bigoplus_{\alpha\in M} B_\alpha,\, H\Big) \cong \prod_{\alpha\in M} \operatorname{Ext}(B_\alpha, H)$.

V. *Если D – делимая группа (т.е. $nD = D$ для любого $n \in N$) и A – любая абелева группа, то* $\operatorname{Ext}(A, D) = 0$.

Доказательства этих свойств можно найти в монографиях Картана и Эйленберга [2] и Маклейна [3].

§ 1

Символом $F(A)$ обозначается класс всех абелевых групп F, для которых $\operatorname{Ext}(F, A) = 0$.

Теорема 1. *Класс групп $F(A)$ обладает следующими свойствами:*

(f_1) *свойство наследственности: если F принадлежит классу $F(A)$, то и любая подгруппа группы F принадлежит этому классу;*

(f_2) *свойство замкнутости относительно расширений: если F и H принадлежат классу $F(A)$, то любое абелево расширение F при помощи H принадлежит этому классу;*

(f_3) *свойство замкнутости относительно операции образования прямой суммы: если $\{F_\lambda\}_{\lambda\in M}$ – множество групп, принадлежащих классу $F(A)$, то прямая сумма этих групп $\bigoplus\limits_{\lambda\in M} F_\lambda$ принадлежит классу $F(A)$.*

Доказательство. Пусть $F \in F(A)$ и B – некоторая подгруппа группы F. Тогда имеет место эпиморфизм (свойство I)

$$\operatorname{Ext}(F, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(B, A).$$

Но $\operatorname{Ext}(F, A) = 0$, так как $F \in F(A)$, и поэтому $\operatorname{Ext}(B, A) = 0$. Свойство ($f_1$) доказано.

Пусть $F, H \in F(A)$ и G – абелево расширение группы F при помощи H, т.е. точна последовательность

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Этой точной последовательности соответствует (свойство I) точная последовательность

$$\operatorname{Ext}(H, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(G, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(F, A); \tag{1}$$

по условию $F, H \in F(A)$, т.е.

$$\operatorname{Ext}(H, A) = 0, \qquad \operatorname{Ext}(F, A) = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) ввиду точности последовательности (1) следует $\operatorname{Ext}(G, A) = 0$. Свойство ($f_2$) доказано.

Пусть $\{F_\lambda\}_{\lambda\in M}$ – множество групп, принадлежащих классу $F(A)$, т.е.

$$\operatorname{Ext}(F_\lambda, A) = 0 \qquad (\lambda \in M). \tag{3}$$

По свойству IV функтора Ext

$$\operatorname{Ext}\Big(\bigoplus_{\lambda\in M} F_\lambda,\, A\Big) \cong \prod_{\lambda\in M} \operatorname{Ext}(F_\lambda, A). \tag{4}$$

На основании (3), (4) заключаем, что $\operatorname{Ext}\Big(\bigoplus\limits_{\lambda\in M} F_\lambda, A\Big) = 0$. Свойство (f_3) доказано.

Теорема 2. *Пусть F – периодическая группа и A – любая абелева группа. Группа $\operatorname{Ext}(F, A)$ тогда и только тогда является нулевой, когда*

$$\pi(F) \cap q(A) = \varnothing. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть C – циклическая или квазициклическая p-группа; докажем, что

$$\operatorname{Ext}(C, A) \neq 0, \quad \text{если } p \in q(A). \tag{2}$$

Действительно, если C – циклическая группа порядка p^m, то

$$\operatorname{Ext}(C, A) \cong A/p^m A$$

и $A/p^m A \neq 0$, так как $p \in q(A)$. Предположим теперь, что C – группа типа p^∞. Тогда существует (свойство I) эпиморфизм

$$\operatorname{Ext}(C, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(C[p], A).$$

По свойству II $\operatorname{Ext}(C[p], A) \cong A/pA$ и $A/pA \neq 0$, так как $p \in q(A)$. Следовательно, и в этом случае выполняется соотношение (2).

Пусть $p \in \pi(F) \cap q(A)$; тогда F можно представить в виде прямой суммы

$$F = C \oplus T, \tag{3}$$

где C – ненулевая циклическая p-группа или группа типа p^∞. Ввиду (3) имеем

$$\operatorname{Ext}(F, A) \cong \operatorname{Ext}(C, A) \oplus \operatorname{Ext}(T, A). \tag{4}$$

На основании (2), (4) заключаем, что

$$\operatorname{Ext}(F, A) \neq 0, \quad \text{если } \pi(F) \cap q(A) \neq \varnothing.$$

Таким образом, доказана необходимость условий теоремы.

Докажем достаточность условий. Пусть D – минимальная делимая для A группа. Легко видеть, что

$$\pi(D/A) = q(A); \tag{5}$$

отсюда следует равенство

$$\operatorname{Hom}(F, D/A) = 0, \quad \text{если } \pi(F) \cap q(A) = \varnothing. \tag{6}$$

Далее, точной последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow D/A \longrightarrow 0$$

соответствует точная последовательность

$$\operatorname{Hom}(F, D/A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(F, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(F, D). \tag{7}$$

Поскольку D – делимая группа, то (см. свойство V)

$$\operatorname{Ext}(F, D) = 0. \tag{8}$$

На основании (6), (7), (8) заключаем, что $\operatorname{Ext}(F, A) = 0$, если выполнено условие (1). Достаточность условий теоремы доказана.

Теорема 3. *Группа* $\operatorname{Ext}(F, A)$ *тогда и только тогда является нулевой, когда* $\operatorname{Ext}(tF, A) = 0$ *и* $\operatorname{Ext}(F/tF, A) = 0$.

Доказательство. Точной последовательности $0 \to tF \to F \to \overline{F} \to 0$, где $\overline{F} = F/tF$, соответствует точная последовательность

$$\operatorname{Hom}(tF, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(\overline{F}, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(F, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(tF, A). \tag{1}$$

Отсюда следует достаточность условий теоремы.

Докажем необходимость условий. Предположим, что

$$\operatorname{Ext}(F, A) = 0. \tag{2}$$

Тогда по свойству наследственности (теорема 1)

$$\operatorname{Ext}(tF, A) = 0. \tag{3}$$

Из (3) согласно теореме 2 следует равенство

$$\pi(tF) \cap q(A) = \varnothing. \tag{4}$$

Мы можем предполагать без ограничения общности, что A – редуцированная группа; ввиду (4) $\pi(tF) \cap \pi(tA) = \varnothing$ и, следовательно,

$$\operatorname{Hom}(tF, A) = 0. \tag{5}$$

На основании (1), (2), (3) и (5) заключаем, что

$$\operatorname{Ext}(\overline{F}, A) = 0, \qquad \operatorname{Ext}(tF, A) = 0.$$

Таким образом, доказана необходимость условий теоремы.

§ 2

Леммы 1–5 нужны для доказательства теоремы 4.

Лемма 1. *Пусть*
$$C = \bigoplus_{i \in N} C_i, \tag{1}$$
где C_i – примарная циклическая группа порядка p^{k_i}, причем $k_i < k_{i+1}$ для каждого $i \in N$. Тогда существует такая подгруппа B группы C, что
$$C/B \cong C(p^\infty) \quad \textit{и} \quad B \cong C.$$

Доказательство. Пусть c_i – образующий элемент группы C_i. Положим
$$b_i = c_i - p^{k_{i+1}-k_i} c_{i+1} \qquad (i \in N) \tag{2}$$
и обозначим через B_i подгруппу группы C, порожденную элементом b_i; тогда
$$B_i \cong C_i \qquad (i \in N). \tag{3}$$
Обозначим через B подгруппу группы C, порожденную всеми подгруппами B_i. Если $\bar{c}_i = c_i + B$, то ввиду (2) $p^{k_{i+1}-k_i}\,\bar{c}_{i+1} = \bar{c}_i$ $(i \in N)$, откуда следует, что факторгруппа C/B порождается элементами $\bar{c}_i$ и $C/B \cong C(p^\infty)$. Принимая во внимание (1), (2), нетрудно убедиться в том, что B есть прямая сумма подгрупп B_i,
$$B = \bigoplus_{i \in N} B_i. \tag{4}$$
На основании (1), (3), (4) заключаем, что $B \cong C$.

Лемма 2. *Пусть T – счетная p-примарная группа без элементов бесконечной высоты, содержащая элементы как угодно больших порядков. Тогда существует в T такая подгруппа H, что $T/H \cong C(p^\infty)$ и $H \cong T$.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что T разложима в прямую сумму циклических подгрупп; поэтому T содержит прямое слагаемое C, удовлетворяющее условиям леммы 1, $T = C \oplus D$. Согласно лемме 1 существует в C такая подгруппа B, что $C/B \cong C(p^\infty)$ и $B \cong C$. Полагая $H = B \oplus D$, убеждаемся в том, что $T/H \cong C(p^\infty)$ и $H \cong T$.

Лемма 3. *Пусть T – счетная p-примарная группа без элементов бесконечной высоты, содержащая элементы как угодно больших порядков. Тогда* $\mathrm{Ext}(C(p^\infty), T)$ *есть несчетная группа.*

Доказательство. Согласно лемме 2 существует в T подгруппа H, удовлетворяющая условиям
$$T/H \cong C(p^\infty), \tag{1}$$
$$H \cong T. \tag{2}$$

Ввиду (1) точна последовательность (свойство I)

$$\mathrm{Hom}(C(p^\infty), T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C(p^\infty), C(p^\infty)) \longrightarrow \mathrm{Ext}(C(p^\infty), H). \tag{3}$$

Поскольку T – редуцированная группа, $\mathrm{Hom}(C(p^\infty), T) = 0$. Кроме того, $\mathrm{Hom}(C(p^\infty), C(p^\infty)) \cong Z_p$, где Z_p – аддитивная группа всех целых p-адических чисел. Следовательно, точную последовательность (3) можно записать в виде

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow \mathrm{Ext}(C(p^\infty), H). \tag{4}$$

Ввиду (2)

$$\mathrm{Ext}(C(p^\infty), H) \cong \mathrm{Ext}(C(p^\infty), T). \tag{5}$$

На основании (4) заключаем, что группа $\mathrm{Ext}(C(p^\infty), H)$ несчетна, поскольку содержит подгруппу, изоморфную несчетной группе Z_p. Отсюда ввиду (5) следует, что $\mathrm{Ext}(C(p^\infty), T)$ также есть несчетная группа.

Лемма 4. *Пусть G – такая счетная группа без кручения, что*

$$G \neq pG. \tag{1}$$

Тогда группа $\mathrm{Ext}(C(p^\infty), G)$ является несчетной.

Доказательство. Пусть D – минимальная для G делимая группа; факторгруппа $\overline{D} = D/G$ есть делимая периодическая группа, причем ввиду условия (1) ее p-примарная компонента отлична от нуля и, следовательно, содержит подгруппу типа p^∞. Отсюда, поскольку $\mathrm{Hom}(C(p^\infty), C(p^\infty)) \cong Z_p$, следует, что группа $\mathrm{Hom}(C(p^\infty), \overline{D})$ содержит подгруппу, изоморфную Z_p, и поэтому является несчетной,

$$|\,\mathrm{Hom}(C(p^\infty), \overline{D})\,| > \aleph_0. \tag{2}$$

Точной последовательности

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow D \longrightarrow \overline{D} \longrightarrow 0$$

соответствует точная последовательность

$$\mathrm{Hom}(C(p^\infty), D) \to \mathrm{Hom}(C(p^\infty), \overline{D}) \to \mathrm{Ext}(C(p^\infty), G) \to \mathrm{Ext}(C(p^\infty), D). \tag{3}$$

Так как D есть группа без кручения, то $\mathrm{Hom}(C(p^\infty), D) = 0$. Кроме того, $\mathrm{Ext}(C(p^\infty), D) = 0$, поскольку D – делимая группа. Поэтому точную последовательность (3) можно записать в виде

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C(p^\infty), \overline{D}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(C(p^\infty), G) \longrightarrow 0. \tag{4}$$

На основании (2) и (4) заключаем, что группа $\mathrm{Ext}(C(p^\infty), G)$ несчетна.

Лемма 5. *Пусть H – счетная абелева группа без элементов бесконечной p-высоты (т.е. $\bigcap\limits_{n \in N} p^n H = 0$), удовлетворяющая условию*

$$p^n H \neq p^{n+1} H \quad \text{для любого } n \in N. \tag{1}$$

Тогда группа $\operatorname{Ext}(C(p^\infty), H)$ несчетна.

Доказательство. Из условий леммы следует, что tH есть конечная или счетная редуцированная p-группа. Возможны следующие случаи.

1-й случай: tH – ограниченная группа, т.е. существует такое натуральное m, что $p^m(tH) = 0$. В этом случае H можно представить в виде прямой суммы

$$H = tH \oplus G, \tag{2}$$

где G – счетная группа без кручения, удовлетворяющая ввиду (1) условию

$$p^n G \neq p^{n+1} G \quad \text{для любого } n \in N.$$

Следовательно, по лемме 4

$$|\operatorname{Ext}(C(p^\infty), G)| > \aleph_0. \tag{3}$$

Далее, ввиду (2)

$$\operatorname{Ext}(C(p^\infty), H) \cong \operatorname{Ext}(C(p^\infty), tH) \oplus \operatorname{Ext}(C(p^\infty), G). \tag{4}$$

На основании (3), (4) заключаем, что $\operatorname{Ext}(C(p^\infty), H)$ есть несчетная группа.

2-й случай: tH содержит элементы как угодно больших порядков. В этом случае по лемме 3

$$|\operatorname{Ext}(C(p^\infty), tH)| > \aleph_0. \tag{5}$$

Точной последовательности $0 \to tH \to H \to H/tH \to 0$ соответствует следующая точная последовательность:

$$\operatorname{Hom}(C(p^\infty), H/tH) \longrightarrow \operatorname{Ext}(C(p^\infty), tH) \longrightarrow \operatorname{Ext}(C(p^\infty), H). \tag{6}$$

Так как H/tH – группа без кручения, то $\operatorname{Hom}(C(p^\infty), H/tH) = 0$. Следовательно, ввиду (6) имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(C(p^\infty), tH) \longrightarrow \operatorname{Ext}(C(p^\infty), H). \tag{7}$$

На основании (5), (7) заключаем, что $\operatorname{Ext}(C(p^\infty), H)$ есть несчетная группа.

Теорема 4. *Пусть A – счетная редуцированная абелева группа, удовлетворяющая условию*

$$p^n A \neq p^{n+1} A \quad \text{для любого } n \in N, \tag{1}$$

где p – некоторое простое число. Тогда $\operatorname{Ext}(C(p^\infty), A)$ есть несчетная группа.

Доказательство. Обозначим через B следующую подгруппу группы A:

$$B = \bigcap_{n \in N} p^n A. \tag{2}$$

Обозначим через H факторгруппу A/B,

$$H = A/B. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что H не содержит элементов бесконечной p-высоты, т.е.

$$\bigcap_{n \in N} p^n H = 0. \tag{4}$$

Кроме того, ввиду (1) и (2) $p^n H \neq p^{n+1} H$ для любого $n \in N$. Поэтому согласно лемме 5

$$|\operatorname{Ext}(C(p^\infty), H)| > \aleph_0. \tag{5}$$

Эпиморфизму $A \to H$ соответствует эпиморфизм

$$\operatorname{Ext}(C(p^\infty), A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(C(p^\infty), H). \tag{6}$$

На основании (5), (6) заключаем, что $\operatorname{Ext}(C(p^\infty), A)$ есть несчетная группа.

§ 3

Лемма 6. *Пусть A – счетная редуцированная группа и F – группа без кручения. Если*

$$\operatorname{Ext}(F, A) = 0, \tag{1}$$

то для любой подгруппы $B \subset F$ с конечным числом образующих выполняется условие

$$(\alpha) \qquad |\, q(A) \cap \pi(\overline{F})\, | < \aleph_0,$$

где $\overline{F} = F/B$.

Доказательство. Точной последовательности $0 \to B \to F \to \overline{F} \to 0$ соответствует точная последовательность

$$\operatorname{Hom}(B, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(\overline{F}, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(F, A),$$

которую в силу (1) можно записать в виде

$$\operatorname{Hom}(B, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(\overline{F}, A) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

По условию B – группа с конечным числом образующих и A – счетная группа; следовательно, $|\operatorname{Hom}(B, A)| \leqslant \aleph_0$. Поэтому в силу (2)

$$|\operatorname{Ext}(\overline{F}, A)| \leqslant \aleph_0. \tag{3}$$

Определим множество π_1 равенством

$$\pi_1 = q(A) \cap \pi(\overline{F}). \tag{4}$$

Для каждого $p \in \pi_1$ в $\overline{F}$ существует циклическая подгруппа порядка p; поэтому существует мономорфизм

$$\bigoplus_{p \in \pi_1} C(p) \longrightarrow \overline{F}, \tag{5}$$

которому соответствует (по свойству I) эпиморфизм

$$\mathrm{Ext}(\overline{F}, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}\Big(\bigoplus_{p \in \pi_1} C(p),\ A\Big). \tag{6}$$

Кроме того, в силу свойств IV и II

$$\mathrm{Ext}\Big(\bigoplus_{p \in \pi_1} C(p),\ A\Big) \cong \prod_{p \in \pi_1} \mathrm{Ext}(C(p), A) \cong \prod_{p \in \pi_1} A/pA. \tag{7}$$

На основании (6), (7) заключаем, что

$$|\,\mathrm{Ext}(\overline{F}, A)\,| \geqslant \prod_{p \in \pi_1} |A/pA|. \tag{8}$$

Сопоставляя (3) и (8), приходим к выводу, что множество π_1 является конечным, т.е. выполняется неравенство (α).

Лемма 7. *Пусть A – счетная редуцированная группа и F – группа без кручения. Если $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$, то для любой подгруппы $B \subset F$ с конечным числом образующих выполняется условие*

$$(\beta) \qquad \Delta(A) \cap \pi^*(\overline{F}) = \varnothing,$$

где $\overline{F} = F/B$.

Доказательство. Из условий леммы 6 следует неравенство

$$|\,\mathrm{Ext}(\overline{F}, A)\,| \leqslant \aleph_0 \tag{1}$$

(см. неравенство (3) в доказательстве леммы 6). Согласно определению $\pi^*(\overline{F})$ $\overline{F}$ содержит подгруппу типа p^∞, если $p \in \pi^*(\overline{F})$, т.е. существует мономорфизм $C(p^\infty) \to \overline{F}$; поэтому имеет место эпиморфизм

$$\mathrm{Ext}(\overline{F}, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(C(p^\infty), A) \qquad (p \in \pi^*(\overline{F})). \tag{2}$$

С другой стороны, если $p \in \Delta(A)$, т.е. $p^n A \neq p^{n+1} A$ для любого натурального n, то по теореме 4

$$|\,\mathrm{Ext}(C(p^\infty), A)\,| > \aleph_0 \qquad (p \in \Delta(A)). \tag{3}$$

На основании (2) и (3) заключаем, что

$$|\,\mathrm{Ext}(\overline{F}, A)\,| > \aleph_0, \quad \text{если } \Delta(A) \cap \pi^*(\overline{F}) \neq \varnothing. \tag{4}$$

Сопоставляя неравенства (1) и (4), приходим к выводу, что должно выполняться условие (β).

Теорема 5. *Пусть A – счетная редуцированная группа и F – группа без кручения. Если* $\mathrm{Ext}(F,A)=0$, *то для любой подгруппы $B\subset F$ с конечным числом образующих выполняются условия*

$$(\alpha)\qquad |\,q(A)\cap\pi(\overline{F})\,|<\aleph_0,$$

$$(\beta)\qquad \Delta(A)\cap\pi^*(\overline{F})=\varnothing,$$

где $\overline{F}=F/B$.

Теорема 5 непосредственно следует из лемм 6 и 7.

Пусть H – любая абелева группа и q – какое-либо множество простых чисел. Символом $H[q]$ будем обозначать подгруппу $\bigoplus\limits_{p\in q}H[p]$ группы H, причем $H[q]$ будем считать нулевой подгруппой группы H, если q есть пустое множество.

Пусть B – подгруппа группы без кручения F; символом $q^{-1}B$ будем обозначать подгруппу группы F, являющуюся полным прообразом подгруппы $\overline{F}[q]$ факторгруппы $\overline{F}=F/B$ при естественном гомоморфизме F на $\overline{F}$. Следовательно, $q^{-1}B/B=\overline{F}[q]$.

Если Δ – какое-либо множество простых чисел и H – любая абелева группа, то символом $t_\Delta H$ будем обозначать подгруппу $\bigoplus\limits_{p\in\Delta}t_pH$ группы H, причем $t_\Delta H$ будем считать нулевой подгруппой группы H, если Δ – пустое множество.

Будем говорить, что подгруппа B группы без кручения F *имеет конечную Δ-высоту в* F, если подгруппа $t_\Delta\overline{F}$ группы $\overline{F}=F/B$ конечна.

Определение. Группа без кручения F называется *локально Δ-свободной* или *локально свободной относительно множества* Δ, где $\Delta\subset P$, если любая подгруппа B с конечным числом образующих группы F имеет в F конечную Δ-высоту.

Лемма 8. *Пусть A – редуцированная группа, $\Delta=\Delta(A)$ и $q=q(A)$; пусть, далее, F – группа без кручения, B – подгруппа с конечным числом образующих группы F. Тогда условие (α) теоремы 5 равносильно следующему условию*:

(γ) *подгруппа $q^{-1}B$ имеет конечное число образующих.*

Если условие (α) или (γ) выполнено, то условие (β) теоремы 5 равносильно условию

(δ) *подгруппа B имеет конечную Δ-высоту в F.*

Доказательство. Пусть $\overline{F}=F/B$. Так как

$$q^{-1}B/B=\overline{F}[q]=\bigoplus_{p\in q(A)}\overline{F}[p],$$

то $q^{-1}B$ имеет конечное число образующих тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\alpha) \qquad |\, q(A) \cap \pi(\overline{F})\, | < \aleph_0.$$

Таким образом, условия (α) и (γ) равносильны.

Так как B – подгруппа с конечным числом образующих группы F, то подгруппа $t_p\overline{F}$ группы $\overline{F}$ конечна тогда и только тогда, когда $p \notin \pi^*(\overline{F})$. Поэтому, если выполнено условие (α), подгруппа

$$t_\Delta \overline{F} = \bigoplus_{p \in \Delta(A)} t_p \overline{F}$$

конечна тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\beta) \qquad \Delta(A) \cap \pi^*(\overline{F}) = \varnothing.$$

Таким образом, если условие (α) выполнено, B имеет конечную Δ-высоту в F тогда и только тогда, когда выполняется условие (β).

Теорема 5а. *Пусть A – счетная редуцированная группа, F – группа без кручения и $q = q(A)$. Если* $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$, *то выполняются следующие условия:*

- (γ) *для любой подгруппы B с конечным числом образующих группы F подгруппа $q^{-1}B$ группы F имеет конечное число образующих,*
- (δ) *группа F локально свободна относительно множества $\Delta(A)$.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 5 и леммы 8.

§ 4

Теорема 6а. *Пусть A – редуцированная группа и F – группа без кручения конечного ранга. Если в F существует свободная подгруппа B, ранг которой равен рангу группы F, и выполнены условия*

$$(\alpha) \qquad |\, q(A) \cap \pi(\overline{F})\, | < \aleph_0 \qquad (\overline{F} = F/B),$$

$$(\beta) \qquad \Delta(A) \cap \pi^*(\overline{F}) = \varnothing,$$

то $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$.

Доказательство. Положим

$$\pi_1 = \Delta(A) \cap \pi(\overline{F}).$$

Ввиду условия (α) множество π_1 конечно. Через $\overline{F}_p$ обозначим p-компоненту периодической группы $\overline{F}$; для каждого $p \in \pi_1$ группа $\overline{F}_p$ является конечной ввиду условия (β). Пусть

$$\overline{B}_1 = \bigoplus_{p \in \pi_1} \overline{F}_p$$

и B_1 – полный прообраз подгруппы $\overline{B}_1$ при естественном гомоморфизме группы F на $\overline{F}$. Так как факторгруппа $\overline{B}_1 = B_1/B$ является конечной и ранг B равен рангу F, то B_1 есть свободная группа, ранг которой равен рангу F.

Легко проверить, что при таком выборе группы B_1 будут выполняться для факторгруппы $\widetilde{F} = F/B_1$ следующие условия:

$$(\alpha_1) \qquad |\, q(A) \cap \pi(\widetilde{F})\,| < \aleph_0,$$

$$(\beta_1) \qquad \Delta(A) \cap \pi(\widetilde{F}) = \varnothing.$$

Согласно условию (α_1) множество $\pi_2 = q(A) \cap \pi(\widetilde{F})$ конечно, причем ввиду условия (β_1)

$$\pi_2 = \big(q(A) \setminus \Delta(A)\big) \cap \pi(\widetilde{F}).$$

По условию теоремы A есть редуцированная группа, следовательно, t_pA есть ограниченная подгруппа группы A для каждого $p \in q(A) \setminus \Delta(A)$. Поэтому ввиду конечности множества π_2 подгруппа $H = \bigoplus\limits_{p \in \pi_2} t_pA$ группы A есть ограниченная периодическая группа. Кроме того, H есть сервантная подгруппа группы A. Следовательно, H есть прямое слагаемое группы A,

$$A = H \oplus A_1. \tag{1}$$

При таком выборе H выполняется условие

$$q(A_1) \cap \pi(\widetilde{F}) = \varnothing.$$

Из этого условия согласно теореме 2 следует равенство

$$\operatorname{Ext}(\widetilde{F}, A_1) = 0. \tag{2}$$

Точной последовательности

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow F \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow 0$$

соответствует точная последовательность

$$\operatorname{Ext}(\widetilde{F}, A_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}(F, A_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}(B_1, A_1). \tag{3}$$

Так как B_1 – свободная группа, то

$$\operatorname{Ext}(B_1, A_1) = 0. \tag{4}$$

На основании (2), (3), (4) заключаем, что

$$\operatorname{Ext}(F, A_1) = 0. \tag{5}$$

Поскольку H – ограниченная периодическая группа и F – группа без кручения,

$$\operatorname{Ext}(F, H) = 0. \tag{6}$$

Теперь на основании (1), (5), (6) заключаем, что $\operatorname{Ext}(F, A) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть A есть редуцированная группа, $\Delta = \Delta(A)$ и $q = q(A)$; пусть, далее, F – группа без кручения конечного ранга r. Если в F существует свободная подгруппа B ранга r, для которой выполнены условия*

(γ) *подгруппа* $q^{-1}B$ *группы* F *имеет конечное число образующих,*

(δ) *подгруппа* B *имеет в* F *конечную* Δ*-высоту,*

то $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 6а и леммы 8.

Теорема 7. *Пусть* A *– счетная редуцированная группа,* F *– группа без кручения конечного ранга* r, $\Delta = \Delta(A)$ *и* $q = q(A)$. *Группа* $\mathrm{Ext}(F, A)$ *тогда и только тогда является нулевой, когда для любой свободной подгруппы* $B \subset F$ *ранга* r *выполняются следующие условия:*

(γ) *подгруппа* $q^{-1}B$ *группы* F *имеет конечное число образующих,*

(δ) *подгруппа* B *имеет в* F *конечную* Δ*-высоту.*

Легко видеть, что группа F конечного ранга r локально Δ-свободна тогда и только тогда, когда условие (δ) выполнено хотя бы для одной свободной подгруппы B ранга r. Поэтому теорема 7 следует из теорем 5а и 6.

Будем говорить, что группа A *вложима в группу* B, если существует мономорфное отображение A в B.

Теорема 8. *Пусть* A *– счетная редуцированная группа,* F *– группа без кручения первого ранга,* $Z \subset F \subset Q$, $\Delta = \Delta(A)$, $q = q(A)$ *и* $\pi = P \setminus \Delta(A)$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $F \in F(A)$, *т.е.* $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$,

2) *подгруппа* $q^{-1}Z$ *группы* F *является циклической и* Z *имеет в* F *конечную* Δ*-высоту,*

3) *группа* F *вложима в группу* Q_π *и подгруппа* $q^{-1}Z$ *группы* F *является циклической.*

Доказательство. Равносильность условий 1) и 2) непосредственно следует из теорем 6 и 7.

Покажем, что условия 2) и 3) равносильны. Предположим, что Z имеет в F конечную Δ-высоту. Тогда существует содержащая Z циклическая подгруппа B группы F такая, что $\pi(F/B) \subset \pi$; отсюда следует, что группа F вложима в группу Q_π. Кроме того, очевидно, что любая ненулевая подгруппа группы Q_π имеет в Q_π конечную Δ-высоту. В частности, всякая ненулевая циклическая подгруппа группы Q_π имеет конечную Δ-высоту в Q_π. Следовательно, если F вложима в Q_π, то Z имеет конечную Δ-высоту в F. На основании приведенных выше рассуждений заключаем, что условия 2) и 3) равносильны.

§ 5

Лемма 9. *Пусть* A *– счетная редуцированная группа,* F *– группа без кручения конечного ранга* r, *и пусть* S *– сервантная в* F *подгруппа ранга* $r - 1$. *Если* $F \in F(A)$, *то* $F/S \in F(A)$.

Доказательство. Пусть B есть свободная подгруппа ранга r группы F. Положим

$$\overline{F} = F/S, \qquad \overline{B} = [B, S]/S,$$

где $[B, S]$ – подгруппа группы F, порожденная подгруппами B и S; тогда $\overline{F}$ есть группа без кручения первого ранга, а $\overline{B}$ – ненулевая циклическая подгруппа этой группы. Обозначим через φ естественный гомоморфизм F/B на $\overline{F}/\overline{B}$. Нетрудно видеть, что для всякого $p \in P$ гомоморфизм φ индуцирует эпиморфизм φ_p подгруппы $t_p(F/B)$ на $t_p(\overline{F}/\overline{B})$,

$$\varphi_p\colon t_p(F/B) \to t_p(\overline{F}/\overline{B}). \tag{1}$$

По теореме 5 в силу равенства $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$ имеем

$$(\alpha) \qquad |\, q(A) \cap \pi(F/B)\,| < \aleph_0,$$

$$(\beta) \qquad \Delta(A) \cap \pi^*(F/B) = \varnothing.$$

Отсюда ввиду (1) следует, что $|\, q(A) \cap \pi(\overline{F}/\overline{B})\,| < \aleph_0$ и $\Delta(A) \cap \pi^*(\overline{F}/\overline{B}) = \varnothing$.

По теореме 6а получаем $\mathrm{Ext}(\overline{F}, A) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть A – счетная редуцированная группа и F – счетная группа без кручения бесконечного ранга. Группа* $\mathrm{Ext}(F, A)$ *тогда и только тогда является нулевой, когда* $\mathrm{Ext}(S, A) = 0$ *для любой сервантной в F подгруппы S конечного ранга.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы сразу следует из свойства наследственности групп из $F(A)$ (теорема 1).

Докажем достаточность условий. Пусть G есть расширение группы A при помощи F. Мы будем считать, что A – подгруппа группы G и $F = G/A$. Докажем, что A является прямым слагаемым группы G. По условию F – счетная группа без кручения бесконечного ранга. Следовательно, существует счетное максимальное линейно независимое множество $\{\bar{g}_i\}_{i \in N}$ элементов группы F. Обозначим через $\overline{S}_n$ наименьшую сервантную подгруппу группы F, содержащую элементы $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n$,

$$\overline{S}_n = [\,\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n]_*\,. \tag{1}$$

Тогда

$$\overline{S}_i \subset \overline{S}_{i+1} \qquad (i \in N), \tag{2}$$

$$F = \bigcup_{i \in N} \overline{S}_i. \tag{3}$$

По условию $\mathrm{Ext}(\overline{S}_n, A) = 0$, поскольку $\overline{S}_n$ – сервантная подгруппа конечного ранга группы F. Отсюда согласно лемме 9 следует, что

$$\overline{S}_n/\,\overline{S}_{n-1} \in F(A) \qquad (n > 1). \tag{4}$$

Обозначим через S_n полный прообраз группы $\overline{S}_n$ при естественном гомоморфизме группы G на F и положим $S_0 = A$. Тогда ввиду (2)–(4) выполняются следующие соотношения:

$$S_i \subset S_{i+1} \qquad (i \in N), \tag{5}$$

$$G = \bigcup_{i \in N} S_i, \tag{6}$$

$$S_i/S_{i-1} \in F(A) \qquad (i \in N). \tag{7}$$

Ввиду (7) $S_1/A \in F(A)$, следовательно, A есть прямое слагаемое группы S_1 и, значит, существует группа C_1 такая, что $S_1 = A \oplus C_1$.

Предположим, что уже найдены группы $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ такие, что

$$S_i = A \oplus C_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{8}$$

$$C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_{n-1}. \tag{9}$$

Положим $\widetilde{S}_n = S_n/C_{n-1}$ и $\widetilde{S}_{n-1} = S_{n-1}/C_{n-1}$. Тогда, поскольку $S_{n-1} = A \oplus C_{n-1}$ и $\widetilde{S}_n/\widetilde{S}_{n-1} \cong S_n/S_{n-1}$, имеем

$$\widetilde{S}_{n-1} \cong A, \tag{10}$$

$$\widetilde{S}_n/\widetilde{S}_{n-1} \in F(A). \tag{11}$$

На основании (10) и (11) заключаем, что $\widetilde{S}_{n-1}$ является прямым слагаемым группы $\widetilde{S}_n$, т.е. существует группа $\widetilde{C}_n$ такая, что

$$\widetilde{S}_n = \widetilde{S}_{n-1} \oplus \widetilde{C}_n. \tag{12}$$

Обозначим через C_n полный прообраз группы $\widetilde{C}_n$ при естественном гомоморфизме группы S_n на факторгруппу S_n/C_{n-1}. Тогда на основании (12), равенства $S_{n-1} = A \oplus C_{n-1}$ и соотношения $C_{n-1} \subset C_n$ заключаем, что $S_n = A \oplus C_n$. Таким образом, доказано, что можно построить множество $\{C_i\}_{i \in N}$ подгрупп группы G, удовлетворяющих условиям (8) и (9). Обозначим через H объединение групп C_i,

$$H = \bigcup_{i \in N} C_i. \tag{13}$$

На основании (6), (8), (13) заключаем, что имеет место прямое разложение $G = A \oplus H$, и, таким образом, доказана достаточность условий теоремы.

Теорема 10. *Пусть A – счетная редуцированная группа, F – счетная группа без кручения, $q = q(A)$ и $\Delta = \Delta(A)$. Группа $\mathrm{Ext}(F, A)$ тогда и только тогда является нулевой, когда группа F локально Δ-свободна и для любой подгруппы B с конечным числом образующих группы F группа $q^{-1}B$ имеет конечное число образующих.*

Доказательство. Докажем необходимость условий теоремы. Предположим, что $F \in F(A)$; тогда по свойству наследственности для любой сервантной в F подгруппы S выполняется соотношение $S \in F(A)$.

Пусть B – ненулевая подгруппа с конечным числом образующих группы F и S – наименьшая сервантная в F подгруппа, содержащая B. По теореме 7 подгруппа $q^{-1}B$ группы S имеет конечное число образующих и B имеет в S, а следовательно и в F, конечную Δ-высоту.

Докажем достаточность условий теоремы. Предположим, что выполнены условия теоремы, и докажем, что

$$\operatorname{Ext}(F, A) = 0. \tag{1}$$

Пусть S – сервантная в F подгруппа конечного ранга n. Обозначим через B свободную подгруппу группы S ранга n; по условию подгруппа $q^{-1}B \subset F$ имеет конечное число образующих и B имеет в F конечную Δ-высоту. Отсюда, поскольку S сервантна в F, следует, что $q^{-1}B \subset S$ и B имеет в S конечную Δ-высоту. Следовательно, по теореме 6

$$\operatorname{Ext}(S, A) = 0. \tag{2}$$

Поскольку равенство (2) выполняется для любой сервантной в F подгруппы конечного ранга, согласно теореме 9 имеет место равенство (1). Теорема доказана.

Определение. Пусть F – счетная группа без кручения. Если F имеет конечный ранг m, то положим $M = \{1, 2, \ldots, m\}$; если F имеет бесконечный ранг, положим $M = N$. Множество $\{F_i\}_{i \in M}$ групп без кручения первого ранга назовем *системой факторов* группы F, если существует возрастающая цепочка

$$S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_i \subset S_{i+1} \subset \ldots$$

сервантных подгрупп группы F, удовлетворяющих следующим условиям:

$$(\varphi_1) \qquad F = \bigcup_{i \in M} S_i,$$

$$(\varphi_2) \qquad S_1 \cong F_1, \qquad S_i/S_{i-1} \cong F_i \quad \text{для } i \in M,\ i > 1.$$

Теорема 11. *Пусть A – счетная редуцированная группа, F – счетная группа без кручения и $\{F_i\}_{i \in M}$ – ее система факторов. Группа* $\operatorname{Ext}(F, A)$ *тогда и только тогда является нулевой, когда $F_i \in F(A)$ для каждого $i \in M$.*

Доказательство. Докажем необходимость условий теоремы. Предположим, что

$$\operatorname{Ext}(F, A) = 0. \tag{1}$$

Системе факторов $\{F_i\}_{i \in M}$ соответствует некоторое множество $\{S_i\}_{i \in M}$ сервантных подгрупп группы F, удовлетворяющих условиям (φ_1), (φ_2) предыдущего определения. Из условия $F \in F(A)$ согласно свойству наследственности (теорема 1) вытекает, что

$$S_i \in F(A) \quad \text{при любом } \ i \in M.$$

Отсюда согласно лемме 9 следует

$$S_1 \in F(A), \qquad S_i/S_{i-1} \in F(A) \quad (i \in M, \ i > 1). \tag{2}$$

Кроме того,

$$S_1 \cong F_1, \qquad S_i/S_{i-1} \cong F_i \quad \text{для } \ i \in M, \ i > 1. \tag{3}$$

На основании (2), (3) заключаем, что $F_i \in F(A)$ для каждого $i \in M$.

Докажем достаточность условий теоремы. Предположим, что

$$F_i \in F(A) \qquad (i \in M),$$

т.е.

$$\operatorname{Ext}(F_i, A) = 0 \quad \text{для } \ i \in M, \tag{4}$$

и докажем, что $\operatorname{Ext}(F, A) = 0$. Для этого согласно теореме 9 достаточно доказать, что $\operatorname{Ext}(S, A) = 0$ для любой сервантной в F подгруппы S конечного ранга. Вначале докажем индукцией по i, что

$$\operatorname{Ext}(S_i, A) = 0 \qquad (i \in M). \tag{5}$$

Равенство (5) следует из (4) при $i = 1$, поскольку $S_1 \cong F_1$. Предположим, что выполнимость равенства (5) уже доказана для каждого $i < n$, и докажем, что оно выполняется также при $i = n$. Точной последовательности

$$0 \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow S_n \longrightarrow S_n/S_{n-1} \longrightarrow 0$$

ввиду $S_n/S_{n-1} \cong F_n$ соответствует точная последовательность

$$\operatorname{Ext}(F_n, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(S_n, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(S_{n-1}, A). \tag{6}$$

По индуктивному предположению

$$\operatorname{Ext}(S_{n-1}, A) = 0, \tag{7}$$

и по условию

$$\operatorname{Ext}(F_n, A) = 0. \tag{8}$$

На основании (6), (7), (8) заключаем, что $\operatorname{Ext}(S_n, A) = 0$. Таким образом, доказана справедливость равенства (5) для каждого $i \in M$.

Пусть S есть любая сервантная в F подгруппа конечного ранга. Поскольку

$$F = \bigcup_{i \in M} S_i,$$

найдется такой индекс i, что

$$S \subset S_i. \tag{9}$$

Так как $S_i \in F(A)$, из (9) на основании свойства наследственности (f_1) заключаем, что $S \in F(A)$, т.е.

$$\operatorname{Ext}(S, A) = 0. \tag{10}$$

Так как равенство (10) выполняется для любой сервантной в F подгруппы S конечного ранга, то по теореме 9 $\operatorname{Ext}(F, A) = 0$. Теорема доказана.

Пусть F – группа без кручения, $\pi \subset P$ и D – минимальная делимая для F группа. Тогда факторгруппа $\overline{D} = D/F$ является периодической. Обозначим через $D_\pi(F)$ подгруппу D, являющуюся полным прообразом подгруппы $t_\pi \overline{D}$ группы $\overline{D}$ при естественном гомоморфизме группы D на $\overline{D}$. Группу $D_\pi(F)$ будем называть *минимальной π-делимой для F группой.*

Лемма 10. *Пусть F – группа без кручения конечного ранга m. Предположим, что факторгруппа группы F по любой сервантной в F подгруппе ранга $m-1$ вложима в группу Q_π, где π – некоторое фиксированное множество простых чисел. Тогда $D_\pi(F) \cong \bigoplus\limits_m Q_\pi$.*

Доказательство. Пусть D – минимальная делимая группа, содержащая группу F. Очевидно, D имеет ранг m. Пусть

$$D = \bigoplus_{i=1}^{m} D_i \tag{1}$$

– разложение группы D в прямую сумму групп первого ранга, т.е. групп, изоморфных Q. Пусть F_i^* – компонента группы F в прямом слагаемом D_i прямого разложения (1) и φ_i – проекция группы D на прямое слагаемое D_i. Гомоморфизм φ_i индуцирует гомоморфизм φ_i' группы F на F_i^*,

$$\varphi_i' \colon F \to F_i^*.$$

Согласно условию леммы F_i^* вложима в Q_π,

$$0 \longrightarrow F_i^* \longrightarrow Q_\pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Кроме того, очевидно, F есть подгруппа группы $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} F_i^*$,

$$F \subset \bigoplus_{i=1}^{m} F_i^*. \tag{3}$$

На основании (2), (3) заключаем, что существует мономорфизм $\psi \colon F \to \bigoplus\limits_m Q_\pi$. Тогда нетрудно видеть, что минимальная π-делимая для ψF подгруппа $D_\pi(\psi F)$ группы $\bigoplus\limits_m Q$ имеет ранг m и содержится в $\bigoplus\limits_m Q_\pi$. Отсюда можно вывести, что $D_\pi(\psi F) \cong \bigoplus\limits_m Q_\pi$ и, значит, $D_\pi(F) \cong \bigoplus\limits_m Q_\pi$.

Следствие. *Пусть A – счетная редуцированная группа и F – такая группа без кручения конечного ранга m, что* $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$. *Тогда* $D_\pi(F) \cong \bigoplus\limits_m Q_\pi$, *где* $\pi = P \setminus \Delta(A)$.

Доказательство. По условию имеем $F \in F(A)$. Отсюда согласно лемме 9 следует, что

$$F/S \in F(A)$$

для любой сервантной в F подгруппы S ранга $m-1$. Следовательно, по теореме 8 группа F/S вложима в группу Q_π. Таким образом, F удовлетворяет всем условиям леммы 10 и поэтому $D_\pi(F) \cong \bigoplus\limits_m Q_\pi$.

Лемма 11. *Пусть A – счетная редуцированная группа и F – такая счетная группа без кручения, что* $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$. *Тогда*

$$D_\pi(F) \cong \bigoplus_{r(F)} Q_\pi,$$

где $\pi = P \setminus \Delta(A)$.

Доказательство. Группу F можно представить в виде объединения возрастающей последовательности сервантных в F подгрупп S_i, имеющих ранг i,

$$F = \bigcup_{i \in M} S_i, \qquad S_i \subset S_{i+1}.$$

Положим $D = D_\pi(F)$; пусть D_i – наименьшая π-делимая подгруппа группы D, содержащая S_i. Легко видеть, что $D_i \cong D_\pi(S_i)$. Но из условия $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$ леммы следует (теорема 1), что $\mathrm{Ext}(S_i, A) = 0$. Следовательно, согласно следствию из леммы 10

$$D_i \cong \bigoplus_i Q_\pi \qquad (i \in M). \tag{1}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что D есть объединение подгрупп D_i,

$$D = \bigcup_{i \in M} D_i, \tag{2}$$

причем каждая подгруппа D_i является сервантной подгруппой в D. Поэтому на основании (1), (2) заключаем, что группа D изоморфна прямой сумме $r(F)$ экземпляров группы Q_π.

Лемма 12. *Пусть $\Delta \subset P$ и $\pi = P \setminus \Delta$. Тогда любая подгруппа B с конечным числом образующих группы $\bigoplus\limits_r Q_\pi$ имеет в этой группе конечную Δ-высоту.*

Доказательство. Пусть B – подгруппа с конечным числом образующих группы $C = \bigoplus\limits_{i \in M} C_i$, где $C_i \cong Q_\pi$, и B_i – компонента группы B в прямом слагаемом C_i. На основании рассуждений из доказательства теоремы 8 заключаем, что ненулевая компонента B_i имеет конечную Δ-высоту в C_i для каждого $i \in M$. Кроме того, существует только конечное число индексов $i \in M$, для которых $B_i \neq 0$. Поэтому B имеет конечную Δ-высоту в C.

Следствие. *Пусть* $\Delta \subset P$, $\pi = P \setminus \Delta$ *и* F – *группа, вложимая в* $\bigoplus\limits_{r} Q_{\pi}$. *Тогда любая подгруппа* B *группы* F, *имеющая конечное число образующих, имеет в группе* F *конечную* Δ-*высоту.*

Теорема 12. *Пусть* A – *счетная редуцированная группа,* F – *счетная группа без кручения,* $\pi = P \setminus \Delta(A)$, $q = q(A)$. *Группа* $\mathrm{Ext}(F, A)$ *тогда и только тогда является нулевой, когда группа* F *вложима в группу* $\bigoplus\limits_{r(F)} Q_{\pi}$ *и для любой подгруппы* B *с конечным числом образующих группы* F *подгруппа* $q^{-1}B$ *группы* F *имеет конечное число образующих.*

Доказательство. Докажем достаточность условий теоремы. Допустим, что группа F вложима в группу $\bigoplus\limits_{r(F)} Q_{\pi}$ и $q^{-1}B \subset F$ имеет конечное число образующих всякий раз, когда группа $B \subset F$ имеет конечное число образующих.

Докажем, что $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$. Поскольку F вложима в группу $\bigoplus\limits_{r(F)} Q_{\pi}$, то согласно следствию из леммы 12 любая подгруппа B группы F, имеющая конечное число образующих, имеет конечную $\Delta(A)$-высоту в F. Кроме того, $q^{-1}B$ имеет конечное число образующих. Тогда по теореме 10 имеем $\mathrm{Ext}(F, A) = 0$.

Докажем необходимость условий теоремы. Предположим, что

$$\mathrm{Ext}(F, A) = 0. \tag{1}$$

Тогда согласно лемме 11 $D_{\pi}(F) \cong \bigoplus\limits_{r(F)} Q_{\pi}$ и, следовательно, группа F вложима в группу $\bigoplus\limits_{r(F)} Q_{\pi}$. Кроме того, согласно теореме 10 из равенства (1) следует, что для любой подгруппы B группы F, имеющей конечное число образующих, подгруппа $q^{-1}B \subset F$ также имеет конечное число образующих. Таким образом, доказана необходимость условий теоремы.

Литература

1. Baer R., *The subgroup of the elements of finite order of an Abelian group*, Ann. Math., **37:4** (1936), 766–781.

2. Картан А., Эйленберг С., *Гомологическая алгебра*, М.: ИЛ, 1960.

3. MacLane S., *Homology*, Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1963.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Универсально полные абелевы группы

Абелева группа называется *редуцированной*, если она не содержит ненулевых полных подгрупп, т.е. подгрупп, всякий элемент которых делится на любое натуральное число.

Абелева группа G называется *вполне редуцированной*, если $\bigcap\limits_{n \in N} nG = \{0\}$, где N – совокупность всех натуральных чисел.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ какую-либо бесконечную последовательность

$$n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k,\, \ldots$$

натуральных чисел со следующими свойствами:

(α) каждый член последовательности делит последующий член,

(β) для любого заданного натурального числа n существует член последовательности, кратный n.

Пусть G – вполне редуцированная группа; построим группу $U(G)$, которую назовем *универсальным расширением* группы G. Обозначим через G_{n_k} факторгруппу G/n_kG, $n_k \in \mathfrak{N}$. Элементом группы $U(G)$ будем считать всякую последовательность $x = (x_k)_{k \in N}$, где $x_k \in G_{n_k}$, причем для всякого $k \in N$ выполнено $x_k \supset x_{k+1}$. Сложение двух элементов x и y, $y = (y_k)_{k \in N}$, определяется равенством $x + y = (x_k + y_k)_{k \in N}$. Элемент $g \in G$ будем считать равным элементу $x = (x_k)_{k \in N}$ группы $U(G)$, если $x_k = g + n_kG$ при всяком $k \in N$. Строение группы $U(G)$ не зависит от выбора множества $\mathfrak{N}$ со свойствами (α), (β).

Вполне редуцированная группа H называется *универсально полной*, если для какого-либо множества $\mathfrak{N}$ со свойствами (α), (β) всякая убывающая последовательность классов смежности $x_1 \supset x_2 \supset \ldots \supset x_k \supset \ldots$, где $x_k \in H/n_kH$, $k \in N$, имеет непустое пересечение.

Универсально полная группа H, удовлетворяющая условию $mH = H$ для всякого натурального числа m, взаимно простого с данным простым числом p, называется *p-адически полной.*

Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in M}$ – множество непересекающихся вполне редуцированных групп. Построим группу F следующим образом: элементом группы F будем считать всякую последовательность $x = \{g_\alpha\}_{\alpha \in M}$, $g_\alpha \in G_\alpha$, почти все компоненты g_α которой при всяком фиксированном натуральном n удовлетворяют условию $g_\alpha \in nG_\alpha$. Сумма двух элементов x и $y = \{g'_\alpha\}_{\alpha\in M}$ определяется формулой $x + y = \{g_\alpha + g'_\alpha\}_{\alpha\in M}$. Группу F назовем *регулярной прямой суммой* групп G_α и будем писать $F = \underset{\alpha\in M}{\mathcal{S}} G_\alpha$.

Обозначим через K_p кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с данным простым числом p; символом Z_p обозначим кольцо целых p-адических чисел. Кольцо эндоморфизмов факторгруппы аддитивной группы Q всех рациональных чисел по подгруппе Z целых чисел обозначим через V и назовем *кольцом универсальных чисел*. Аддитивная группа кольца V является универсальным расширением аддитивной группы целых рациональных чисел и разлагается в полную прямую сумму аддитивных групп колец Z_p (с разными p).

Абелеву группу с кольцами Z_p, K_p или V в качестве областей операторов будем называть соответственно Z_p-, K_p- или V-группой.

Строение и основные свойства универсально полных групп описывают следующие теоремы.

1. Всякая p-адически полная группа H может быть представлена в виде регулярной прямой суммы Z_p-циклических групп. При этом если B – базисная K_p-подгруппа группы H и $B = \bigoplus\limits_{\alpha\in M} C_\alpha$ есть ее разложение в прямую сумму K_p-циклических подгрупп, то $H \cong \underset{\alpha\in M}{\mathcal{S}} U(C_\alpha)$.

2. Всякая универсально полная группа разлагается, и притом единственным образом, в полную прямую сумму p-адически полных (с различными простыми p) групп.

3. Всякая универсально полная группа H может быть представлена в виде регулярной прямой суммы Z_p-циклических групп (с различными или одинаковыми p), причем для данного простого p число Z_p-циклических прямых слагаемых является инвариантом группы H и равно рангу факторгруппы H/pH.

4. Для всякой вполне редуцированной абелевой группы G существует группа G^* со следующими свойствами:

(a) группа G^* является регулярной прямой суммой Z_p-циклических групп (с одинаковыми или различными p);

(b) группа G есть сервантная подгруппа группы G^*;

(c) факторгруппа G^*/G является полной группой.

Группа G^* со свойствами (a), (b), (c) определяется однозначно с точностью до изоморфизма, переводящего всякий элемент группы G в себя. Группа G^* изоморфна универсальному расширению $U(G)$ группы G.

5. Всякое прямое слагаемое универсально полной группы также является универсально полной группой. Регулярная прямая сумма любого множества универсально полных групп есть универсально полная группа.

6. Редуцированная абелева группа тогда и только тогда является прямым слагаемым всякой абелевой группы, в которой она содержится в качестве сервантной подгруппы, когда она универсально полна.

Имеют место также следующие теоремы, которые будут играть существенную роль при изучении счетных абелевых групп без кручения.

7. Всякая абелева Z_p-группа без кручения, имеющая счетную систему образующих относительно кольца операторов Z_p и не содержащая элементов бесконечной высоты, разлагается в прямую сумму Z_p-циклических подгрупп.

8. Для всякой счетной редуцированной K_p-группы A без кручения существует Z_p-группа $\overline{A}$ со следующими свойствами:

(a_1) группа $\overline{A}$ разлагается в прямую сумму Z_p-циклических подгрупп;

(b) группа A есть сервантная подгруппа группы $\overline{A}$;

(c) факторгруппа $\overline{A}/A$ является полной группой.

9. Для всякой счетной редуцированной абелевой группы G без кручения существует V-группа $\widetilde{G}$ со следующими свойствами:

(a_2) группа $\widetilde{G}$ является прямой суммой V-циклических подгрупп;

(b) группа G есть сервантная подгруппа группы $\widetilde{G}$;

(c) факторгруппа $\widetilde{G}/G$ является полной группой.

Группы расширений абелевых групп

1. Целью доклада является изложение основных свойств групп абелевых расширений, т.е. групп, принадлежащих области значений функтора Ext, определенного на категории абелевых групп.

Для формулировки основных результатов введем необходимые понятия и обозначения.

2. Понятие регулярной прямой суммы групп. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha\in M}$ есть множество редуцированных групп A_α. Построим группу F следующим образом. Элементом группы F будем считать всякую последовательность

$$a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in M} \qquad (a_\alpha \in A_\alpha),$$

почти все компоненты a_α которой при любом фиксированном натуральном n удовлетворяют условиям $a_\alpha \in nA_\alpha$. Сумма двух элементов a и $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in M}$ определяется формулой $a+b = \{a_\alpha + b_\alpha\}_{\alpha\in M}$. Группа F называется *регулярной прямой суммой* групп A_α и обозначается символом $\underset{\alpha\in M}{\mathcal{S}} A_\alpha$.

3. Понятия универсального расширения и универсально полной группы. Пусть H – абелева группа без элементов бесконечной высоты, т.е. группа, удовлетворяющая условию

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} nH = 0.$$

Рассмотрим множество факторгрупп H/nH, $n = 1, 2, \ldots$, и для каждой пары n, m натуральных чисел, из которых первое делит второе, – множество естественных гомоморфизмов $\pi_n^m \colon H/mH \to H/nH$. Множество факторгрупп H/nH и множество гомоморфизмов π_n^m образуют обратный спектр. Предельную группу этого спектра обозначим через H^*,

$$H^* = \varprojlim H/nH.$$

Существует канонический мономорфизм φ группы H в предельную группу H^*. Образуем из H^* новую группу, заменив в H^* элементы группы φH соответствующими элементами группы H и определив надлежащим образом групповую операцию. Полученную группу назовем *универсальным расширением* группы H и будем обозначать символом $U(H)$.

Группу H без элементов бесконечной высоты назовем *универсально полной*, если канонический мономорфизм φ является эпиморфизмом. Другими словами, группа H называется универсально полной, если $U(H) = H$.

4. Всюду ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathfrak{A}$ – класс абелевых групп;

tA – максимальная периодическая подгруппа группы A;

dA – максимальная делимая (полная) подгруппа группы A;

$|A|$ – мощность группы A;

Q – аддитивная группа рациональных чисел;

Z – аддитивная группа целых рациональных чисел;

C – факторгруппа группы Q по подгруппе Z;

P – множество всех простых чисел;

Z_p – аддитивная группа кольца целых p-адических чисел;

$\mathbf{U}$ – полная прямая сумма групп Z_p по всем простым p, $\mathbf{U} = \prod\limits_{p \in P} Z_p$;

$U(L)$ – универсальное расширение свободной абелевой группы L;

$\underset{\mathfrak{m}}{\mathcal{S}}\, \mathbf{U}$ – регулярная прямая сумма $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных группе $\mathbf{U}$;

$\mathrm{Ext}(A, H)$ – группа абелевых расширений группы H с помощью группы A;

$\mathrm{Pext}(A, H)$ – группа абелевых сервантных расширений группы H с помощью группы A.

5. Строение универсально полных групп. Группу будем называть *элементарной p-адической*, если она либо изоморфна группе Z_p, либо является циклической p-группой.

Имеет место следующая теорема:

Любая универсально полная абелева группа может быть представлена как регулярная прямая сумма элементарных p-адических групп (с одним и тем же или различными p), причем любые два таких представления изоморфны.

В частности, $U(Z) \cong \prod\limits_{p \in P} Z_p$, т.е. $U(Z) \cong \mathbf{U}$.

Если L – свободная группа, $L = \bigoplus\limits_{\mathfrak{n}} Z$, то

$$U(L) \cong \underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{S}}\, U(Z), \quad \text{т.е. } U(L) \cong \underset{\mathfrak{n}}{\mathcal{S}}\, \mathbf{U}.$$

Пусть B есть подгруппа свободной группы L. Символом $U(B, L)$ будем обозначать полный прообраз группы $d(U(L)/B)$ при естественном гомоморфизме $U(L)$ на факторгруппу $U(L)/B$. Отметим, что группа $U(B, L)$ изоморфна группе $U(B)$.

6. Основные свойства редуцированных групп расширений выражает следующая теорема.

Следующие свойства редуцированной группы G равносильны:

(a) $G \in \{\mathrm{Ext}(A, H)\}_{A, H \in \mathfrak{A}}$, *т.е. G является группой расширений;*

(b) $\mathrm{Ext}(Q, G) = 0$;

(c) $\operatorname{Ext}(A, G) = 0$ *для любой абелевой группы без кручения* A;

(d) $G \cong \operatorname{Ext}(C, G)$;

(e) *Группа* G *изоморфна факторгруппе группы* $\underset{\mathfrak{m}}{\mathcal{S}}\,\mathbf{U}$, *где* $\mathfrak{m} = |G|$;

(f) *Существует эпиморфизм группы* $\prod\limits_{\mathfrak{m}} \mathbf{U}$ *на группу* G *при достаточно большом* $\mathfrak{m} \leqslant |G|$;

(g) *Если* $tG \cong L/B$, *где* L *– свободная абелева группа, то*

$$G \cong U(L)/U(B, L) \oplus \Big(\prod_{p\in P} \underset{r_p(\overline{G})}{\mathcal{S}} Z_p\Big),$$

где $\overline{G} = G/tG$ *и* $r_p(\overline{G})$ *– ранг факторгруппы* $\overline{G}/p\overline{G}$;

(h) *Группа* G *есть прямая сумма двух групп, одна из которых изоморфна факторгруппе регулярной прямой суммы конечных абелевых групп, а другая изоморфна группе* $\prod\limits_{p\in P} \underset{r_p(\overline{G})}{\mathcal{S}} Z_p$;

(i) $G \in \{\operatorname{Pext}(A, H)\}_{A,\,H\in\mathfrak{A}}$, *т.е.* G *есть группа сервантных расширений.*

Равносильность свойств (a), (b), (c), (d) установлена в работах Нунке [1] и Фукса [2].

7. Полная система инвариантов группы расширений. Для группы расширений G подгруппы tG и dG и множество кардинальных чисел $\{r_p(\overline{G})\}_{p\in P}$ (где $\overline{G} = G/tG$, $r_p(\overline{G})$ – ранг факторгруппы $\overline{G}/p\overline{G}$) образуют полную систему инвариантов.

Для редуцированных групп расширений имеет место следующая теорема существования:

Для любой заданной редуцированной периодической группы T *и заданного множества* $\{\mathfrak{r}_p\}_{p\in P}$ *кардинальных чисел* $\mathfrak{r}_p$ *существует редуцированная группа расширений* G *такая, что* $tG \cong T$ *и* $\mathfrak{r}_p = r_p(\overline{G})$ *для каждого простого числа* p. *При этом если* $T \cong L/B$, *где* L *– свободная группа, то группа* G *изоморфна группе*

$$U(L)/U(B, L) \oplus \Big(\prod_{p\in P} \underset{\mathfrak{r}_p}{\mathcal{S}} Z_p\Big).$$

Любая делимая группа реализуется в качестве группы расширений, т.е. имеет место следующая теорема: *для любой заданной делимой группы* D *найдутся такие абелевы группы* A *и* H, *что* $D \cong \operatorname{Ext}(A, H)$.

Литература

1. Nunke R. J., *Modules of extensions over Dedekind rings*, Illinois J. Math., **3:2** (1959), 222–241.

2. Fuchs L., *Notes on Abelian groups. II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **11 : 1–2** (1960), 117–125.

Группа абелевых расширений алгебраически компактной группы при помощи любой абелевой группы

Полностью изучено строение группы $\mathrm{Ext}(H, A)$ абелевых расширений алгебраически компактной группы A при помощи любой заданной абелевой группы H. Введем следующие обозначения:

N – множество всех целых положительных чисел;

$A^{(p)}$ – факторгруппа группы A по подгруппе $\bigcap\limits_{k\in N} p^k A$ (p – простое число);

H_p – примарная компонента периодической части группы H;

B_p – базисная подгруппа группы H_p, для которой факторгруппа H_p/B_p имеет наименьший ранг;

r_p – ранг факторгруппы H_p/B_p;

$r(p,k)$ – ранг факторгруппы $(p^{k-1}H)[p]/(p^kH)[p]$;

$\pi(H, A)$ – множество всех простых чисел p, для которых H_p и $A^{(p)}$ являются ненулевыми группами.

Имеет место следующая

Теорема. *Если A – алгебраически компактная группа и H – произвольная абелева группа, то*

$$\mathrm{Ext}(H, A) \cong \prod_{p\in\pi(H,A)} \Bigl(\prod_{r_p} A^{(p)} \oplus \prod_{k\in N}\ \prod_{r(p,k)} A/p^kA\Bigr),$$

где $\prod$ – знак полной прямой суммы.

Базисные подмодули модулей над локальными кольцами главных идеалов

Пусть A – модуль над кольцом главных идеалов K. Подмодуль C модуля A называется *сервантным* в A, если $C \cap nA = nC$ для любого элемента $n \in K$.

Подмодуль B модуля A называется *базисным подмодулем* модуля A, если выполнены следующие условия:

1) B есть сервантный подмодуль модуля A;
2) модуль B разложи́м в прямую сумму циклических подмодулей;
3) для любого простого элемента p кольца K выполняется равенство $p\overline{A} = \overline{A}$, где $\overline{A} = A/B$.

Доказана

Теорема. *Любой модуль над локальным кольцом главных идеалов обладает базисными подмодулями и любые два базисных подмодуля изоморфны.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы о существовании и изоморфизме базисных подгрупп для обобщенно примарных групп.

Однако аналогичная теорема не всегда имеет место в классе модулей над кольцами главных идеалов. Так, если Q – кольцо всех рациональных чисел и K – любое нелокальное подкольцо с единицей кольца Q, отличное от Q, то K есть кольцо главных идеалов и существуют K-модули, не обладающие базисными подмодулями.

Группа абелевых расширений группы без кручения первого ранга

Обозначения: Q – аддитивная группа рациональных чисел; Z – аддитивная группа целых чисел; F – подгруппа группы Q, содержащая Z; F^* – подгруппа группы F, являющаяся полным прообразом максимальной делимой подгруппы факторгруппы F/Z при естественном гомоморфизме F на F/Z; tG – периодическая часть абелевой группы G; $A = G/tG$; P – множество всех простых чисел;

$$A_F = \bigcap_{\varphi \in \operatorname{Hom}(A,\,F)} \operatorname{Ker}\varphi; \qquad A_{F^*} = \bigcap_{\psi \in \operatorname{Hom}(A,\,F^*)} \operatorname{Ker}\psi;$$

$r_p(A_F)$ – ранг факторгруппы A_F/pA_F, $p \in P$;

$$\overline{r}_p(A_F) = \begin{cases} r_p(A_F), & \text{если } r_p(A_F) < \aleph_0, \\ 2^{r_p(A_F)}, & \text{если } r_p(A_F) \geqslant \aleph_0; \end{cases}$$

$\pi(A, F) = \{p \in P \mid pF \neq F,\, pA_F \neq A_F\}$; $Z(p^\infty)$ – группа типа p^∞; $\operatorname{Ext}(G, F)$ – группа абелевых расширений группы F с помощью G.

Теорема 1. *Для любой абелевой группы G*

$$\operatorname{Ext}(G, F) \cong \operatorname{Hom}(tG, Q/F) \oplus \operatorname{Ext}(A, F).$$

Теорема 2. *Пусть A – прямая сумма счетных абелевых групп без кручения. Если $A_{F^*} = 0$, то $\operatorname{Ext}(A, F) = 0$. Если $A_{F^*} \neq 0$, то*

$$\operatorname{Ext}(A, F) \cong \Big(\bigoplus_{p \in \pi(A,\,F)} \ \bigoplus_{\overline{r}_p(A_F)} Z(p^\infty) \Big) \oplus D,$$

где D – делимая группа без кручения. Если при этом A – счетная группа, то D имеет мощность континуума.

Группа абелевых расширений группы без кручения с помощью периодической группы

Введем следующие обозначения:

N – множество всех натуральных чисел;

P – множество всех простых чисел, $P \subset N$;

$C(p^k)$ – циклическая группа порядка p^k;

T_p – p-примарная компонента периодической группы T;

$r_p(H)$ – ранг факторгруппы $H/pH,\ p \in P$;

$Q(T,H) = \{p \in P \mid T_p \neq 0,\, pH \neq H\}$;

$\mathcal{B}(T_p)$ – множество всех базисных подгрупп группы T_p;

$r(T_p/B_p)$ – ранг факторгруппы T_p/B_p, где $B_p \in \mathcal{B}(T_p)$;

$m_p(T) = \min\limits_{B_p \in \mathcal{B}(T_p)} r(T_p/B_p)$;

$T[p]$ – подгруппа группы T, порожденная всеми элементами порядка p;

$b_{p,k}(T)$ – ранг факторгруппы $(p^{k-1}T)[p]/(p^kT)[p]$;

Z_p – аддитивная группа всех целых p-адических чисел;

$\bigoplus\limits_{\mathfrak{n}} A$ – прямая сумма $\mathfrak{n}$ экземпляров группы A;

$\prod\limits_{\mathfrak{n}} A$ – полная прямая сумма $\mathfrak{n}$ экземпляров группы A;

dF – максимальная делимая подгруппа группы F;

$\mathop{\mathcal{S}}\limits_{\mathfrak{n}} Z_p$ – полный прообраз подгруппы dF при естественном гомоморфизме α группы $\prod\limits_{\mathfrak{n}} Z_p$ на $F = \Big(\prod\limits_{\mathfrak{n}} Z_p\Big)\Big/\Big(\bigoplus\limits_{\mathfrak{n}} Z_p\Big)$, т.е. $\mathop{\mathcal{S}}\limits_{\mathfrak{n}} Z_p = \alpha^{-1}(dF)$.

Строение группы $\mathrm{Ext}(T,H)$ абелевых расширений группы без кручения H с помощью периодической группы T полностью описывают следующие теоремы.

Теорема 1. *Если H – группа без кручения, T – периодическая группа и B есть ее базисная подгруппа, то* $\mathrm{Ext}(T,H) \cong \mathrm{Ext}(T/B,H) \oplus \mathrm{Ext}(B,H)$.

Теорема 2. *Если H – группа без кручения и T – периодическая группа, то*

$$\mathrm{Ext}(T,H) \cong \prod_{p \in Q(T,H)} \Big(\prod_{m_p(T)} \mathop{\mathcal{S}}_{r_p(H)} Z_p \oplus \prod_{k \in N} \prod_{b_{p,k}(T)} \bigoplus_{r_p(H)} C(p^k) \Big).$$

Группа абелевых расширений сервантной подгруппы аддитивной группы целых p-адических чисел

Обозначения: J_p – аддитивная группа всех целых p-адических чисел (p – простое число); F – сервантная подгруппа группы J_p; $\mathrm{Ext}(G,F)$ – группа абелевых расширений F с помощью группы G; $Z(p^\infty)$ – группа типа p^∞; $\bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)$ – прямая сумма $\mathfrak{m}$ экземпляров группы $Z(p^\infty)$; tG – периодическая часть абелевой группы G; $A = G/tG$;

$$A_F = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A,F)} \mathrm{Ker}\,\varphi;$$

$r(A_F)$ – ранг факторгруппы A_F/pA_F;

$$\overline{r}(A_F) = \begin{cases} r(A_F), & \text{если ранг } r(A_F) \text{ конечен,} \\ 2^{r(A_F)}, & \text{если ранг } r(A_F) \text{ бесконечен.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Если G – любая абелева группа, $A = G/tG$ и F – ненулевая сервантная подгруппа группы J_p, то*

$$\mathrm{Ext}(G,F) \cong \mathrm{Hom}(tG, Z(p^\infty)) \oplus \mathrm{Ext}(A,F).$$

Теорема 2. *Пусть A – группа без кручения, F – нетривиальная сервантная подгруппа группы J_p и $H = A/A_F$. Если группа H счетна или факторгруппа H/pH конечна, то*

$$\mathrm{Ext}(A,F) \cong \Big(\bigoplus_{\overline{r}(A_F)} Z(p^\infty)\Big) \oplus D,$$

где D – делимая группа без кручения.

О группах расширений абелевых групп

Обозначения: F – ненулевая подгруппа аддитивной группы рациональных чисел; $Z(p^\infty)$ – группа типа p^∞; P – множество всех простых чисел; A – аддитивная абелева группа; tA – периодическая часть группы A; $|A|$ – мощность группы A; $D(A)$ – делимая оболочка группы A; $A(F)$ – подгруппа группы A, порожденная всеми гомоморфными образами группы F в A;

$$\pi(F,A) = \{p \in P \mid pA \neq A,\, pF \neq F\};$$

r_p – ранг факторгруппы $A/(pA + A(F))$; $\mathrm{Ext}(F,A)$ – группа абелевых расширений группы A при помощи группы F.

Теорема 1. *Для произвольной редуцированной группы A*

$$\mathrm{Ext}(F,A) \cong \Big(\bigoplus_{p\in\pi(F,\,A)} \bigoplus_{r_p} Z(p^\infty)\Big) \oplus D,$$

где D – делимая группа без кручения. Если при этом выполнено $\aleph_0 \leqslant |A| < \mathfrak{c}$ и $\mathrm{Ext}(F,A) \neq 0$, то D – континуальная группа.

Теорема 2. *Пусть C – расширение периодической абелевой группы при помощи вполне разложимой группы, т.е.*

$$C/tC = \bigoplus_{i\in M} F_i,$$

где M – множество индексов и для каждого $i \in M$ F_i – группа без кручения первого ранга. Для любой группы без кручения A

$$\mathrm{Ext}(C,A) \cong \mathrm{Hom}(tC,\, D(A)/A) \oplus \Big(\prod_{i\in M} \mathrm{Ext}(F_i,A)\Big).$$

О p-длине группы $\mathrm{Ext}(F, A)$ в случае, когда F и A – счетные p-примарные группы

Пусть p – простое число. Введем следующие обозначения: $Z(p^\infty)$ – квазициклическая группа; Q_p^* – кольцо целых p-адических чисел; если C – редуцированная p-примарная группа или редуцированный Q_p^*-модуль, то $\tau(C)$ – p-длина группы C или Q_p^*-модуля C, т.е. такое наименьшее порядковое число τ, что $p^\tau C = 0$; ω – наименьшее бесконечное порядковое число; $C^* = \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), C)$ – группа абелевых расширений C при помощи $Z(p^\infty)$; группу C^* можно рассматривать как Q_p^*-модуль.

Теорема 1. *Если A – счетная редуцированная p-примарная группа, то $A^* = \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), A)$ – редуцированный Q_p^*-модуль. При этом $\tau(A^*) = \tau(A) + \omega$ при $\tau(A) \geqslant \omega$, $\tau(A^*) = \tau(A)$ при $\tau(A) < \omega$.*

Теорема 2. *Если F и A – счетные редуцированные p-примарные группы, то $\mathrm{Ext}(F, A)$ – редуцированный Q_p^*-модуль и его p-длина равна $\min(\tau(A^*), \tau(F))$.*

О p-длине группы сервантных расширений абелевых групп

Введем обозначения: p – простое число; ω – наименьшее бесконечное порядковое число; A^1 – первая ульмовская подгруппа p-примарной группы A ($A^1 = p^\omega A$); $\mathrm{Pext}(C, A)$ – группа сервантных расширений группы A при помощи абелевой группы C; если G – редуцированная p-примарная группа или редуцированный p-адический модуль, то наименьшее порядковое число τ, удовлетворяющее условию $p^\tau G = 0$, обозначается символом $\tau(G)$ и называется *p-длиной* группы (модуля) G.

Теорема 1. *Если A и C – счетные редуцированные p-примарные группы, то* $\mathrm{Pext}(C, A) = 0$ *тогда и только тогда, когда $\tau(A) < \omega$ или $\tau(C) \leqslant \omega$.*

Теорема 2. *Если A и C – счетные редуцированные p-примарные группы и $\tau(A) \geqslant \omega$, то p-длина группы* $\mathrm{Pext}(C, A)$ *равна* $\min(\tau(C^1), \tau(A^1) + \omega)$.

Об универсальном пополнении абелевой группы

Для задания топологии в аддитивной абелевой группе достаточно указать систему окрестностей. Пусть A – абелева группа, для которой множество

$$\{nA \mid n \in N\} \tag{1}$$

образует фундаментальную систему окрестностей нуля. Легко проверить, что

$$\{n!A \mid n \in N\} \tag{2}$$

тоже является фундаментальной системой окрестностей нуля группы A.

Системы (1) и (2) эквивалентны, т.е. задают на группе A одну и ту же топологию. Обратные пределы $\varprojlim A/nA$ и $\varprojlim A/n!A$ являются топологическими абелевыми группами, причем они топологически изоморфны. *Универсальным пополнением* группы A назовем топологическую группу $\varprojlim A/nA$ или группу, топологически изоморфную ей; обозначим такую группу через $\widehat{A}$.

Символом Z_p обозначается кольцо целых p-адических чисел. Если p – простое число и факторгруппа A/pA ненулевая, то A/pA есть прямая сумма циклических групп порядка p и ее можно рассматривать как векторное пространство над конечным полем из p элементов; размерность этого пространства называется *p-рангом* группы A и обозначается через $r_p(A)$. Множество $\{p \in P \mid pA \neq A\}$ будем обозначать через $\pi(A)$.

Теорема 1. *Универсальное пополнение редуцированной абелевой группы без кручения является алгебраически компактной группой без кручения.*

Теорема 2. *Если A – редуцированная группа без кручения и ее p-ранг конечен для всякого $p \in \pi(A)$, то универсальное пополнение $\widehat{A}$ является компактной группой и* $\widehat{A} \cong \prod\limits_{p\in\pi(A)} \Big(\bigoplus\limits_{r_p(A)} Z_p\Big)$.

Теорема 3. *Если T – редуцированная периодическая группа, каждая примарная компонента T_p которой периодически полна, то* $\widehat{T} \cong \prod\limits_{p\in\pi(T)} \widehat{T}_p$, *где $\widehat{T}_p$ – p-адическое пополнение примарной группы T_p.*

Теорема 4. *Пусть T – периодическая часть редуцированной смешанной группы A и каждая примарная компонента группы T периодически полна. Пусть $F = A/\overline{T}$, где $\overline{T}$ – полный прообраз делимой части группы A/T при естественном гомоморфизме группы A на A/T. Если группа F ненулевая, т.е. $A \neq \overline{T}$, то $\widehat{A} \cong \widehat{T} \oplus \widehat{F}$, причем $\widehat{F}$ является алгебраически компактной группой без кручения.*